วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 34 ฉบับที่ 2 เดือนกรกฎาคม - ธันวาคม 2568
Journal of Science Ladkrabang Vol. 34 No. 2 July - December 2025

บทความวิจัย (Research article)

ผลเฉลยของสมการ Benney-Luke และสมการ Modified Equal-Width โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE
The Solutions of the Benney-Luke Equation and the Modified Equal-Width Using the Riccati-Bernoulli sub-ODE Method

จิราพร เสนจันทร์[1] กัญญารัตน์ วิสาละ[1] ศุภินันท์ จันมา[2] และ อรพรรณ จันทร์งาม[2*]
Jiraporn Sanjun[1] Kanyarat Wisala[1] Supinan Janma[2] and Orapan Janngam[2*]
[1]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี จ.สุราษฎร์ธานี ประเทศไทย
[2]สาขาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีการเกษตร มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา ลำปาง จ.ลำปาง ประเทศไทย
[1]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Suratthani Rajabhat University, Surat Thani, Thailand
[2]Department of Science, Faculty of Sciences and Agricultural Technology, Rajamangala University of Technology Lanna Lampang, Lampang, Thailand
วันที่ส่งบทความ : 15 พฤศจิกายน 2567 วันที่แก้ไขบทความ : 17 ธันวาคม 2568 วันที่ตอบรับบทความ : 19 ธันวาคม 2568
Received: 15 November 2024, Revised: 17 December 2025, Accepted: 19 December 2025

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อค้นหาผลเฉลยของสมการ Benney-Luke และสมการ modified equal-width โดยใช้ระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE ซึ่งเป็นวิธีที่ถูกนำมาใช้บ่อยครั้งในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกและฟังก์ชันตรีโกณมิติ นอกจากนี้ ผลเฉลยบางส่วนยังถูกสร้างขึ้นในรูปแบบของคลื่นหงิกงอ (Kink waves) และคลื่นคาบ (Periodic waves) และแสดงด้วยกราฟสองมิติและกราฟสามมิติ

คำสำคัญ : สมการ Benney-Luke สมการ Modified Equal-Width ระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE

Abstract

This research article aims to find solutions to the Benney-Luke equation and the modified equal-width equation using the Riccati-Bernoulli sub-ODE method. This method is frequently employed for solving nonlinear partial differential equations. The solutions obtained for both the Benney-Luke and the modified equal-width equations are expressed

[*]ที่อยู่ติดต่อ Email address: oory99@rmutl.ac.th
https://doi.org/10.55003/scikmitl.2025.265308

in terms of hyperbolic functions and trigonometric functions. Furthermore, some solutions are generated in the form of kink waves and periodic waves, and are represented by two-dimensional and three-dimensional graphs.

Keywords: Benney-Luke equation, Modified Equal-Width equation, Riccati-Bernoulli sub-ODE method

1. บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation: PDE) มีความสำคัญในการประยุกต์ใช้ในทางวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ใช้อธิบายเกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางกายภาพต่าง ๆ เช่น ฟิสิกส์พลาสมา กลศาสตร์ของไหล คลื่นพลาสมา การแพร่กระจายของมลพิษในบรรยากาศ จลนศาสตร์ปฏิกิริยาเคมี (Sanjun et al., 2024a) เป็นต้น การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นนั้นเป็นเรื่องที่ท้าทาย ด้วยเหตุนี้ นักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์จึงได้คิดค้นวิธีต่าง ๆ ขึ้นมา เช่น ระเบียบวิธี Simple Equation (MSE) (Nofal, 2016; Sanjun & Chankaew, 2022) ระเบียบวิธี Modified Simple Equation (Khan & Akbar, 2014) ระเบียบวิธี enhanced (G'/G) $-$expansion (Hossain & Akbar, 2021) ระเบียบวิธี First Integral (Zhang et al., 2020) ระเบียบวิธี Power Index (Abraham-Shrauner, 2018) ระเบียบวิธี Modified extended tanh-function (Sanjun et al., 2024b) ระเบียบวิธี Unified method (Abdel-Gawad et al., 2023) และระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE (Alharbi & Almatrafi, 2020) เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 2015 (Akter & Akbar, 2015) ได้หาผลเฉลยของสมการ Benney-Luke โดยระเบียบวิธี MSE ในปี ค.ศ. 2021 (Gundogdu & Gozukizil, 2021) ได้หาผลเฉลยของสมการ Benney-Luke โดยระเบียบวิธี sn-ns method และในปี ค.ศ. 2011 (Arora et al., 2012) ได้หาผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width โดยระเบียบวิธี Reduced Differential Transform (RDTM) ในปี ค.ศ. 2018 (Lu et al., 2018) ได้หาผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width โดยระเบียบวิธี Via Mathematical

บทความวิจัยนี้จะนำเสนอระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE เพื่อหาผลเฉลยของสมการ Benney-Luke ในมิติ (1+1) เป็นสมการที่อธิบายปรากฏการณ์การแพร่กระจายของคลื่นน้ำที่มีแรงตึงผิว โดยมี α และ β เป็นพารามิเตอร์ ซึ่งอยู่ภายใต้แรงโน้มถ่วง (Mbusi et al., 2021) รูปแบบสมการคือ $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} - \beta u_{xxtt} + u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt} = 0$ และหาผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width ในมิติ (1+1) ซึ่งเป็นสมการการจำลองการแพร่กระจายของคลื่นน้ำหนึ่งมิติโดยอาศัยตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น (Abdulloev et al., 1976) มีรูปแบบสมการคือ $v_t + 3v^2 v_x - v_{xxt} = 0$

2. วิธีดำเนินการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE (Alharbi & Almatrafi, 2020) ซึ่งจะมีด้วยกัน 3 ขั้นตอน โดยเริ่มจากพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นมีรูปแบบดังสมการที่ (1)

$$P(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xt},u_{xx},...)=0 \tag{1}$$

โดยที่ P เป็นพุหนามใน $u(x,t)$ และเป็นอนุพันธ์ย่อยที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงสุดและพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นสูงสุด มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ใช้การแปลงคลื่นเคลื่อนที่ (Traveling wave) กำหนดโดยสมการที่ (2)

$$u(x,t)=u(\xi)\ ;\ \xi=x-\omega t \tag{2}$$

โดยที่ ω คือ ความเร็วคลื่น เพื่อลดรูปสมการที่ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้น (ODE) ดังสมการที่ (3)

$$P(u,-\omega u',u',\omega^2u'',u'',...)=0 \tag{3}$$

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้สมการที่ (3) มีผลเฉลย รูปแบบดังสมการที่ (4) (Yang et al., 2015; Alharbi & Almatrafi, 2020)

$$u'(\xi)=au^{2-n}+bu+cu^n \tag{4}$$

โดยที่ a,b,c และ n คือค่าคงที่ ค่าของ n ถูกกำหนดจากลักษณะของสมการที่ศึกษา โดยปกติใช้หลักการดุลยภาพระหว่างพจน์อนุพันธ์และพจน์ไม่เชิงเส้นของสมการ สำหรับสมการ Benney–Luke กำหนดให้ $n=2$ เกิดจากดุลยภาพระหว่าง u''' กับ $(u)^2$ ในขณะที่สมการ Modified Equal-Width กำหนดให้ $n=0$ เพื่อให้สมการย่อยที่ (4) มีรูปแบบง่ายและสามารถหาผลเฉลยได้สะดวก และจากสมการที่ (4) จะได้สมการที่ (5) – (6)

$$u''(\xi)=ab(3-n)u^{2-n}+a^2(2-n)u^{3-2n}+nc^2u^{2n-1}+bc(n+1)u^n+(2ac+b^2)u \tag{5}$$

$$\begin{aligned}u'''(\xi)=(&ab(3-n)(2-n)u^{1-n}+a^2(2-n)(3-2n)u^{2-2n}+n(2n-1)c^2u^{2n-2}\\&+bcn(n+1)u^{n-1}+(2ac+b^2))u'\end{aligned} \tag{6}$$

นำ u', u'' และ u''' แทนในสมการที่ (3) แก้ระบบสมการ หาค่า a,b และ c

ขั้นตอนที่ 3 ผลเฉลยของสมการที่ (3) ถูกกำหนดโดย สมการ Riccati ที่ (4) ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $n=1$ จะได้สมการที่ (7)

$$u(\xi)=\mu e^{(a+b+c)\xi} \tag{7}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $n \neq 1, b = 0$ และ $c = 0$ จะได้สมการที่ (8)

$$u(\xi) = (a(n-1)(\xi+\mu))^{\frac{1}{(n-1)}} \tag{8}$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $n \neq 1, b \neq 0$ และ $c = 0$ จะได้สมการที่ (9)

$$u(\xi) = \left(\frac{-a}{b} + \mu e^{b(n-1)\xi}\right)^{\frac{1}{(n-1)}} \tag{9}$$

กรณีที่ 4 เมื่อ $n \neq 1, a \neq 0$ และ $b^2 - 4ac < 0$ จะได้สมการที่ (10) – (11)

$$u(\xi) = \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\tan\left(\frac{(1-n)\sqrt{4ac-b^2}}{2}(\xi+\mu)\right)\right)^{\frac{1}{(1-n)}} \tag{10}$$

และ

$$u(\xi) = \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cot\left(\frac{(1-n)\sqrt{4ac-b^2}}{2}(\xi+\mu)\right)\right)^{\frac{1}{(1-n)}} \tag{11}$$

กรณีที่ 5 เมื่อ $n \neq 1, a \neq 0$ และ $b^2 - 4ac > 0$ จะได้สมการที่ (12) – (13)

$$u(\xi) = \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\coth\left(\frac{(1-n)\sqrt{b^2-4ac}}{2}(\xi+\mu)\right)\right)^{\frac{1}{(1-n)}} \tag{12}$$

และ

$$u(\xi) = \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\tanh\left(\frac{(1-n)\sqrt{b^2-4ac}}{2}(\xi+\mu)\right)\right)^{\frac{1}{(1-n)}} \tag{13}$$

กรณีที่ 6 เมื่อ $n \neq 1, a \neq 0$ และ $b^2 - 4ac = 0$ จะได้สมการที่ (14)

$$u(\xi)=\left(\frac{1}{a(n-1)(\xi+\mu)}-\frac{b}{2a}\right)^{\frac{1}{(1-n)}} \tag{14}$$

เมื่อ μ คือค่าคงที่

3. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

3.1 ผลเฉลยของสมการ Benney-Luke ในมิติ (1+1) โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE

สมการ Benney-Luke ในมิติ (1+1) รูปแบบสมการดังสมการที่ (15)

$$u_{tt}-u_{xx}+\alpha u_{xxxx}-\beta u_{xxtt}+u_t u_{xx}+2u_x u_{xt}=0 \tag{15}$$

โดยที่ α และ β เป็นพารามิเตอร์ ต่อไปใช้การแปลงคลื่นเคลื่อนที่ดังสมการที่ (16)

$$u(x,t)=u(\xi);\xi=x-\omega t \tag{16}$$

เพื่อลดรูปสมการที่ (15) จากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญย่อยไม่เชิงเส้น เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น ดังสมการที่ (17)

$$(\omega^2-1)u'+(\alpha-\beta\omega^2)u'''-3\omega\frac{(u')^2}{2}=0 \tag{17}$$

นำสมการที่ (4) และสมการที่ (6) แทนในสมการที่ (17) จะได้ดังสมการที่ (18)

$$\begin{aligned}&\left(\omega^2-1\right)\left(au^{2-n}+bu+cu^n\right)+\left(\alpha-\beta\omega^2\right)(ab(3-n)(2-n)u^{1-n}+a^2(2-n)(3-2n)u^{2-2n}\\&+n(2n-1)c^2u^{2n-2}+bcn(n+1)u^{n-1}+(2ac+b^2))u'-3\omega(\frac{a^2u^{4-2n}}{2}+abu^{3-n}+bcu^{n+1}+acu^2\\&+\frac{c^2u^{2n}}{2}+\frac{b^2u^2}{2})=0\end{aligned} \tag{18}$$

กำหนดให้ $n=2$ จะได้ดังสมการที่ (19)

$$\begin{aligned}&\left(\omega^2 a-a+2\alpha a^2c+\alpha ab^2-2\beta\omega^2a^2c-\beta\omega^2ab^2-\frac{3\omega a^2}{2}\right)\\&+\left(\omega^2b-b+\alpha b^3+8\alpha abc-8\beta\omega^2abc-\beta\omega^2b^3-3\omega ab\right)u\\&+\left(\omega^2c-c+8\alpha ac^2+7\alpha b^2c-8\beta\omega^2ac^2-7\beta\omega^2b^2c-3\omega ac-\frac{3\omega b^2}{2}\right)u^2\\&+\left(12\alpha bc^2-12\beta\omega^2bc^2-3\omega bc\right)u^3+\left(6\alpha c^3-6\beta\omega^2c^3-\frac{3\omega c^2}{2}\right)u^4=0\end{aligned} \tag{19}$$

จากสมการที่ (19) เทียบสัมประสิทธิ์ของ $u^i(i=0,1,2,3,4)$ กับศูนย์ จะได้ดังสมการที่ (20) – (24)

$$\omega^2 a-a+2\alpha a^2c+\alpha ab^2-2\beta\omega^2a^2c-\beta\omega^2ab^2-\frac{3\omega a^2}{2}=0 \tag{20}$$

$$\omega^2b-b+\alpha b^3+8\alpha abc-8\beta\omega^2abc-\beta\omega^2b^3-3\omega ab=0 \tag{21}$$

$$\omega^2c-c+8\alpha ac^2+7\alpha b^2c-8\beta\omega^2ac^2-7\beta\omega^2b^2c-3\omega ac-\frac{3\omega b^2}{2}=0 \tag{22}$$

$$12\alpha bc^2-12\beta\omega^2bc^2-3\omega bc=0 \tag{23}$$

$$6\alpha c^3-6\beta\omega^2c^3-\frac{3\omega c^2}{2}=0 \tag{24}$$

จากการแก้สมการที่ (20) - (24) จะได้คำตอบดังสมการที่ (25) – (27)

$$b=0 \tag{25}$$

$$ac=\frac{\omega^2-1}{4\left(\alpha-\beta\omega^2\right)} \tag{26}$$

$$a=\frac{\omega^2-1}{\omega} \tag{27}$$

จากหัวข้อที่ 2 ในขั้นตอนที่ 3 จะได้ผลเฉลยของสมการ Benney-Luke ตรงตามกรณีที่ 4 และ 5 ดังนี้

กรณีที่ 4 เมื่อ $\frac{\omega^2-1}{4\left(\alpha-\beta\omega^2\right)}>0$ นำสมการที่ (25)-(27) แทนในสมการที่ (10)-(11) จะได้ผล

เฉลยของสมการที่ (15) ดังสมการที่ (28) – (29)

$$u_1(x,t)=\left(\frac{\omega\sqrt{\omega^2-1}}{2\left(1-\omega^2\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\tan\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1} \quad (28)$$

และ

$$u_2(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{\omega^2-1}}{2\left(1-\omega^2\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\cot\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1} \quad (29)$$

เมื่อ μ คือค่าคงที่

กรณีที่ 5 เมื่อ $\dfrac{\omega^2-1}{4\left(\alpha-\beta\omega^2\right)}<0$ นำสมการที่ (25)-(27) แทนในสมการที่ (12)-(13) จะได้ผล

เฉลยของสมการที่ (15) ดังสมการที่ (30) – (31)

$$u_3(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}\left(1-\omega^2\right)}\tanh\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1} \quad (30)$$

และ

$$u_4(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{1-\omega^2}}{2\left(1-\omega^2\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\coth\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1} \quad (31)$$

เมื่อ μ คือค่าคงที่

3.2 ผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width ในมิติ (1+1) โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE

สมการ modified equal-width ในมิติ (1+1) รูปแบบสมการดังสมการที่ (32)

$$v_t+3v^2v_x-v_{xxt}=0 \quad (32)$$

ต่อไปใช้การแปลง traveling wave ดังสมการที่ (33)

$$v(x,t)=v(\xi)\ ;\ \xi=x-\omega t \quad (33)$$

เพื่อลดรูปสมการที่ (32) จากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญย่อยไม่เชิงเส้น เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นดังสมการที่ (34)

$$\omega v'' + v^3 - \omega v = 0 \tag{34}$$

นำสมการที่ (5) แทนในสมการที่ (34) จะได้ดังสมการที่ (35)

$$\omega(ab(3-n)v^{2-n} + a^2(2-n)v^{3-2n} + nc^2v^{2n-1} + bc(n+1)v^n + (2ac+b^2)v) + v^3 - \omega v = 0 \tag{35}$$

กำหนดให้ $n = 0$ จะได้สมการที่ (36)

$$\omega bc + \left(2\omega ac + \omega b^2 - \omega\right)v + 3\omega abv^2 + \left(2\omega a^2 + 1\right)v^3 = 0 \tag{36}$$

จากสมการที่ (36) เทียบสัมประสิทธิ์ของ $v^i (i = 0,1,2,3)$ กับศูนย์ จะได้คำตอบดังสมการที่ (37) – (40)

$$\omega bc = 0 \tag{37}$$

$$2\omega ac + \omega b^2 - \omega = 0 \tag{38}$$

$$3\omega ab = 0 \tag{39}$$

$$2\omega a^2 + 1 = 0 \tag{40}$$

จากการแก้สมการที่ (37) - (40) จะได้ผลเฉลยดังสมการที่ (41) – (43)

$$b = 0 \tag{41}$$

$$ac = \frac{1}{2} \tag{42}$$

$$a = \pm\sqrt{-\frac{1}{2\omega}} \tag{43}$$

จากหัวข้อที่ 2 ในขั้นตอนที่ 3 จะได้ผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width ตรงตามกรณีที่ 4 ดังนี้

กรณีที่ 4 เมื่อ $a = \pm\sqrt{-\frac{1}{2\omega}}$ และ $ac = \frac{1}{2}$ นำสมการที่ (41)-(43) แทนในสมการที่ (10)-(11)

จะได้ผลเฉลยของสมการที่ (32) ดังสมการที่ (44) – (47)

$$v_1(x,t)=\left(\sqrt{-\omega}\tan\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right) \tag{44}$$

$$v_2(x,t)=\left(-\sqrt{-\omega}\tan\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right) \tag{45}$$

และ

$$v_3(x,t)=\left(\sqrt{-\omega}\cot\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right) \tag{46}$$

$$v_4(x,t)=\left(-\sqrt{-\omega}\cot\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right) \tag{47}$$

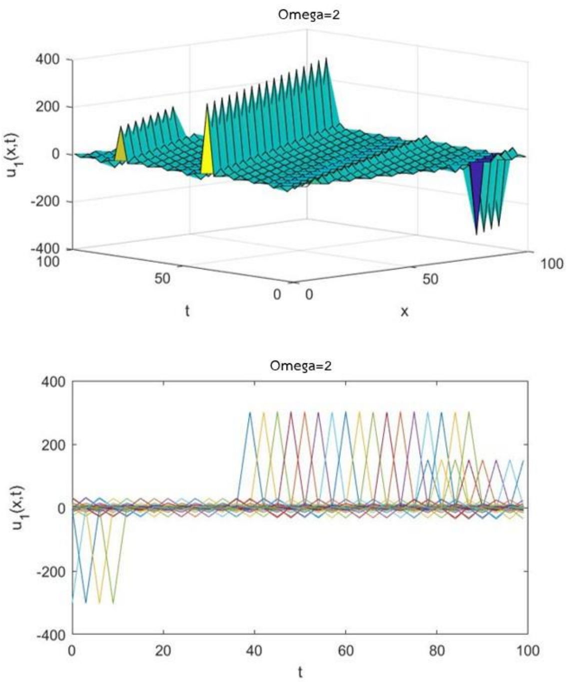
เมื่อ μ คือค่าคงที่

3.3 กราฟผลเฉลย ของสมการ Benney-Luke ในมิติ (1+1) โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE

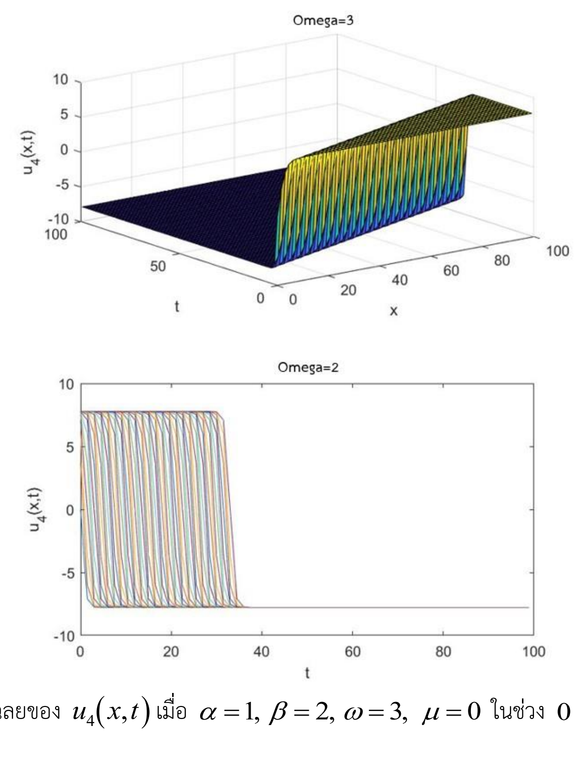
กราฟผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการ Benney-Luke โดยระเบียบวิธี Riccati Bernoulli sub-ODE จะมีผลเฉลย 2 รูปแบบ คือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก สมการที่ (28) - (29) ซึ่งสามารถสร้างกราฟผลเฉลยในรูปแบบคาบ (Periodic wave) เมื่อกำหนด $\alpha = 5, \beta = 1, \omega = 2, \mu = 0$ ในช่วง $0 \leq x, t \leq 100$ ดังรูปที่ 1 และสมการที่ (30) - (31) ซึ่งสามารถสร้างกราฟผลเฉลยในรูปหงิกงอ (King wave) เมื่อ กำหนด $\alpha = 1, \beta = 2, \omega = 3, \mu = 0$ ในช่วง $0 \leq x, t \leq 100$ ดังรูปที่ 2

3.4 กราฟผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width ในมิติ (1+1) โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE

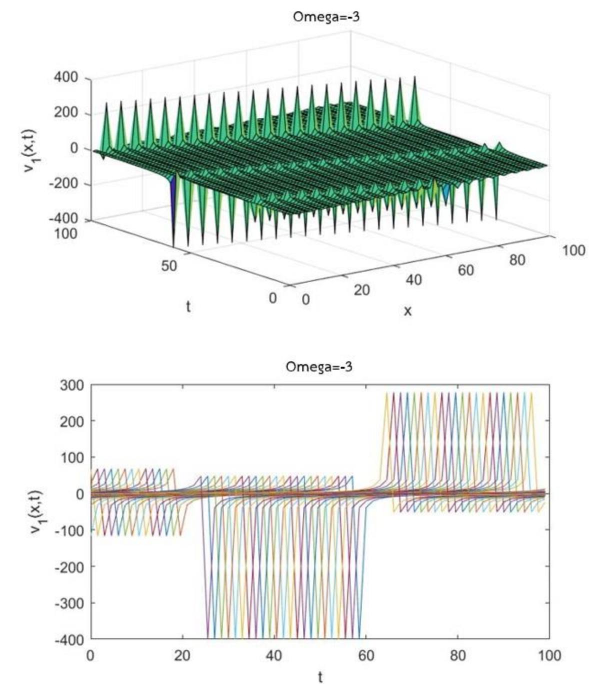
กราฟผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการ Modified Equal-Width โดยระเบียบวิธี Riccati Bernoulli sub-ODE จะมีผลเฉลยรูปแบบฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยสมการที่ (44) - (47) สามารถสร้างกราฟผลเฉลยในรูปแบบคาบ เมื่อกำหนด $\omega = -3, \mu = 0$ ในช่วง $0 \leq x, t \leq 100$ ดังรูปที่ 3 และ 4



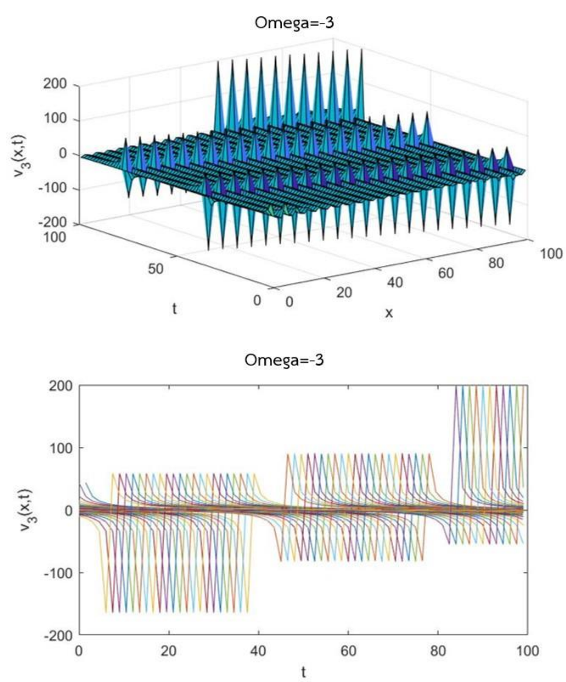
รูปที่ 1. กราฟผลเฉลยของ $u_1(x,t)$ เมื่อ $\alpha = 5,\ \beta = 1,\ \omega = 2,\ \mu = 0$ ในช่วง $0 \le x, t \le 100$



รูปที่ 2. ผลเฉลยของ $u_4(x,t)$ เมื่อ $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \omega = 3,\ \mu = 0$ ในช่วง $0 \le x, t \le 100$



รูปที่ 3. ผลเฉลยของ $v_1(x,t)$ เมื่อ $\omega=-3,\ \mu=0$ ในช่วง $0\le x,t\le 100$



รูปที่ 4. ผลเฉลยของ $v_3(x,t)$ เมื่อ $\omega=-3,\ \mu=0$ ในช่วง $0\le x,t\le 100$

3.5 การเปรียบเทียบผลเฉลย

การเปรียบเทียบผลเฉลยของสมการ Benney-Luke ระหว่างระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE กับ ระเบียบวิธี Modified Simple Equation (Akter & Akbar, 2015) ดังตารางที่ 1 และแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width ระหว่างระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE กับระเบียบวิธี Exp$\left(-\varphi\left(\xi\right)\right)$ expansion (Lu et al., 2018) ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 1. การเปรียบเทียบผลเฉลยของสมการ Benney-Luke ระหว่างระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE และระเบียบวิธี modified simple equation

ระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE	ระเบียบวิธี Modified Simple Equation
$u_1(x,t)=\left(\frac{\omega\sqrt{\omega^2-1}}{2\left(1-\omega^2\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\tan\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}(x-\omega t+\mu)\right)\right)^{-1}$	$u_1(x,t)=A_0\mp\frac{2\sqrt{1-V^2}\sqrt{\alpha-\beta V^2}}{V}\left(1\pm\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-V^2}{\alpha-\beta V^2}}(x-Vt)\right)\right)$
$u_2(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{\omega^2-1}}{2\left(1-\omega^2\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\cot\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}(x-\omega t+\mu)\right)\right)^{-1}$	$u_2(x,t)=A_0\mp\frac{2\sqrt{1-V^2}\sqrt{\alpha-\beta V^2}}{V}\left(1\pm\coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-V^2}{\alpha-\beta V^2}}(x-Vt)\right)\right)$
$u_3(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}\left(1-\omega^2\right)}\tanh\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}(x-\omega t+\mu)\right)\right)^{-1}$	$u_3(x,t)=A_0\mp\frac{2\sqrt{1-V^2}\sqrt{\alpha-\beta V^2}}{V}\left(1\mp i\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-V^2}{\alpha-\beta V^2}}(x-Vt)\right)\right)$
$u_4(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{1-\omega^2}}{2\left(1-\omega^2\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\coth\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}(x-\omega t+\mu)\right)\right)^{-1}$	$u_4(x,t)=A_0\mp\frac{2\sqrt{1-V^2}\sqrt{\alpha-\beta V^2}}{V}\left(1\mp i\cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-V^2}{\alpha-\beta V^2}}(x-Vt)\right)\right)$

จากตารางที่ 1 พบว่า ผลเฉลยของสมการ Benney-Luke โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE และระเบียบวิธี Modified Simple Equation จะได้มาในรูปของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกและฟังก์ชันตรีโกณมิติเช่นเดียวกัน แต่ผลเฉลยโดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE สามารถแสดงในรูปแบบที่ง่ายกว่าระเบียบวิธี Modified Simple Equation

ตารางที่ 2. การเปรียบเทียบผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width ระหว่างระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE และระเบียบวิธี Exp$\left(-\varphi\left(\xi\right)\right)$ expansion (Lu et al., 2018)

ระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE	ระเบียบวิธี Exp$\left(-\varphi\left(\xi\right)\right)$ expansion
$v_1(x,t)=\left(\sqrt{-\omega}\tan\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right)$	$U_{11}(\xi)=a_0+\frac{4a_0\mu}{\lambda\left(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)-\lambda\right)\right)}$
$v_2(x,t)=\left(-\sqrt{-\omega}\tan\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right)$	$U_{22}(\xi)=a_0+\frac{2a_0}{\left(\exp\left(\lambda\left(\xi+\xi_0\right)\right)-1\right)}$
$v_3(x,t)=\left(\sqrt{-\omega}\cot\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right)$	$U_{33}(\xi)=a_0+\frac{4a_0\mu}{\lambda\left(-\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\xi+\xi_0\right)-\lambda\right)\right)}$
$v_4(x,t)=\left(-\sqrt{-\omega}\cot\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right)$	

จากตารางที่ 2 พบว่า ผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE จะได้มาในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีจำนวนทั้งสิ้น 4 ผลเฉลย โดยระเบียบวิธี Exp $\left(-\varphi(\xi)\right)$ expansion จะได้มาในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก และฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีจำนวนทั้งสิ้น 3 ผลเฉลย นอกจากนั้นจะสังเกตเห็นได้ชัดว่า ผลเฉลยของสมการ Modified Equal-Width โดยระเบียบวิธี Riccati-Bernoulli sub-ODE สามารถแสดงในรูปแบบที่ง่ายกว่าระเบียบวิธี Exp$\left(-\varphi(\xi)\right)$ expansion

4. สรุปผลการวิจัย

บทความวิจัยใช้ระเบียบวิธี Riccati–Bernoulli sub-ODE เพื่อหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ (traveling wave) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น 2 สมการ คือ สมการ Benney-Luke ในมิติ (1+1) มีผลเฉลยดังนี้

$$u_1(x,t)=\left(\frac{\omega\sqrt{\omega^2-1}}{2\left(\omega^2-1\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\tan\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1}$$

$$u_2(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{\omega^2-1}}{2\left(\omega^2-1\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\cot\left(\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1}$$

$$u_3(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{1-\omega^2}}{2\left(\omega^2-1\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1}$$

$$u_4(x,t)=\left(-\frac{\omega\sqrt{1-\omega^2}}{2\left(\omega^2-1\right)\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\coth\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{2\sqrt{\alpha-\beta\omega^2}}\left(x-\omega t+\mu\right)\right)\right)^{-1}$$

และสมการ Modified Equal-Width ในมิติ (1+1) มีผลเฉลยดังนี้

$$v_1(x,t)=\left(\sqrt{-\omega}\tan\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right)$$

$$v_2(x,t)=\left(-\sqrt{-\omega}\tan\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2}\right)\right)$$

$$v_3(x,t) = \left(\sqrt{-\omega}\cot\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2} \right) \right)$$

$$v_4(x,t) = \left(-\sqrt{-\omega}\cot\left(\frac{\sqrt{2}\left(x-\omega t+\mu\right)}{2} \right) \right)$$

การดำเนินงานวิจัยครั้งนี้เป็นการหาผลเฉลยของสมการ Benney-Luke และสมการ Modified Equal-Width ซึ่งทั้งสองเป็นสมการที่อธิบายปรากฏการณ์การแพร่กระจายของคลื่นน้ำ จากผลการวิจัยสามารถสรุปได้ว่า การกระจายของคลื่นน้ำของสมการ Benney-Luke นั้นเป็นคลื่นประเภทคาบและหงิกงอ สมการ Modified Equal-Width เป็นคลื่นประเภทคาบแสดงดังรูปที่ 1-4

การหาผลเฉลยคลื่นเคลื่อนที่ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นสามารถใช้ระเบียบวิธี Riccati–Bernoulli sub-ODE ได้ โดยมีขั้นตอนระเบียบวิธีที่ไม่ยุ่งยากและไม่ซับซ้อน มีเพียง 3 ขั้นตอนเท่านั้น อีกทั้งผลเฉลยที่ได้มาโดยระเบียบวิธี Riccati–Bernoulli sub-ODE สามารถตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยได้

เอกสารอ้างอิง (References)

Abdel-Gawad, H. I., Tantawy, M., & Abdelwahab, A. M. (2023). A new technique for solving Burgers-Kadomtsev-Petviashvili equation with an external source. Suppression of wave breaking and shock wave. *Alexandria Engineering Journal*, *69*, 167-176. https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.12.022

Abdulloev, K. O., Bogolubsky, I. L., & Makhankov, V. G. (1976). One more example of inelastic soliton interaction. *Physics Letters A*, *56*(6), 427-428. https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90714-3

Abraham-Shrauner, B. (2018). Analytic solutions of nonlinear partial differential equations by the power index method. *Symmetry*, *10*(3), 76. https://doi.org/10.3390/sym10030076

Akter, J., & Akbar, M. A. (2015). Exact solutions to the Benney–Luke equation and the Phi-4 equations by using modified simple equation method. *Results in Physics*, *5*, 125-130. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2015.01.008

Alharbi, A. R., & Almatrafi, M. B. (2020). Riccati–Bernoulli sub-ODE approach on the partial differential equations and applications. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, *15*(1), 367-388. https://future-in-tech.net/15.1/R-Almatrafi.pdf

Arora, R., Siddiqui, M. J., & Singh, V. (2012). Solution of the modified equal width equation, its variant, and non-homogeneous Burgers' equation by RDT method. *American*

Journal of Computational and Applied Mathematics, 1(2), 53–56. http://article.sapub.org/10.5923.j.ajcam.20110102.10.html

Gundogdu, H., & Gozukizil, O. F. (2021). On the new type of solutions to Benney-Luke equation. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, *39*(5), 103-111. https://doi.org/10.5269/bspm.41244

Hossain, A. K. S., & Akbar, M. A. (2021). Traveling wave solutions of the Benney–Luke equation via the enhanced (G′/G)-expansion method. *Ain Shams Engineering Journal, 12*(4), 4181–4187. https://doi.org/10.1016/j.asej.2017.03.018

Khan, K., & Akbar, M. A. (2014). Exact solutions of the (2+1)-dimensional cubic Klein–Gordon equation and the (3+1)-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation using the modified simple equation method. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, *15*, 74-81. https://doi.org/10.1016/j.jaubas.2013.05.001

Lu, D., Seadawy, A. R., & Ali, A. (2018). Dispersive traveling wave solutions of the equal-width and modified equal-width equations via mathematical methods and its applications. *Results in Physics*, *9*, 313-320. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.02.036

Mbusi, S. O., Muatjetjeja, B., & Adem, A. R. (2021). Lagrangian formulation, conservation laws, travelling wave solutions: A generalized Benney–Luke equation. *Mathematics*, *9*(13), Article 1480. https://doi.org/10.3390/math9131480

Nofal, T. A. (2016). Simple equation method for nonlinear partial differential equations and its applications. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, *24*(2), 204-209. https://doi.org/10.1016/j.joems.2015.05.006

Sanjun, J., Aphaisawat, W., & Korkiatsakul, T. (2024a). Effect of wave solution on Landau–Ginzburg–Higgs equation and modified KdV–Zakharov equation by the Riccati–Bernoulli sub-ODE method. *Journal of Applied Science and Emerging Technology, 23*(1), Article e253520. https://doi.org/10.14416/JASET.KMUTNB.2024.01.002

Sanjun, J., Muenduang, K., & Phoosree, S. (2024b). Wave solutions to the combined KdV-mKdV equation via two methods with the Riccati equation. *Journal of Applied Science and Emerging Technology*, *23*(2), Article e256328. https://doi.org/10.14416/JASET.KMUTNB.2024.02.003

Sanjun, J., & Chankaew, A. (2022). Wave solutions of the DMBBM equation and the cKG equation using the simple equation method. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, *8*, Article e952668. https://doi.org/10.3389/fams.2022.952668

Yang, X. F., Deng, Z. C., & Wei, Y. (2015). A Riccati–Bernoulli sub-ODE method for nonlinear partial differential equations and its application. *Advances in Difference Equations, 2015*, Article e117. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0452-4

Zhang, Q., Xiong, M., & Chen, L. (2020). Exact solutions of two nonlinear partial differential equations by the first integral method. *Advances in Pure Mathematics*, *10*(1), 12-20. https://doi.org/10.4236/apm.2020.101002