

เกมย้าย (k, m) -หมาก เมื่อ $(k, m) \in \{(1, 2n + 1), (2, 2n + 8), (3, 4n + 5), (3, 4n + 7)\}$

Game of moving (k, m) -pieces where $(k, m) \in \{(1, 2n + 1), (2, 2n + 8), (3, 4n + 5), (3, 4n + 7)\}$

รตินันท์ บุญเคลือบ¹ รอฮานา สะแม² และ ปิ่นแก้ว ศิริวงศ์^{2*}

Ratinan Boonklurb¹ Rohana Samae² and Pinkaew Siriwong^{2*}

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพฯ ประเทศไทย

²หลักสูตรคณิตศาสตร์และการจัดการข้อมูล คณะวิทยาศาสตร์และนวัตกรรมดิจิทัล มหาวิทยาลัยทักษิณ จ.พัทลุง ประเทศไทย

¹Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand

²Mathematics and Data Management Program, Faculty of Science and Digital Innovation, Thaksin University, Phatthalung, Thailand

วันที่ส่งบทความ : 23 ธันวาคม 2567 วันที่แก้ไขบทความ : 12 พฤศจิกายน 2568 วันที่ตอบรับบทความ : 14 พฤศจิกายน 2568

Received: 23 December 2024, Revised: 12 November 2025, Accepted: 14 November 2025

บทคัดย่อ

ให้ m และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m \geq k$ เกมย้าย (k, m) -หมาก เป็นเกมสำหรับผู้เล่น 1 คน โดยมีหมาก 2 สี เป็นจำนวน $m - k$ ตัว แต่ละสีจะมีจำนวนเท่ากัน บนกระดานขนาด $1 \times m$ เมื่อเริ่มต้นเกมจะวางหมากสีที่หนึ่งจากช่องทางขวามือไปช่องทางซ้ายมือเรื่อย ๆ จนครบแล้วตามด้วยหมากสีที่สองจนครบทุกตัว ผู้เล่นจะต้องย้ายหมากครั้งละ k ตัว ที่อยู่ติดกันไปวางที่ช่องว่างเรื่อย ๆ จนได้ผลลัพธ์เป็นหมากที่สลับสีกันตั้งแต่ช่องแรกทางซ้ายมือเป็นต้นไป จากการศึกษาเกมดังกล่าว สามารถคำนวณจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายหมากภายใต้กฎกติกาได้ดังนี้ ให้ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า 1) เมื่อ $(k, m) = (1, 2n + 1)$ จะย้ายหมากเพียง $2n - 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ครั้ง 2) เมื่อ $(k, m) = (2, 2n + 8)$ จะย้ายหมากเพียง $2n + 3$ ครั้ง 3) เมื่อ $(k, m) = (3, 4n + 5)$ จะย้ายหมากเพียง $4n - 1$ ครั้ง และ 4) เมื่อ $(k, m) = (3, 4n + 7)$ จะย้ายหมากเพียง $4n + 2$ ครั้ง

คำสำคัญ : กระดาน หมาก เกมย้ายหมาก

Abstract

Let m and k be positive integers such that $m \geq k$. The game of moving (k, m) -pieces is a one-player game on a $1 \times m$ board involving two colors of pieces, with a total

*ที่อยู่ติดต่อ Email address: pinkaew.s@tsu.ac.th

<https://doi.org/10.55003/scikmitl.2025.265764>

of $m - k$ pieces. Each color has an equal number of pieces. At the beginning, all first color pieces are placed from the rightmost to the leftmost followed by all second color pieces. The goal of this game is to move k consecutive pieces to the empty spaces on the board until the pieces are arranged in alternative colors placed from the leftmost position onward. In this study, for any positive integer $n \geq 1$, we obtain 1) when $(k, m) = (1, 2n + 1)$, the minimum number of moving is $2n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 2) when $(k, m) = (2, 2n + 8)$, the minimum number of moving is $2n + 3$ 3) when $(k, m) = (3, 4n + 5)$, the minimum number of moving is $4n - 1$ and 4) when $(k, m) = (3, 4n + 7)$, the minimum number of moving is $4n + 2$.

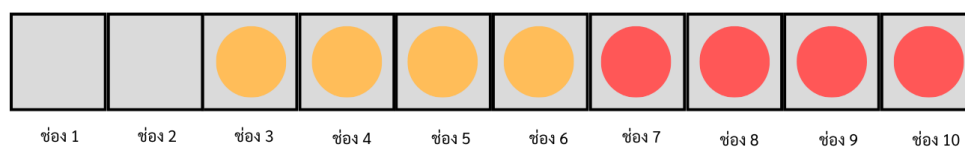
Keywords: Board, Piece, Game of moving pieces

1. บทนำ

เกมกระดานและหมากเป็นเกมหรือการละเล่นที่มักจะประกอบด้วย กระดาน 1 ชิ้นและหมากจำนวนหนึ่งในการเล่น ซึ่งสามารถเล่นคนเดียว เล่นเป็นคู่ หรือเล่นเป็นทีมก็ได้ เช่น โอเอ็กซ์ ซูโดกุ และหมากรุก เป็นต้น ปัจจุบันมีการศึกษาโครงสร้างคณิตศาสตร์ของเกมกระดานและหมาก โดยสามารถแบ่งประเภทตามอุปกรณ์ที่ใช้ในการเล่น ได้แก่ 1) เกมกระดานที่เป็นรูปแบบกระดานและดินสอ เช่น โอเอ็กซ์ (Garg & Nayak, 2017; Beeler, 2018) หรือซูโดกุ (Felgenhauer & Jarvis, 2006; Russell & Jarvis, 2007; Herzberg & Murty, 2007) เป็นต้น และ 2) เกมกระดานที่ใช้ตัวหมาก คิง ควีน รุก บิชอป ม้า และเบี้ย นั่นคือ หมากรุกสากล (Murray, 1902; Schwenk, 1991; Demaio, 2007; Demaio & Bindia, 2011; Srichote et al., 2020; Singhun et al., 2021)

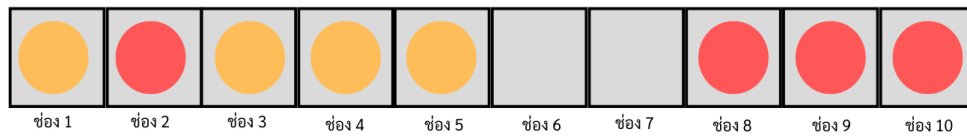
เกมไปไหนไปคู่ (Awachai, 2023) เป็นเกมกระดานและหมากที่ใช้ตัวหมากรูปวงกลมในการเล่น สามารถฝึกทักษะการคิดวิเคราะห์ และกระตุ้นการพัฒนาสมองให้คิดอย่างเป็นระบบ โดยมีการนำไปใช้ในการจัดนิทรรศการในงานมหกรรมวิทยาศาสตร์ต่าง ๆ ซึ่งมีกติกาการเล่นเกมไปไหนไปคู่แบบ 10 ช่อง ดังนี้

1) จัดหมาก 8 ตัว ดังรูปที่ 1



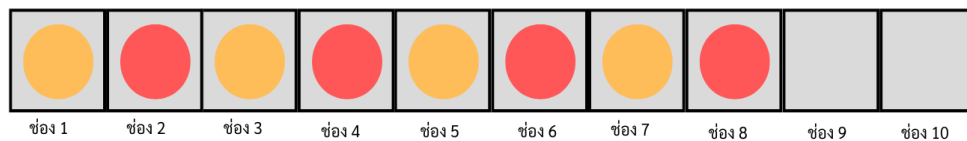
รูปที่ 1. การจัดหมาก 8 ตัวบนกระดานแบบ 10 ช่อง

2) ย้ายหมากครั้งละ 2 ตัว ที่อยู่ติดกันคู่ใดคู่หนึ่ง ไปยังช่องว่างในตาราง ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2. การย้ายหมากครั้งละ 2 ตัว ที่อยู่ติดกันคู่ใดคู่หนึ่ง โดยย้ายหมากสีเหลืองช่อง 6 และหมากสีแดงช่อง 7 ไปยังช่อง 1 และช่อง 2 ตามลำดับ

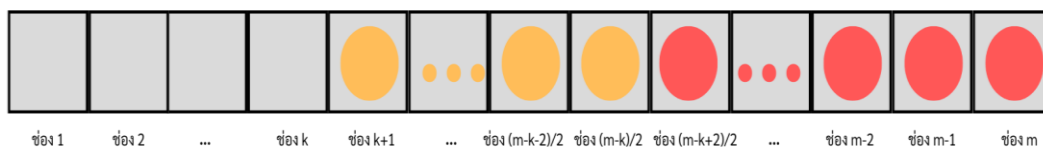
3) ทำตามข้อ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งมีผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสักัน ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3. ผลลัพธ์สุดท้ายเกมไปไหนไปไหนคู่บนกระดานแบบ 10 ช่อง

จากกติกาการเล่นเกมไปไหนไปไหน คู่ผู้วิจัยจึงปรับเปลี่ยนเป็นเกมย้าย (k, m) -หมาก ซึ่งมีกติกาการเล่นคล้ายคลึงกับเกมไปไหนไปไหน โดยย้ายหมากครั้งละ k ตัว บนกระดานขนาด $1 \times m$ หรือ m ช่อง ดังนี้ กำหนดให้ m และ k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m \geq k$ เกมย้าย (k, m) -หมาก เป็นเกมที่ประกอบด้วยหมาก 2 สี ทั้งหมด $m - k$ ตัว โดยแต่ละสีจะมีจำนวนเท่ากันบนกระดานขนาด $1 \times m$ โดยสมมติว่า หมาก 2 สี ดังกล่าวเป็นหมากสีเหลืองและหมากสีแดง ซึ่งมีกติกาการเล่นดังต่อไปนี้

1) จัดหมากทั้ง 2 สี โดยมีช่องว่างทางซ้ายมือจำนวน k ช่อง ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4. การจัดหมาก $m - k$ ตัวบนกระดานขนาด $1 \times m$

2) ย้ายหมากครั้งละ k ตัว ที่อยู่ติดกัน ไปยังช่องว่างในตาราง ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 .การย้ายหมากครั้งละ k ตัวที่อยู่ติดกัน โดยย้ายหมากสีเหลืองช่อง $(m - k - 2(k - 2))/2$ จนถึงช่อง $(m - k)/2$ ไปยังช่อง 1 จนถึงช่อง $k - 1$ ตามลำดับ และย้ายหมากสีแดงช่อง $(m - k + 2)/2$ ไปยังช่อง k

3) ทำตามข้อ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งมีผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6. ผลลัพธ์สุดท้ายของเกมย้าย (k, m) -หมาก

งานวิจัยนี้ศึกษาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายหมากของเกมย้าย (k, m) -หมาก เมื่อ $(k, m) \in \{(1, 2n + 1), (2, 2n + 8), (3, 4n + 5), (3, 4n + 7)\}$ ที่สอดคล้องกับกติกาวิธีการเล่นเกมดังกล่าว

2. วิธีการดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายหมากของเกมย้าย (k, m) -หมาก โดยมีขั้นตอนการดำเนินการทั้งหมด 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

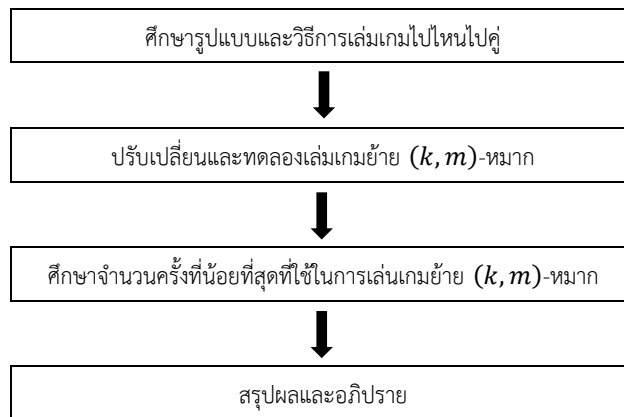
- 1) ศึกษารูปแบบและวิธีการเล่นเกมไปไหนไปคู่
- 2) ปรับเปลี่ยนและทดลองเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก เพื่อสังเกตและค้นหารูปแบบการย้ายหมาก

บนกระดานแต่ละขนาด โดยแบ่งเป็นขั้นตอนย่อย 4 ขั้นตอน ดังนี้

- 2.1) ทดลองเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก และสังเกตรูปแบบการย้าย
- 2.2) บันทึกวิธีการเล่นและจำนวนครั้งในการเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก แต่ละรอบ
- 2.3) ขยายขนาดกระดานและปรับเปลี่ยนรูปแบบการเล่นให้หลากหลาย
- 2.4) ทำซ้ำแต่ละขั้นตอนจนได้รูปแบบการย้ายหรือวิธีการเล่นที่ชัดเจน

3) นำข้อสังเกตจากขั้นตอนที่ 2 มาศึกษาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก โดยอาศัยหลักการนับเบื้องต้น และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

4) สรุปผลและอภิปรายผลของจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก ในรูปของ n โดยขึ้นอยู่กับขนาดของกระดานและจำนวนหมากในการย้ายแต่ละครั้ง ซึ่งมีแผนผังแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7. แผนผังแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

3. ผลการวิจัยและอภิปรายผล

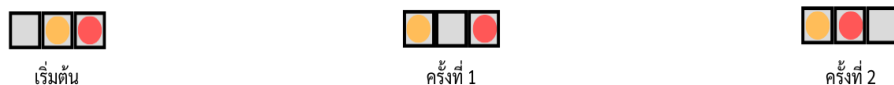
จากการศึกษารูปแบบและวิธีการเล่นของการย้ายหมาก สามารถสังเกตเห็นรูปแบบในการเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก บนกระดานที่มีขนาดใหญ่ขึ้นได้ ดังนี้

3.1 เกมย้าย $(1, 2n + 1)$ -หมาก

เป็นเกมที่ต้องการย้ายหมากครั้งละ 1 ตัว ไปยังช่องว่างบนกระดานขนาด $1 \times (2n + 1)$ โดยจะพิจารณาตัวอย่างการย้ายหมากบนกระดาน $1 \times m$ เมื่อ $m = 3, 5, 7$ และ 9 เพื่อสังเกตรูปแบบวิธีการเล่นและจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้าย

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาการย้ายหมากครั้งละ 1 ตัว บนกระดานแต่ละขนาด

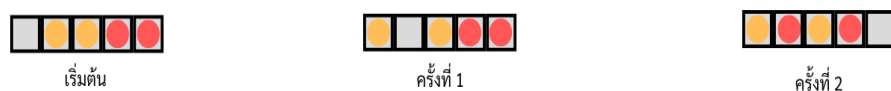
1) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×3 ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8. เกมย้าย $(1,3)$ -หมาก

จากรูปที่ 8 จะเห็นได้ว่า การย้ายหมากดังข้างต้นสามารถย้ายหมากจำนวน 2 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

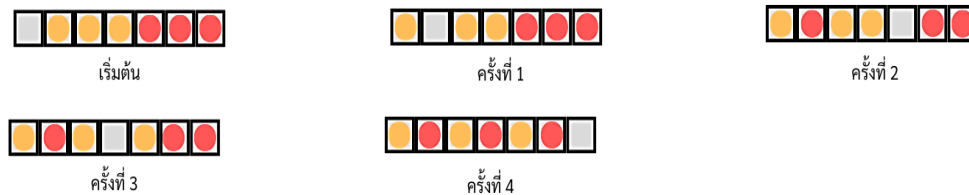
2) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×5 ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9. เกมย้าย $(1,5)$ -หมาก

จากรูปที่ 9 จะเห็นได้ว่า การย้ายหมากข้างต้นสามารถย้ายหมากจำนวน 2 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

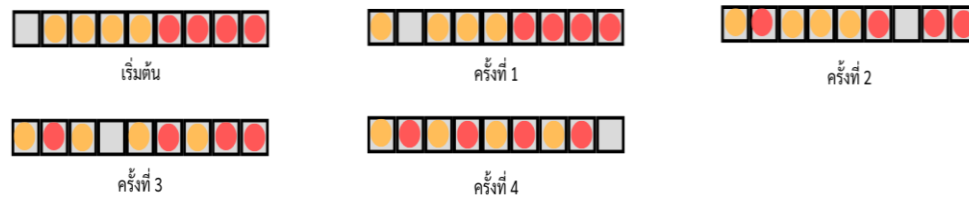
3) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×7 ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10. เกมย้าย (1,7)-หมาก

จากรูปที่ 10 จะเห็นได้ว่า การย้ายหมากข้างต้นสามารถย้ายหมากจำนวน 4 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

4) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×9 ดังรูปที่ 11



รูปที่ 11. เกมย้าย (1,9)-หมาก

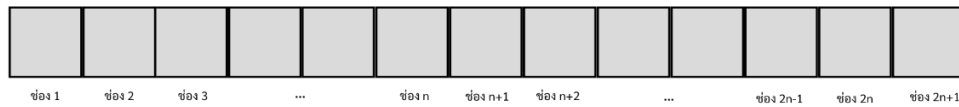
จากรูปที่ 11 จะเห็นได้ว่า การย้ายหมากข้างต้นสามารถย้ายหมากจำนวน 4 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

จากการสังเกตตัวอย่างที่ 1 ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(1, 2n + 1)$ -หมาก เท่ากับ $2n - 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ครั้ง

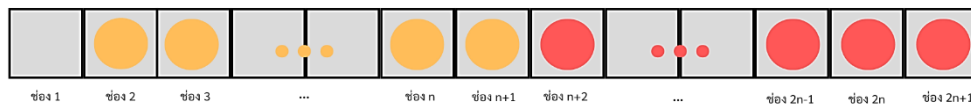
พิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม

พิจารณากระดานขนาด $1 \times (2n + 1)$ โดยกำหนดให้ช่องแรกจากทางซ้ายมือสุดเป็นช่อง 1 ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12. ช่องบนกระดานขนาด $1 \times (2n + 1)$

เริ่มต้นเกม วางหมากสีเหลืองตั้งแต่ช่อง 2 จนถึงช่อง $n + 1$ และวางหมากสีแดงตั้งแต่ช่อง $n + 2$ จนถึงช่อง $2n + 1$ ดังรูปที่ 13



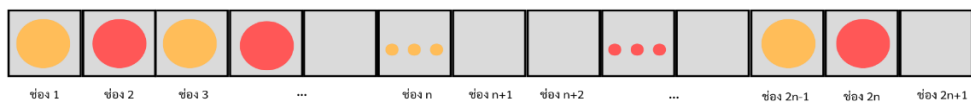
รูปที่ 13. เริ่มต้นเกมย้าย $(1, 2n + 1)$ -หมาก

ขั้นตอนการย้ายหมากครั้งละ 1 ตัวบนกระดานขนาด $1 \times (2n + 1)$

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาจำนวนหมากที่อยู่ในตำแหน่งที่ถูกต้องตามเงื่อนไขของการจบเกม นั่นคือหมากสีเหลืองจะอยู่ในช่องเลขคี่ และหมากสีแดงจะอยู่ในช่องเลขคู่

โดยพบว่า จำนวนของหมากสีเหลืองที่อยู่ในช่องเลขคี่เท่ากับ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ตัว และจำนวนของหมากสีแดงที่อยู่ในช่องเลขคู่เท่ากับ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ตัว ดังนั้น จำนวนหมากที่ต้องย้ายเท่ากับ $2n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ตัว

ขั้นตอนที่ 2 วิธีการย้ายหมาก จะย้ายหมากสีเหลืองและหมากสีแดงสลับกัน และย้ายเฉพาะหมากที่อยู่ในตำแหน่งที่ไม่ถูกต้องเท่านั้น โดยหมากสีเหลืองที่อยู่ในช่องที่เลขน้อยที่สุด จะย้ายไปยังช่องว่างที่เลขน้อยที่สุด และตามด้วยหมากสีแดงที่อยู่ในช่องเลขน้อยที่สุด จะย้ายไปยังช่องว่างที่เลขน้อยที่สุด ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนได้รูปแบบที่ต้องการ ดังรูปที่ 14



รูปที่ 14. ผลลัพธ์หลังจากเล่นเกมย้าย $(1, 2n + 1)$ -หมากจนจบเกม

จากขั้นตอนการย้ายหมากข้างต้น พบว่า หมากที่อยู่ในตำแหน่งที่ไม่ถูกต้อง จะถูกย้ายเพียงตัวละ 1 ครั้งเท่านั้น ดังนั้น จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(1, 2n + 1)$ -หมาก เท่ากับ $2n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ครั้ง

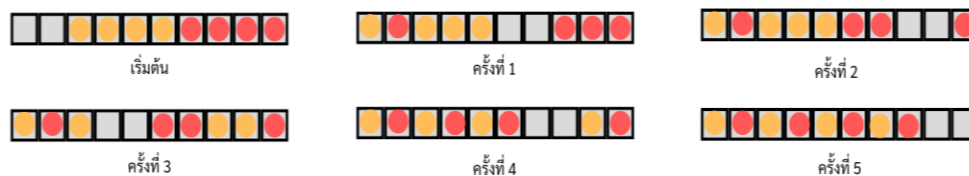
□

3.2 เกมย้าย $(2, 2n + 8)$ -หมาก

เป็นเกมที่ต้องการย้ายหมากครั้งละ 2 ตัว ที่อยู่ติดกันคู่ใดคู่หนึ่ง ไปยังช่องว่างบนกระดานขนาด $1 \times (2n + 8)$ โดยพิจารณาตัวอย่างการย้ายหมากบนกระดาน $1 \times m$ เมื่อ $m = 10, 12$ และ 14 เพื่อสังเกตรูปแบบวิธีการเล่นและจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้าย

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาการย้ายหมากครั้งละ 2 ตัวบนกระดานแต่ละขนาด

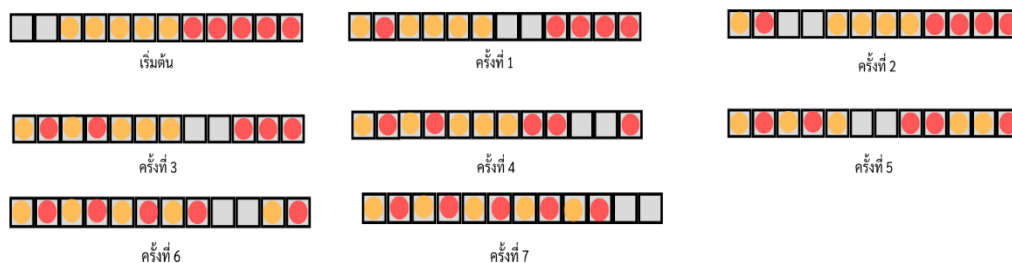
1) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×10 ดังรูปที่ 15



รูปที่ 15. เกมย้าย $(2, 10)$ -หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 5 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

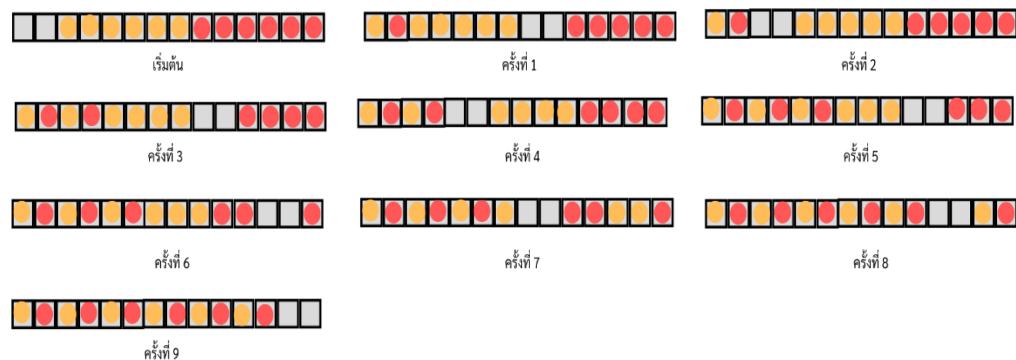
2) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×12 ดังรูปที่ 16



รูปที่ 16. เกมย้าย $(2, 12)$ -หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 7 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

3) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×14 ดังรูปที่ 17



รูปที่ 17. เกมย้าย (2,14)-หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 9 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

จากการสังเกตตัวอย่างที่ 2 ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2 สำหรับ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม จำนวนครั้งทีน้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(2, 2n + 8)$ -หมาก เท่ากับ $2n + 3$ ครั้ง

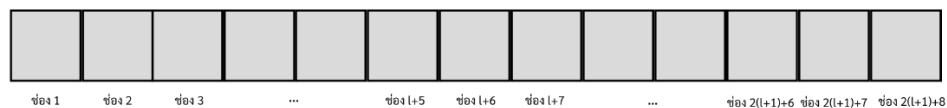
พิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม และ a_n เป็นจำนวนครั้งทีน้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(2, 2n + 8)$ -หมาก

จะพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นฐาน เมื่อ $n = 1$ จากตัวอย่างที่ 2 จะพบว่า จำนวนครั้งทีน้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(2, 10)$ -หมาก เท่ากับ 5 ครั้ง ซึ่ง $5 = 2(1) + 3$ นั่นคือ $a_1 = 5$

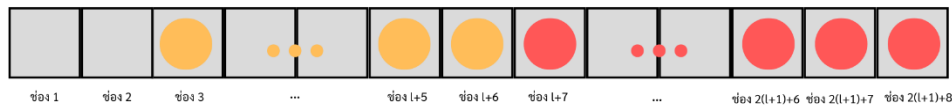
ขั้นอุปนัย ให้ $l \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า จำนวนครั้งทีน้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(2, 2l + 8)$ -หมาก เท่ากับ $2l + 3$ ครั้ง แสดงว่า จำนวนครั้งทีน้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(2, 2(l + 1) + 8)$ -หมาก เท่ากับ $2(l + 1) + 3$ ครั้ง

พิจารณากระดานขนาด $1 \times (2(l + 1) + 8)$ โดยกำหนดให้ช่องแรกจากทางซ้ายมือสุดเป็นช่อง 1 ดังรูปที่ 18



รูปที่ 18. ช่องบนกระดานขนาด $1 \times (2(l + 1) + 8)$

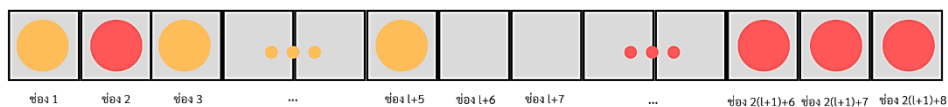
เริ่มต้นเกม วางหมากสีเหลืองตั้งแต่ช่อง 3 จนถึงช่อง $l + 6$ และวางหมากสีแดงตั้งแต่ช่อง $l + 7$ จนถึงช่อง $2(l + 1) + 8$ ดังรูปที่ 19



รูปที่ 19. เริ่มต้นเกมของเก้าย้าย $(2,2(l+1)+8)$ -หมาก

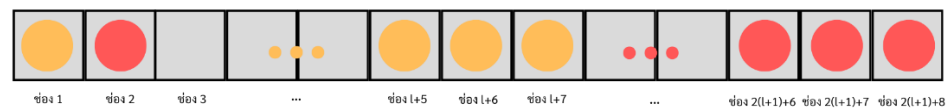
ขั้นตอนการย้ายหมากครั้งละ 2 ตัวบนกระดานขนาด $1 \times (2(l+1)+8)$

ขั้นตอนที่ 1 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง $l+6$ และหมากสีแดงช่อง $l+7$ ไปยังช่อง 1 และช่อง 2 ตามลำดับ ดังรูปที่ 20



รูปที่ 20. ขั้นตอนที่ 1 ของเก้าย้าย $(2,2(l+1)+8)$ -หมาก

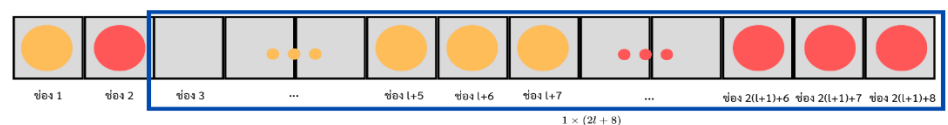
ขั้นตอนที่ 2 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง 3 และช่อง 4 ไปยังช่อง $l+6$ และช่อง $l+7$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 21



รูปที่ 21. ขั้นตอนที่ 2 ของเก้าย้าย $(2,2(l+1)+8)$ -หมาก

จากขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 จะพบว่าตั้งแต่ช่อง 3 จนถึงช่อง $2(l+1)+8$ เป็นตำแหน่งเริ่มต้นเก้าย้าย $(2,2l+8)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 3 ย้ายหมากตามรูปแบบเก้าย้าย $(2,2l+8)$ -หมาก ดังรูปที่ 22



รูปที่ 22. ขั้นตอนที่ 3 ของเก้าย้าย $(2,2(l+1)+8)$ -หมาก

จำนวนครั้งในการย้ายหมากตามขั้นตอนทั้งสามขั้นตอน คือ 1,1 และ a_l ครั้ง ตามลำดับ จากหลักการบวก จะได้ว่าจำนวนครั้งในการย้ายหมากทั้งหมดให้สอดคล้องกับกติกาของเกม คือ $a_l + 1 + 1 = a_l + 2$ ครั้ง ดังนั้น $a_{l+1} \leq a_l + 2$

ต่อไปจะแสดงว่า $a_{l+1} \geq a_l + 2$ สังเกตว่าการย้ายหมากเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ จะต้องย้ายตามขั้นตอนที่ 1 ก่อน จากนั้นตามด้วยขั้นตอนที่ 2 และขั้นตอนที่ 3 ตามลำดับ นั่นคือ จำเป็นต้องใช้อย่างน้อย $a_l + 2$ ครั้ง ในการเล่น ดังนั้น $a_{l+1} \geq a_l + 2$

จะได้ว่า $a_{l+1} = a_l + 2$ และจากสมมติฐานจะได้ว่า $a_{l+1} = a_l + 2 = (2l + 3) + 2 = (2l + 2) + 3 = 2(l + 1) + 3$

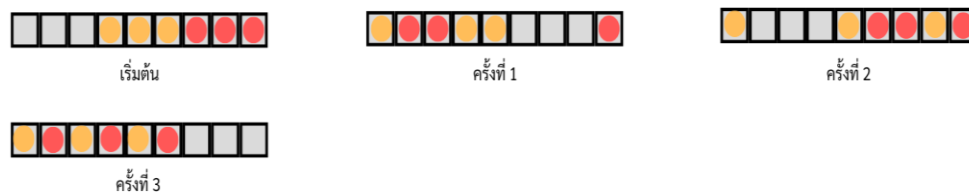
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมาย้าย $(2, 2n + 8)$ -หมาก เท่ากับ $2n + 3$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม $\square$

3.3 เกมย้าย $(3, 4n + 5)$ -หมาก

เป็นเกมที่ต้องการย้ายหมากครั้งละ 3 ตัว ที่อยู่ติดกัน ไปยังช่องว่างบนกระดานขนาด $1 \times (4n + 5)$ โดยจะพิจารณาตัวอย่างการย้ายหมากบนกระดาน $1 \times m$ เมื่อ $m = 9$ และ 13 เพื่อสังเกตรูปแบบวิธีการเล่นและจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้าย

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาการย้ายหมากครั้งละ 3 ตัว บนกระดานแต่ละขนาด

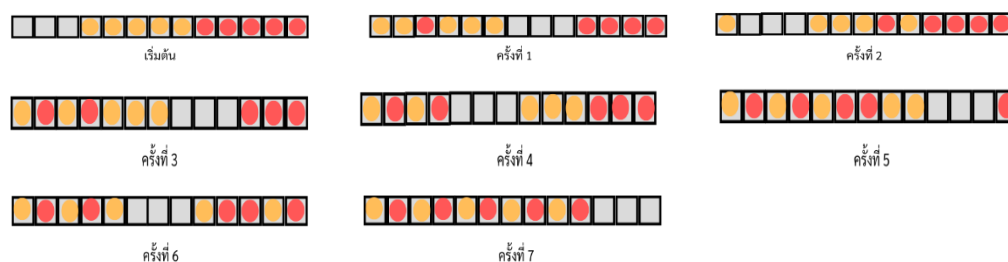
1) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×9 ดังรูปที่ 23



รูปที่ 23. เกมย้าย $(3,9)$ -หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 3 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

2) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×13 ดังรูปที่ 24



รูปที่ 24. เกมย้าย $(3,13)$ -หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 7 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

จากการสังเกตตัวอย่างที่ 3 ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.3 สำหรับ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 4n + 5)$ -หมาก เท่ากับ $4n - 1$ ครั้ง

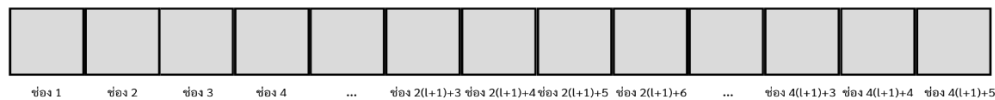
พิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม และ a_n เป็นจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 4n + 5)$ -หมาก

จะพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นฐาน เมื่อ $n = 1$ จากตัวอย่างที่ 3 จะพบว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 9)$ -หมาก เท่ากับ 3 ครั้ง ซึ่ง $3 = 4(1) - 1$ นั่นคือ $a_1 = 3$

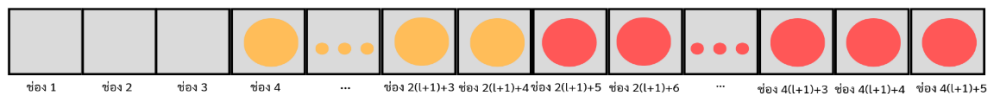
ขั้นอุปนัย ให้ $l \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 4l + 5)$ -หมาก เท่ากับ $4l - 1$ ครั้ง จะแสดงว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 4(l + 1) + 5)$ -หมาก เท่ากับ $4(l + 1) - 1$ ครั้ง

พิจารณากระดานขนาด $1 \times (4(l + 1) + 5)$ กำหนดให้ช่องแรกจากทางซ้ายมือสุดเป็นช่อง 1 ดังรูปที่ 25



รูปที่ 25. ช่องบนกระดานขนาด $1 \times (4(l + 1) + 5)$

เริ่มต้นเกม วางหมากสีเหลืองตั้งแต่ช่อง 4 จนถึงช่อง $2(l + 1) + 4$ และวางหมากสีแดงตั้งแต่ช่อง $2(l + 1) + 5$ จนถึงช่อง $4(l + 1) + 5$ ดังรูปที่ 26



รูปที่ 26. เริ่มต้นเกมของเกมย้าย $(3, 4(l + 1) + 5)$ -หมาก

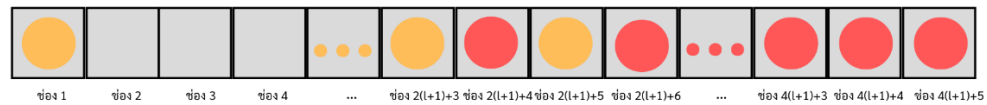
ขั้นตอนการย้ายหมากครั้งละ 3 ตัว บนกระดานขนาด $1 \times (4(l + 1) + 5)$

ขั้นตอนที่ 1 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง $2(l + 1) + 3$ ช่อง $2(l + 1) + 4$ และหมากสีแดงช่อง $2(l + 1) + 5$ ไปยังช่อง 1 ช่อง 2 และช่อง 3 ตามลำดับ ดังรูปที่ 27



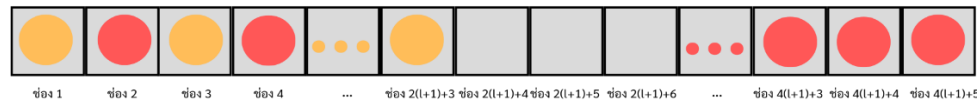
รูปที่ 27. ขั้นตอนที่ 1 ของเกมย้าย $(3,4(l+1)+5)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 2 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง 2 และช่อง 4 หมากสีแดงช่อง 3 ไปยังช่อง $2(l+1)+3$ ช่อง $2(l+1)+5$ และช่อง $2(l+1)+4$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 28



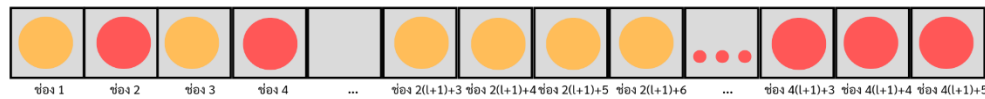
รูปที่ 28. ขั้นตอนที่ 2 ของเกมย้าย $(3,4(l+1)+5)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 3 ย้ายหมากสีแดงช่อง $2(l+1)+4$ และช่อง $2(l+1)+6$ หมากสีเหลืองช่อง $2(l+1)+5$ ไปยังช่อง 2 ช่อง 4 และช่อง 5 ตามลำดับ ดังรูปที่ 29



รูปที่ 29. ขั้นตอนที่ 3 ของเกมย้าย $(3,4(l+1)+5)$ -หมาก

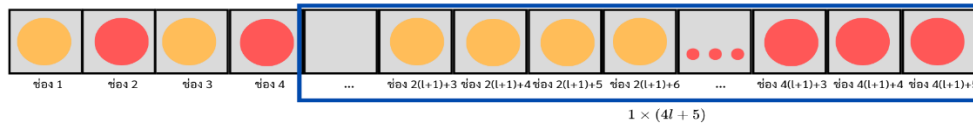
ขั้นตอนที่ 4 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง 5 ช่อง 6 และช่อง 7 ไปยังช่อง $2(l+1)+4$ ช่อง $2(l+1)+5$ และช่อง $2(l+1)+6$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 30



รูปที่ 30. ขั้นตอนที่ 4 ของเกมย้าย $(3,4(l+1)+5)$ -หมาก

จากขั้นตอนที่ 1 จนถึงขั้นตอนที่ 4 จะพบว่าตั้งแต่ช่อง 5 จนถึงช่อง $4(l+1)+5$ เป็นตำแหน่งเริ่มต้นเกมย้าย $(3,4l+5)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 5 ย้ายหมากตามรูปแบบเกมย้าย $(3,4l+5)$ -หมาก ดังรูปที่ 31

รูปที่ 31. ขั้นตอนที่ 5 ของเกมย้าย $(3, 4(l+1) + 5)$ -หมาก

จำนวนครั้งในการย้ายหมากตามขั้นตอนทั้งห้าขั้นตอน คือ 1, 1, 1, 1 และ a_l ครั้ง ตามลำดับ โดยหลักการบวก จะได้ว่าจำนวนครั้งในการย้ายหมากทั้งหมดให้สอดคล้องกับกติกาของเกม คือ $a_l + 1 + 1 + 1 + 1 = a_l + 4$ ครั้ง ดังนั้น $a_{l+1} \leq a_l + 4$

ต่อไปจะแสดงว่า $a_{l+1} \geq a_l + 4$ สังเกตว่าการย้ายหมากเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ จะต้องย้ายตามขั้นตอนที่ 1 ก่อน และตามด้วยขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนที่ 4 และขั้นตอนที่ 5 ตามลำดับ นั่นคือ จำเป็นต้องใช้อย่างน้อย $a_l + 4$ ครั้ง ในการเล่นเกมย้าย $(3, 4l + 5)$ -หมาก ดังนั้น $a_{l+1} \geq a_l + 4$

จะได้ว่า $a_{l+1} = a_l + 4$ และจากสมมติฐาน จะได้ว่า $a_{l+1} = a_l + 4 = (4l - 1) + 4 = (4l + 4) - 1 = 4(l + 1) - 1$

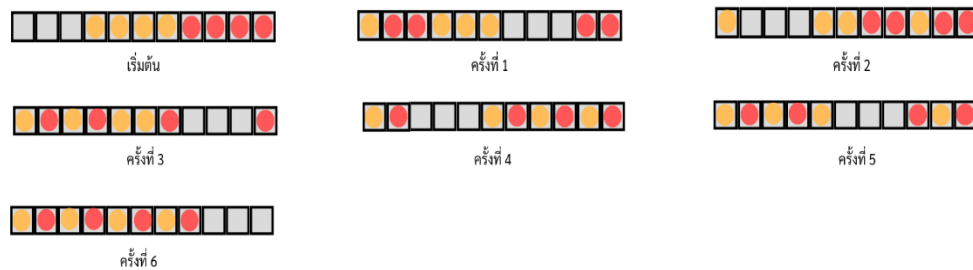
โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมนย้าย $(3, 4n + 5)$ -หมาก เท่ากับ $4n - 1$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม $\square$

3.4 เกมย้าย $(3, 4n + 7)$ -หมาก

เป็นเกมที่ต้องการย้ายหมากครั้งละ 3 ตัวที่อยู่ติดกัน ไปยังช่องว่างบนกระดานขนาด $1 \times (4n + 7)$ โดยจะพิจารณาตัวอย่างการย้ายหมากบนกระดาน $1 \times m$ เมื่อ $m = 11$ และ 15 เพื่อสังเกตรูปแบบวิธีการเล่นและจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้าย

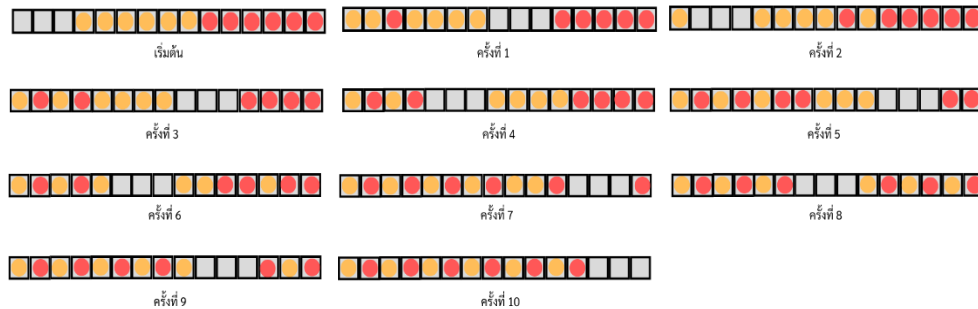
ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาการย้ายหมากครั้งละ 3 ตัวบนกระดานแต่ละขนาด

1) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×11 ดังรูปที่ 32

รูปที่ 32. เกมย้าย $(3, 11)$ -หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 6 ครั้งจนได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

2) การย้ายหมากบนกระดานขนาด 1×15 ดังรูปที่ 33



รูปที่ 33. เกมย้าย (3,15)-หมาก

จากการย้ายหมากข้างต้น พบว่า สามารถย้ายหมากจำนวน 10 ครั้ง จะได้รับผลลัพธ์สุดท้ายเป็นหมากที่สลับสีกัน

จากการสังเกตตัวอย่างที่ 4 ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.4 สำหรับ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย (3, $4n + 7$)-หมาก เท่ากับ $4n + 2$ ครั้ง

พิสูจน์ ให้ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม และ a_n เป็นจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย (3, $4n + 7$)-หมาก

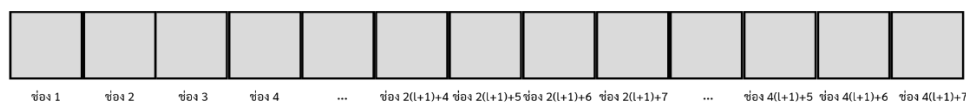
จะพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นฐาน เมื่อ $n = 1$ จากตัวอย่างที่ 4 จะพบว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย (3, 11)-หมาก เท่ากับ 6 ครั้ง ซึ่ง $6 = 4(1) + 2$ นั่นคือ $a_1 = 6$

ขั้นอุปนัย ให้ $l \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม สมมติว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย (3, $4l + 7$)-หมาก เท่ากับ $4l + 2$ ครั้ง

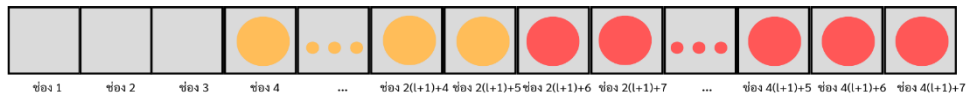
จะแสดงว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย (3, $4(l + 1) + 7$)-หมาก เท่ากับ $4(l + 1) + 2$ ครั้ง

พิจารณากระดานขนาด $1 \times (4(l + 1) + 7)$ กำหนดให้ช่องแรกจากทางซ้ายมือสุดเป็นช่อง 1 ดังรูปที่ 34



รูปที่ 34. ช่องบนกระดานขนาด $1 \times (4(l + 1) + 7)$

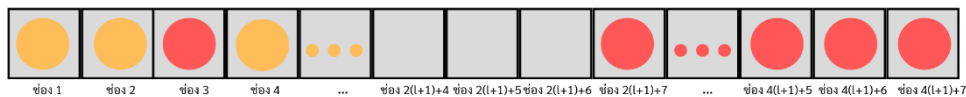
เริ่มต้นเกม วางหมากสีเหลืองตั้งแต่ช่อง 4 จนถึงช่อง $2(l+1)+5$ และวางหมากสีแดงตั้งแต่ช่อง $2(l+1)+6$ จนถึงช่อง $4(l+1)+7$ ดังรูปที่ 35



รูปที่ 35. เริ่มต้นเกมของเกมาย้าย $(3,4(l+1)+7)$ -หมาก

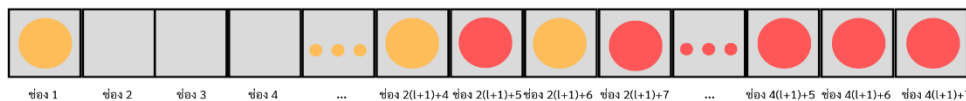
ขั้นตอนการย้ายหมากครั้งละ 3 ตัวบนกระดานขนาด $1 \times (4(l+1)+7)$

ขั้นตอนที่ 1 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง $2(l+1)+4$ ช่อง $2(l+1)+5$ และหมากสีแดงช่อง $2(l+1)+6$ ไปยังช่อง 1 ช่อง 2 และช่อง 3 ตามลำดับ ดังรูปที่ 36



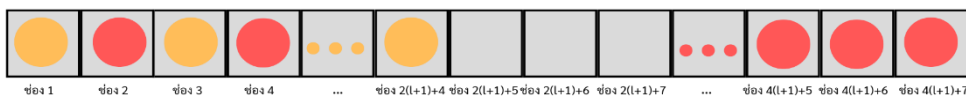
รูปที่ 36. ขั้นตอนที่ 1 ของเกมาย้าย $(3,4(l+1)+7)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 2 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง 2 และช่อง 4 หมากสีแดงช่อง 3 ไปยังช่อง $2(l+1)+4$ ช่อง $2(l+1)+6$ และช่อง $2(l+1)+5$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 37



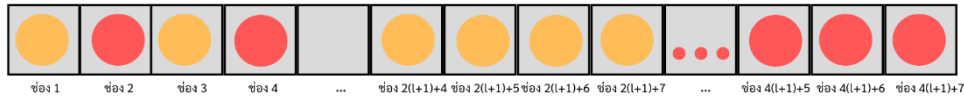
รูปที่ 37. ขั้นตอนที่ 2 ของเกมาย้าย $(3,4(l+1)+7)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 3 ย้ายหมากสีแดงช่อง $2(l+1)+5$ และช่อง $2(l+1)+7$ หมากสีเหลืองช่อง $2(l+1)+6$ ไปยังช่อง 2 ช่อง 4 และช่อง 3 ตามลำดับ ดังรูปที่ 38



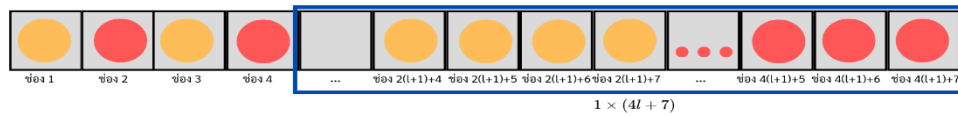
รูปที่ 38. ขั้นตอนที่ 3 ของเกมาย้าย $(3,4(l+1)+7)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 4 ย้ายหมากสีเหลืองช่อง 5 ช่อง 6 และช่อง 7 ไปยังช่อง $2(l+1)+5$ ช่อง $2(l+1)+6$ และช่อง $2(l+1)+7$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 39

รูปที่ 39. ขั้นตอนที่ 4 ของเกมย้าย $(3, 4(l+1) + 7)$ -หมาก

จากขั้นตอนที่ 1 จนถึงขั้นตอนที่ 4 จะพบว่าตั้งแต่ช่อง 5 จนถึงช่อง $4(l+1) + 7$ เป็นตำแหน่งเริ่มต้นเกมย้าย $(3, 4l + 7)$ -หมาก

ขั้นตอนที่ 5 ย้ายหมากตามรูปแบบเกมย้าย $(3, 4l + 7)$ -หมาก ดังรูปที่ 40

รูปที่ 40. ขั้นตอนที่ 5 ของเกมย้าย $(3, 4(l+1) + 7)$ -หมาก

จำนวนครั้งในการย้ายหมากตามขั้นตอนทั้งห้าขั้นตอน คือ 1, 1, 1, 1 และ a_l ครั้ง ตามลำดับจากหลักการบวก จะได้ว่า จำนวนครั้งในการย้ายหมากทั้งหมดให้สอดคล้องกับกติกาของเกม คือ $a_l + 1 + 1 + 1 + 1 = a_l + 4$ ครั้ง ดังนั้น $a_{l+1} \leq a_l + 4$

ต่อไปจะแสดงว่า $a_{l+1} \geq a_l + 4$ สังเกตว่าการย้ายหมากเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ จะต้องย้ายตามขั้นตอนที่ 1 ก่อน จากนั้นตามด้วยขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนที่ 4 และขั้นตอนที่ 5 ตามลำดับ นั่นคือ จำเป็นต้องใช้อย่างน้อย $a_l + 4$ ครั้ง ในการเกมย้าย $(3, 4(l+1) + 7)$ -หมาก ดังนั้น $a_{l+1} \geq a_l + 4$

จะได้ว่า $a_{l+1} = a_l + 4$ และจากสมมติฐาน จะได้ว่า $a_{l+1} = a_l + 4 = (4l + 2) + 4 = (4l + 4) + 2 = 4(l + 1) + 2$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมนย้าย $(3, 4n + 7)$ -หมาก เท่ากับ $4n + 2$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม $\square$

4. สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษารูปแบบ กติกา และวิธีการเล่นของเกมนย้าย (k, m) -หมาก เมื่อ $(k, m) \in \{(1, 2n + 1), (2, 2n + 8), (3, 4n + 5), (3, 4n + 7)\}$ สามารถหาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายหมากจนได้ผลลัพธ์ตามกติกา ดังนี้

1. จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมนย้าย $(1, 2n + 1)$ -หมาก เท่ากับ $2n - 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม
2. จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมนย้าย $(2, 2n + 8)$ -หมาก เท่ากับ $2n + 3$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม โดยมีความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = a_{n-1} + 2$ โดยมีค่าเริ่มต้น $a_1 = 5$

3. จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 4n + 5)$ -หมาก เท่ากับ $4n - 1$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม โดยมีความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = a_{n-1} + 4$ โดยมีค่าเริ่มต้น $a_1 = 3$

4. จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกมย้าย $(3, 4n + 7)$ -หมาก เท่ากับ $4n + 2$ ครั้ง เมื่อ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม โดยมีความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = a_{n-1} + 4$ โดยมีค่าเริ่มต้น $a_1 = 6$

จะเห็นว่ารูปแบบในการย้ายหมากของเกมย้าย (k, m) -หมาก อาศัยรูปแบบในการย้ายหมากบนกระดานที่มีขนาดเล็กกว่า โดยพิจารณาการย้ายหมากให้เป็นรูปแบบของกระดานขนาดเล็กกว่าในขั้นตอนแรก จากนั้นพิจารณาการย้ายหมากบนกระดานที่มีขนาดเล็กกว่าซึ่งเป็นจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเล่นเกม จึงนำมาซึ่งความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนครั้งในการย้ายหมาก และจากรูปแบบในการย้ายหมากขั้นตอนที่ 1 พบว่า การย้ายหมากจะเริ่มย้ายจากตำแหน่งตรงกลางที่อยู่ระหว่างหมากทั้งสองสีเสมอ ซึ่งอาจเป็นผลมาจากต้องการสลับตำแหน่งของหมากแต่ละสีในผลลัพธ์สุดท้ายที่ต้องการ

งานวิจัยนี้สามารถขยายเป็นการศึกษาในรูปแบบในการเล่นเกมย้าย (k, m) -หมาก เมื่อ $k \geq 4$ บนกระดานขนาด $1 \times m$ เพิ่มเติมในอนาคต

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยโครงการวิจัยเงินรายได้มหาวิทยาลัยทักษิณ กองทุนมหาวิทยาลัยทักษิณ ประเภททุนพัฒนานักวิจัยรุ่นใหม่ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2567 (สัญญาเลขที่ TSU67-NRG007) และผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และหลักสูตรคณิตศาสตร์และการจัดการข้อมูล คณะวิทยาศาสตร์และนวัตกรรมดิจิทัล มหาวิทยาลัยทักษิณ ในการสนับสนุนสถานที่ เครื่องมือและอุปกรณ์ในการทำวิจัย

เอกสารอ้างอิง (References)

- Awachai, P. (2023, January 31). *Alzheimer's disease preventing game*. SciMath Knowledge Repository. <https://www.scimath.org/article-mathematics/item/12786-2023-01-20-06-22-57> (in Thai)
- Beeler, R. A. (2018). Tic-Tac-Toe on graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 72 (1), 106-112.
- Demaio, J. (2007). Which chessboards have a closed knight's tour within the cube?. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 14, Article R32. <https://doi.org/10.37236/950>
- Demaio, J., & Bindia, M. (2011). Which chessboards have a closed knight's tour within the rectangular prism?. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1), Article P8. <https://doi.org/10.37236/495>
- Felgenhauer, B., & Jarvis, A. F. (2006). Mathematics of sudoku I. *Mathematical Spectrum*, 39(1), 15-22.

- Garg, R., & Nayak, D. P. (2017). Game of Tic-Tac-Toe: simulation using min-max algorithm. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 8(7), 1074-1077. <https://doi.org/10.26483/ijarcs.v8i7.4409>
- Herzberg, A. M., & Murty, M. R. (2007). Sudoku squares and chromatic polynomials. *Notices of the American Mathematical Society*, 54(6), 708-717.
- Murray, H. J. R. (1902). The knight's tour, ancient and oriental. *British Chess Magazine*, 22(1), 1-7.
- Russell, E., & Jarvis, A. F. (2007). Mathematics of sudoku II. *Mathematical Spectrum*, 39(2), 54-58.
- Schwenk, A. J. (1991). Which rectangular chessboards have a knight's tour?. *Mathematics Magazine*, 64(5), 325-332. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1991.11977627>
- Singhun, S., Loykaew, N., Boonklurb, R., & Srichote, W. (2021). Closed knight's tour problem on some $(m, n, k, 1)$ -rectangular tubes. *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(6), Article 2150094. <https://doi.org/10.1142/S1793557121500947>
- Srichote, W., Boonklurb, R., & Singhun, S. (2020). Closed knight's tours on (m, n, r) -ringboards. *Symmetry*, 12(8), Article 1217. <https://doi.org/10.3390/sym12081217>