เมทริกซ์ในฐานะที่เป็น Γ– กึ่งกรุป

Matrices as Γ– Semigroups

ธวัชชัย คำประภัสสร

Thawatchai Khumprapussorn

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

เราทราบว่า $M_{mn}(R)$ เซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บน R เป็น Γ–กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Γ ใดๆ บทความวิจัยนี้ เรากำหนดเซตย่อยไม่ว่าง T ของ $M_{mn}(R)$ จุดประสงค์ก็คือหาเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$

คำสำคัญ : Γ–กึ่งกรุป และ Γ–กึ่งกรุปย่อย

Abstract

We know that $M_{mn}(R)$, the set of all $m \times n$ matrices over R, is a Γ–semigroup under usual multiplication for any nonempty subsets Γ of $M_{nm}(R)$. In this paper, we fix a nonempty subset T of $M_{mn}(R)$ and find all subsets Γ of $M_{nm}(R)$ such that T is a Γ–subsemigroup of $M_{mn}(R)$.

Keywords : Γ–semigroup and Γ–subsemigroup

E-mail : khthawat@kmitl.ac.th

1. บทนำและความรู้พื้นฐาน

กึ่งกรุปเป็นจุดเริ่มต้นของโครงสร้างพื้นฐานทางพีชคณิต ซึ่งนักคณิตศาสตร์ต่างให้ความสำคัญ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปจึงพบได้มากมายและหลากหลายแนวทาง โดยเฉพาะ Γ–กึ่งกรุป เป็นอีกหนึ่งโครงสร้างทางพีชคณิตที่น่าสนใจ ด้วยความพิเศษที่ว่า Γ–กึ่งกรุปและกึ่งกรุปให้โครงสร้างซึ่งกันและกัน สมบัติต่างๆในกึ่งกรุปจึงถูกหยิบยกขึ้นมาศึกษาในลักษณะเดียวกันบน Γ–กึ่งกรุป เช่น ความสัมพันธ์ของกรีน, ไอดีล, ไอดีลเฉพาะ, ไบไอดีล และควอซีไอดีล โดยสองนักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียชื่อว่า M.K. Sen และ N.K. Saha ได้ให้บทนิยามของ Γ–กึ่งกรุป ไว้ดังนี้

บทนิยาม 1.1 [2] ให้ S และ Γ เป็นเซตไม่ว่าง เราเรียก S ว่า Γ–*กึ่งกรุป* ถ้ามีการส่ง

$S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ เราแทนการส่ง (a, γ, b) ด้วย $a\gamma b$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติ

$$(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c) \text{ สำหรับทุก } a, b, c \in S \text{ และสำหรับทุก } \alpha, \beta \in \Gamma$$

เราเรียกเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง B ของ S ว่า Γ–*กึ่งกรุปย่อย* ถ้า $a\gamma b \in B$ สำหรับทุกๆ $a, b \in B$ และ $\gamma \in \Gamma$

จะเห็นว่าเราสามารถสร้าง Γ–กึ่งกรุป ได้จากกึ่งกรุป S ใดๆ โดยกำหนดให้ $S = \Gamma$ นั่นคือ เรากล่าวได้ว่า “กึ่งกรุปใดๆ ให้โครงสร้างของ Γ–กึ่งกรุป” ในทางตรงกันข้าม ให้ S เป็น Γ–กึ่งกรุป และ $\alpha \in \Gamma$ เรานิยามการดำเนินการทวิภาค $\circ$ บน S โดย $a \circ b = a\alpha b$ ทุกๆ $a, b \in S$ ทำให้ได้ว่า $(S, \circ)$ เป็นกึ่งกรุป และนี่เป็นเหตุผลที่ทำให้เรากล่าวได้ว่า “Γ–กึ่งกรุปใดๆ ให้โครงสร้างของกึ่งกรุป” ด้วยเหตุผลข้างต้นทำให้เรากล่าวได้ว่า Γ–กึ่งกรุปและกึ่งกรุปให้โครงสร้างซึ่งกันและกัน

อย่างไรก็ดี โครงสร้าง Γ–กึ่งกรุป เป็นการวางนัยทั่วไปของโครงสร้างกึ่งกรุป ดังนั้นสมบัติต่างๆที่ได้จากการศึกษาบนโครงสร้าง Γ–กึ่งกรุป จึงให้ผลลัพธ์ในเชิงที่เป็นกรณีทั่วไปกว่า ดังเช่นทฤษฎีบทต่อไปนี้

อนึ่ง ในบทความวิจัยนี้เราใช้สัญลักษณ์ R เพื่อแทนเซตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 1.2 [1] ให้ $\Gamma = \{a\}$ จะได้ว่า ช่วงของจำนวนจริง I เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง R ภายใต้การบวกปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I.	R	IV.	(y, ∞) เมื่อ $y \geq -a$
II.	$\{-a\}$	V.	$(-\infty, y]$ เมื่อ $y \leq -a$
III.	$[y, \infty)$ เมื่อ $y \geq -a$	VI.	$(-\infty, y)$ เมื่อ $y \leq -a$

จากบทนิยามของ Γ–กึ่งกรุปย่อย ทำให้เราทราบว่า ภายใต้การบวกปกติ ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R และ $\{0\}$ –กึ่งกรุปย่อยของ R เป็นสิ่งเดียวกัน ดังนั้นเมื่อเราแทนค่า $a = 0$ ลงไปในทฤษฎีบทข้างต้น เราจะได้ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R ดังนี้

บทแทรก 1.3 [1] ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริง จะได้ว่า I เป็นกึ่งกรุปย่อยภายใต้การบวกปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I.	R	IV.	(y, ∞) เมื่อ $y \geq 0$
II.	$\{0\}$	V.	$(-\infty, y]$ เมื่อ $y \leq 0$
III.	$[y, \infty)$ เมื่อ $y \geq 0$	VI.	$(-\infty, y)$ เมื่อ $y \leq 0$

สำหรับรูปแบบของช่วง I ที่เป็น $\{a\}$–กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง R ภายใต้การคูณปกติ มีผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4 [1] ให้ $a > 0$ จะได้ว่า ช่วงของจำนวนจริง I เป็น $\{a\}$–กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง R ภายใต้การคูณปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I.	R	VIII.	$[x, y]$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a \leq y \leq \frac{1}{a}$
II.	$\{0\}$	IX.	$[x, y)$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a < y \leq \frac{1}{a}$
III.	$\left\{\frac{1}{a}\right\}$	X.	$(x, y]$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a \leq y \leq \frac{1}{a}$
IV.	$(0, \infty)$	XI.	(x, y) เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2 a \leq y \leq \frac{1}{a}$
V.	$[0, \infty)$		

VI. (x,∞) เมื่อ $x \geq \frac{1}{a}$

VII. $[x,\infty)$ เมื่อ $x \geq \frac{1}{a}$

ข้อสังเกตหนึ่งที่เห็นได้ชัดจากบทนิยามของ $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย นั่นคือ ภายใต้การคูณปกติ ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R และ $\{1\}$–กึ่งกรุปย่อยของ R เป็นสิ่งเดียวกัน จากทฤษฎีบทข้างต้น เมื่อแทนค่า $a = 1$ เราจะได้รูปแบบทั้งหมดของช่วง I ที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R ดังนี้

บทแทรก 1.5 [1] ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริง จะได้ว่า I เป็นกึ่งกรุปย่อยภายใต้การคูณปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I.	R	VIII. $(0,y)$ เมื่อ $0 < y \leq 1$
II.	$\{0\}$	IX. $(0,y]$ เมื่อ $0 < y \leq 1$
III.	$\{1\}$	X. $[0,y)$ เมื่อ $0 < y \leq 1$
IV.	$(0,\infty)$	XI. $[0,y]$ เมื่อ $0 < y \leq 1$
V.	$[0,\infty)$	XII. $(x,y]$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 \leq y \leq 1$
VI.	(x,∞) เมื่อ $x \geq 1$	XIII. $[x,y)$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 < y \leq 1$
VII.	$[x,\infty)$ เมื่อ $x \geq 1$	XIV. $[x,y]$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 \leq y \leq 1$

ทั้งสองทฤษฎีบทที่กล่าวมาเป็นการศึกษารูปแบบของช่วงย่อย I ที่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง ภายใต้การบวกและการคูณปกติ โดยการกำหนด $\Gamma=\{a\}$ ซึ่งต่อมา เมื่อพิจารณาภายใต้การบวกปกติ เราได้ข้อสรุปว่า ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R และ $\{0\}$–กึ่งกรุปย่อยของ R เหมือนกัน และเมื่อพิจารณาภายใต้การคูณปกติ เราพบว่า ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R และ $\{1\}$–กึ่งกรุปย่อยของ R เป็นสิ่งเดียวกัน สำหรับผลลัพธ์ในกรณี Γ เป็นช่วงย่อยอื่นๆ ได้ศึกษาไว้แล้วอย่างครบถ้วน สามารถศึกษาได้ใน [1]

เราทราบจาก [1] ว่า $M_{mn}(R)$ เซตของเมทริกซ์ขนาด $m{\times}n$ บน R เป็น Γ–กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Γ ใดๆ ของ $M_{nm}(R)$ การแยกแยะว่าเมื่อใดที่เซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$ ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยที่ T เป็นเซตย่อยของ $M_{mn}(R)$ ที่กำหนดให้ได้ศึกษาไว้แล้วเพียงบางส่วนโดย Khumprapussorn [1] ดังเช่นผลลัพธ์ต่อไปนี้

กำหนดสัญลักษณ์

$N_n = \{1,2,\ldots,n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1, & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$

ทฤษฎีบท 1.6 [1] ให้ $i \in N_m,\ j \in N_n$ และ $T = \{[a_{ij}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0$ โดยที่ $p \neq j$ และ $q \neq i\}$

เราสังเกตว่า เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุเพียงหนึ่งตำแหน่งมีค่าเป็น 0 (สมมติว่าในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 หรือ $a_{ij} = 0$) จะเห็นว่าลักษณะของแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ใน Γ ส่วนมากมีค่าเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่อยู่ในแนว แถวที่ j และหลักที่ i

ต่อไปพิจารณาลักษณะของ Γ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยที่ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 (สมมติว่า $a_{ij} = a_{it} = 0$ โดยที่ $j \neq t$)

ทฤษฎีบท 1.7 [1] ให้ $i \in N_m,\ j,t \in N_n$ และ $j \neq t$ และให้ $T = \{[a_{ij}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = a_{it} = 0\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0$ โดยที่ $p \neq j,t$ และ $q \neq i\}$

เมื่อนำทฤษฎีบท 1.6 และ ทฤษฎีบท 1.7 มาเปรียบเทียบจะเห็นว่า ในขณะที่ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งที่มีค่าเป็น 0 เพิ่มขึ้นในแนวแถวเดียวกัน มีผลทำให้ลักษณะของแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ใน Γ เกิดหลักที่ไม่เป็น 0 เพิ่มตามไปด้วย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวถึงกรณีที่ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง โดยทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0

ทฤษฎีบท 1.8 [1] ให้ $\lambda, \mu \in R\setminus\{0\}$, $i,p \in N_m$ และ $j,q \in N_n$ โดยที่ $p \neq i$ และ $q \neq j$

ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda$ และ $a_{pq} = \mu\}$ จะได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ สำหรับทุกๆเซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$

ทฤษฎีบท 1.9 [1] ให้ $\lambda, \mu \in R\backslash\{0\}, i \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $q \neq j$

ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) | a_{ij} = \lambda$ และ $a_{iq} = \mu\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{xy}] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}, \forall t \in N_m\backslash\{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt}$ และ

$$\forall x \in N_n\backslash\{j,q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0\}$$

ทฤษฎีบท 1.8 แสดงให้เห็นว่า เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง ทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 โดยที่ทั้งสองตำแหน่งต่างแถวและต่างหลักกัน ผลที่ได้คือไม่มีเซตย่อยไม่ว่างใดๆ Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุป ของ $M_{mn}(R)$ สำหรับทฤษฎีบท 1.9 เราอธิบายได้ว่า เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง ทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 โดยที่ทั้งสองตำแหน่งอยู่ในแถวเดียวกัน จะได้เงื่อนไขของเมทริกซ์ใน Γ ดังนี้

$$1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}, \forall t \in N_m\backslash\{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt} \text{ และ } \forall x \in N_n\backslash\{j,q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0$$

งานวิจัยของ Khumprapussorn [1] ศึกษารูปแบบของเซตย่อย Γ ของ $M_{mn}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยที่กำหนด T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 1 ตำแหน่ง และ 2 ตำแหน่ง อีกทั้งในตำแหน่งศึกษานั้นระบุทั้งที่มีค่าเป็น 0 และไม่เป็น 0 นำมาซึ่งแรงบันดาลใจของบทความวิจัยฉบับนี้ ที่จะขยายผลลัพธ์จากการระบุเพียง 1 หรือ 2 ตำแหน่ง ไปสู่จากระบุ k ตำแหน่งใดๆ ซึ่งจะเป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 1.8 และ ทฤษฎีบท 1.9

2. ทฤษฎีบทหลัก

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บนเซตของจำนวนจริง โดยมีแนวทางดำเนินการซึ่งกล่าวง่ายๆ ได้ว่า “กำหนด $T \subseteq M_{mn}(R)$ เป้าหมายคือ หา $\Gamma \subseteq M_{mn}(R)$ ทั้งหมด ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$” โดยเริ่มจากการขยายผลของทฤษฎีบท 1.8 นั่นคือ กำหนดให้ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ k ตำแหน่งมีค่าเป็น 0 โดยที่ทั้ง k ตำแหน่งนั้นอยู่ในแถวเดียวกัน

สำหรับ $[a_{r\beta}], [c_{\alpha s}] \in M_{mn}(R)$ และ $[b_{\beta\alpha}] \in M_{nm}(R)$ จะได้ว่า $[a_{r\beta}][b_{\beta\alpha}][c_{\alpha s}] \in M_{mn}(R)$ ยิ่งไปกว่านั้น ตำแหน่งแถวที่ i และ หลักที่ j ของเมทริกซ์ $[a_{r\beta}][b_{\beta\alpha}][c_{\alpha s}]$ คือ $\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}b_{\beta\alpha}\, c_{\alpha j}$ สำหรับทุกๆ $i \in N_m$ และ $j \in N_n$

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \left\{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i\right\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $M = \left\{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i\right\}$

($\rightarrow$) สมมติ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ และให้ $[b_{pq}] \in M_{nm}(R)$ โดยที่ $p \neq j_1, j_2, \dots, j_k$ และ $q \neq i$

ให้ $[a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T$ โดยที่ $a_{i\beta} = \delta_{p\beta}$ และ $c_{\alpha j_1} = \delta_{\alpha q}$ สำหรับทุกๆ $\beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k$ และ $\alpha \neq i$

จะได้ว่า $[a_{r\beta}][b_{pq}][c_{\alpha v}] \in T$ ดังนั้น

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}b_{\beta\alpha}\, c_{\alpha j_1} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq i}}^{m}\ \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq j_1, j_2, \dots, j_k}}^{n} \delta_{p\beta}\, b_{\beta\alpha}\delta_{\alpha q} = b_{pq}$$

($\leftarrow$)สมมติว่า $\Gamma \subseteq M$

ให้ $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$ และ $[b_{pq}] \in \Gamma$ เราต้องแสดงว่าในตำแหน่งแถวที่ i และ หลักที่ t ของเมทริกซ์ $[a_{rs}][b_{pq}][c_{uv}]$ มีค่าเป็น 0 สำหรับทุกๆ $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า $c_{it} = 0$ ทุกๆ $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

ให้ $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

จะได้ว่า

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}b_{\beta\alpha}\,c_{\alpha t} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}\,b_{\beta\alpha}c_{\alpha t} + \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta}\,b_{\beta i}c_{it} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\left(\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq j_1,j_2,\ldots,j_k}}^{n} a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha t}\right) = 0$$

บทตั้งต่อไปนี้มีส่วนช่วยให้เราขยายผลลัพธ์ได้มากยิ่งขึ้น โดยกำหนดสัญลักษณ์เพื่อความสะดวก ดังนี้ A^{tr} แทนทรานสโพสของเมทริกซ์ A และ $S^{tr} = \{A^{tr} \mid A \in S\}$ โดยที่ $\emptyset \neq S \subseteq M_{mn}(R)$

บทตั้ง 2.2 [1] ให้ T และ Γ เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ $M_{mn}(R)$ และ $M_{nm}(R)$ ตามลำดับ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ T^{tr} เป็น Γ^{tr}–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$

โดยทฤษฎีบท 2.1 และ บทตั้ง 2.2 ทำให้ได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

บทแทรก 2.3 สำหรับ $k \in N_m$ ให้ $j \in N_n$ และ $i_1, i_2, \ldots, i_k \in N_m$ โดยที่ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i_\gamma j} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ– กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $M = \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

($\rightarrow$) สมมติว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยบทตั้ง 2.2 ทำให้ได้ว่า T^{tr} เป็น Γ^{tr}–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$ จะเห็นว่า

$$T^{tr} = \left\{[a_{rs}] \in M_{nm}(R) \mid a_{j i_\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\} \text{ และ}$$

$$M^{tr} = \{[b_{pq}] \in M_{mn}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ และ } q \neq j\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1 ทำให้ได้ว่า $\Gamma^{tr} \subseteq M^{tr}$ เพราะฉะนั้น $\Gamma \subseteq M$

($\leftarrow$) สมมติว่า $\Gamma \subseteq M$ ดังนั้น $\Gamma^{tr} \subseteq M^{tr}$ จึงได้ว่า T^{tr} เป็น Γ^{tr}–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$ เพราะฉะนั้น T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 1.9 โดยการกำหนดให้ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ k ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกัน มีค่าไม่เป็น 0

ทฤษฎีบท 2.4 สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R\backslash\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \ldots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \left\{ \left[b_{xy}\right] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \backslash \{i\}, \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ } \forall x \in N_n \backslash \left\{j_1, j_2, \ldots, j_k\right\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0 \right\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $M = \left\{ \left[b_{xy}\right] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \backslash \{i\}, \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ } \forall x \in N_n \backslash \left\{j_1, j_2, \ldots, j_k\right\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0 \right\}$

$(\rightarrow)$ สมมติว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ และสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี $p \in N_n \backslash \left\{j_1, j_2, \ldots, j_k\right\}$ ที่ทำให้ $b_{pi} \neq 0$

เลือก $\left[a_{r\beta}\right], \left[c_{\alpha v}\right] \in T$ ซึ่ง $a_{i\beta} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 + 1 - \lambda_1 \sum_{t=1}^{k} \lambda_t b_{j_t i}}{\lambda_1 b_{pi}}, & \text{ถ้า } \beta = p \\ 0, & \text{ถ้า } \beta \in N_n \backslash \left\{j_1, j_2, \ldots, j_k, p\right\} \end{cases}$

และ $c_{\alpha j_1} = 0$ สำหรับทุกๆ $\alpha \neq i$

จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_1}$

$$=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta i}c_{ij_1}$$

$$=\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}b_{j_t i}c_{ij_1}+a_{ip}b_{pi}c_{ij_1}$$

$$=\left(\sum_{t=1}^{k}\lambda_t b_{j_t i}\right)\lambda_1+\left(\frac{\lambda_1+1-\lambda_1\sum_{t=1}^{k}\lambda_t b_{j_t i}}{\lambda_1 b_{pi}}\right)b_{pi}\lambda_1$$

$=\lambda_1+1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $b_{pi}=0$ สำหรับทุกๆ $p\in N_n \setminus\{j_1,j_2,...,j_k\}$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\left[a_{r\beta}\right],\left[c_{\alpha v}\right]\in T$ จะได้ว่า

$$\lambda_1=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta i}c_{ij_1}=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}b_{j_t i}c_{ij_1}$$

$$=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\lambda_1\sum_{\gamma=1}^{k}a_{ij_\gamma}b_{j_\gamma i}$$

ต่อไปสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี $p\in N_n \setminus\{j_1,j_2,...,j_k\}$ มี $t\in N_m \setminus\{i\}$ ที่ทำให้ $b_{pt}\neq 0$

ให้ $\left[a_{r\beta}\right],\left[c_{\alpha v}\right]\in T$ ซึ่ง

$$a_{i\beta}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1+1-\sum_{\gamma=1}^{k}a_{ij_\gamma}b_{j_\gamma t}-\lambda_1\sum_{\gamma=1}^{k}a_{ij_\gamma}b_{j_\gamma i}}{b_{pt}}, & \text{ถ้า } \beta=p\\ 0, & \text{ถ้า } \beta\in N_n\setminus\{j_1,j_2,...,j_k,p\}\end{cases}$$

และ $c_{\alpha j_1} = \begin{cases} 1, & \alpha = t \\ 0, & \alpha \in N_m \setminus \{i,t\} \end{cases}$

จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq i}}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_1} + \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta t} + \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i}$

$$= \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma t} + a_{ip} b_{pt} + \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} = \lambda_1 + 1$$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ทุกๆ $p \in N_n \setminus \{ j_1, j_2, ..., j_k \}$ และทุกๆ $t \in N_m \setminus \{i\}$ ทำให้ $b_{pt} = 0$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $[a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T$ จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma \alpha} c_{\alpha j_1}$

ในขั้นสุดท้ายเราสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี $u \in N_m \setminus \{i\}$ ที่ทำให้ $\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u} \neq 0$

เลือก $[c_{\alpha v}] \in T$ ซึ่ง $c_{\alpha j_1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 + 1 - \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i}}{\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u}}, & \text{ถ้า } \alpha = u \\ 0, & \text{ถ้า } \alpha \in N_m \setminus \{i,u\} \end{cases}$

จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} c_{ij_1} + \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u} c_{uj_1} = \lambda_1 + 1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ทุกๆ $u \in N_m \setminus \{i\}$ ทำให้ $\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u} = 0$ ยิ่งไปกว่านั้น $\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} = 1$

สรุปได้ว่า $\Gamma \subseteq M$

($\leftarrow$) สมมติ $\Gamma \subseteq M$ และ กำหนดให้ $[a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T$ และ $[b_{\beta\alpha}] \in \Gamma$

ให้ $v \in \{ j_1, j_2, ..., j_k \}$

จะได้ว่า $\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha v} = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma \alpha} c_{\alpha v} = \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} c_{iv} = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} c_{iv} = c_{iv} = \lambda_v$

ส่วนที่เหลือต่อจากนี้เราจะศึกษาบน $M_n(R)$ เซตของเมทริกซ์จตุรัสขนาด $n \times n$ บนจำนวนจริงที่นิยมนำมาศึกษาบ่อยๆ เช่น เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง และ เซตของเมทริกซ์ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็น 0

การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปจะสะดวกขึ้น เมื่อเราทราบบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2.5 [1] ให้ $i, p \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $i \neq p$ และ $q \neq j$

ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0$ และ $a_{pq} = 0\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_{nm}(R) \mid b_{jp}, b_{qi} \in R$ นอกนั้นเป็น $0\}$

โดยใช้บทตั้ง 2.5 ทำให้เราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 2.6 ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0$ ทุกๆ $i \in N_2\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_2(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_2(R) \mid b_{12}, b_{21} \in R$ นอกนั้นเป็น $0\}$

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq 3$ และ $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0$ ทุกๆ $i \in N_n\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma = \{0\}$

บทพิสูจน์($\rightarrow$) เราพิสูจน์โดยการพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่ โดยสมมติว่า $\Gamma \neq \{0\}$ ดังนั้น จะมีเมทริกซ์ $[b_{xy}] \in \Gamma$ โดยที่ $b_{pq} \neq 0$ สำหรับบางจำนวนนับ $p, q \in N_n$ เราจะแสดงว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ โดยแสดงว่า $T\Gamma T \not\subset T$ และแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี คือ $p = q$ และ $p \neq q$

กรณี 1 $p = q$

กรณีย่อย 1.1 $p = 1$

นั่นคือ $b_{11} \neq 0$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{nj} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & j=1 \\ 0, \text{ ถ้า } & j \neq 1 \end{cases}$ และ $c_{in} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & i=1 \\ 0, \text{ ถ้า } & i \neq 1 \end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{n\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{n1} b_{1\alpha} c_{\alpha n} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{1\alpha} c_{\alpha n} = b_{11} \neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 1.2 $p \neq 1$

นั่นคือ $b_{pp} \neq 0$ เมื่อ $p \neq 1$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{1j} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & j=p \\ 0, \text{ ถ้า } & j \neq p \end{cases}$ และ $c_{i1} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & i=p \\ 0, \text{ ถ้า } & i \neq p \end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{1\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{1p} b_{p\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{p\alpha} c_{\alpha 1} = b_{pp} \neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณี 2 $p \neq q$

กรณีย่อย 2.1 $p=1$ หรือ $q=1$

สมมติว่า $p=1$ ดังนั้น $q \neq 1$ และ $b_{1q} \neq 0$

เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้ $q \neq n$ และ $q=n$

กรณีย่อย 2.1.1 $q \neq n$

เลือก $\left[a_{rs}\right],\left[c_{uv}\right]\in T$ โดยที่ $a_{nj}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } j=1\\ 0, \text{ ถ้า } j\neq 1\end{cases}$ และ $c_{in}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } i=q\\ 0, \text{ ถ้า } i\neq q\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{n\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha n}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{n1}b_{1\alpha}c_{\alpha n}=b_{1q}\neq 0$

ดังนั้น $\left[a_{rs}\right]\left[b_{xy}\right]\left[c_{uv}\right]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.1.2 $q=n$

เลือก $\left[a_{rs}\right],\left[c_{uv}\right]\in T$ โดยที่ $a_{2j}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } j=1\\ 0, \text{ ถ้า } j\neq 1\end{cases}$ และ $c_{i2}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } i=n\\ 0, \text{ ถ้า } i\neq n\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{2\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha 2}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{21}b_{1\alpha}c_{\alpha 2}=b_{1q}\neq 0$

ดังนั้น $\left[a_{rs}\right]\left[b_{xy}\right]\left[c_{uv}\right]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

ต่อไปสมมติว่า $q=1$ ดังนั้น $p\neq 1$ และ $b_{p1}\neq 0$

เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้ $p\neq n$ และ $p=n$

กรณีย่อย 2.1.3 $p\neq n$

เลือก $\left[a_{rs}\right],\left[c_{uv}\right]\in T$ โดยที่ $a_{nj}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } j=p\\ 0, \text{ ถ้า } j\neq p\end{cases}$ และ $c_{in}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } i=1\\ 0, \text{ ถ้า } i\neq 1\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{n\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha n}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{np}b_{p\alpha}c_{\alpha n}=b_{p1}\neq 0$

ดังนั้น $\left[a_{rs}\right]\left[b_{xy}\right]\left[c_{uv}\right]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.1.4 $p=n$

เลือก $\left[a_{rs}\right],\left[c_{uv}\right]\in T$ โดยที่ $a_{2j}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } & j=p\\ 0, \text{ ถ้า } & j\neq p\end{cases}$ และ $c_{i2}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } & i=1\\ 0, \text{ ถ้า } & i\neq 1\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{2\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha 2}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{2p}b_{p\alpha}c_{\alpha 2}=b_{p1}\neq 0$

ดังนั้น $\left[a_{rs}\right]\left[b_{xy}\right]\left[c_{uv}\right]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.2 $p\neq 1$ และ $q\neq 1$

นั่นคือ $b_{pq}\neq 0$ เมื่อ $p\neq 1$ และ $q\neq 1$

เลือก $\left[a_{rs}\right],\left[c_{uv}\right]\in T$ โดยที่ $a_{1j}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } & j=p\\ 0, \text{ ถ้า } & j\neq p\end{cases}$ และ $c_{i1}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } & i=q\\ 0, \text{ ถ้า } & i\neq q\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{1\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha 1}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{1p}b_{p\alpha}c_{\alpha 1}=\sum_{\alpha=1}^{n}b_{p\alpha}c_{\alpha 1}=b_{pq}\neq 0$

ดังนั้น $\left[a_{rs}\right]\left[b_{xy}\right]\left[c_{uv}\right]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

จากทุกกรณีสรุปได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

($\leftarrow$) เห็นได้ชัดว่า ถ้า $\Gamma=\{0\}$ แล้ว T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

ทฤษฎีบทสุดท้าย เราพิจารณาบนเซตของเมทริกซ์แนวเฉียง ซึ่งเซตของเมทริกซ์แนวเฉียงเป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของเมทริกซ์ ทำให้ได้ว่า เมื่อ T คือ เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง จะได้ $T\,\Gamma\,T\subseteq T$ สำหรับทุกๆ$\emptyset\neq\Gamma\subseteq T$ แสดงให้เห็นว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ สำหรับทุกๆ $\emptyset\neq\Gamma\subseteq T$

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ $T=\{[a_{rs}]\in M_n(R)\mid a_{ij}=0 \text{ เมื่อ } i\neq j\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma\subseteq T$

บทพิสูจน์ ($\rightarrow$) สมมติว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ และให้ $[b_{xy}]\in\Gamma$

กำหนดให้ $p, q \in N_n$ โดยที่ $p \neq q$ และ เลือก $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{pp} = 1$ และ $c_{qq} = 1$

จะได้ว่า $0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{p\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha q} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{pp} b_{p\alpha} c_{\alpha q} = a_{pp} b_{pq} c_{qq} = b_{pq}$ ดังนั้น $[b_{xy}] \in T$
สรุปได้ว่า $\Gamma \subseteq T$

$(\leftarrow)$ เห็นได้ชัดว่า ถ้า $\Gamma \subseteq T$ แล้ว T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

3. สรุป

บทความวิจัยชิ้นนี้ได้สร้างทฤษฎีบทที่เป็นการวางนัยทั่วไปกว่าเดิม นั่นคือ ทฤษฎีบท 2.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 1.8 และ ทฤษฎีบท 2.4 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 1.9 นอกจากนี้ เรายังศึกษารูปแบบของ เซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 (บทแทรก 2.6 และ ทฤษฎีบท 2.7) และ เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง (ทฤษฎีบท 2.8)

ผลจากงานวิจัยข้างต้นทำให้ได้ตัวอย่างของเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ $M_{mn}(R)$ ตามกำหนด ส่งผลให้ได้รับความสะดวกในการขยายงานวิจัยในอนาคต เช่น การศึกษารูปแบบของ เซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ซึ่ง T เป็นไอดีลของ $M_{mn}(R)$ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง (References)

[1] Khumprapussorn, T., 2006. Some Γ–semigroup. M.Sc. Thesis, Chulalongkorn university.

[2] Saha, N.K. and Sen, M.K., 1986. On Γ–semigroup-I. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 78, 180-186.

[3] Saha, N.K., 1987. On Γ–semigroup-II. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 79, 331-335.

[4] Saha, N.K., 1988. On Γ–semigroup-III. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 80, 1-12.