

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$

The Positive Integer Solutions of the Diophantine Equation  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$

ภควดี สุดสงวน\* และวารกรณ์ สุดสงวน

Pakawadee Sudsanguan\* and Warakorn Sudsanguan

สาขาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์

Department of Mathematics and Applied Statistics, Faculty of Science and Technology, Rajabhat Rajanagarindra University, Thailand

\*Corresponding author; E-mail: pakawadee.sri@rru.ac.th

Received: 30 January 2024 /Revised: 23 April 2024 /Accepted: 23 April 2024

### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$  โดยใช้วิธีการคือ พิจารณาช่วงของ  $x, y$  และ  $z$  ที่มีค่าสอดคล้องกับสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$  ซึ่งพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ กรณีที่ 1 ให้  $x \leq y \leq z$  หรือ  $x \leq z \leq y$  กรณีที่ 2 ให้  $y < x \leq z$  หรือ  $y < z < x$  และกรณีที่ 3 ให้  $z < x \leq y$  หรือ  $z < y < x$  จากนั้นจึงทำการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลย สรุปว่าได้ผลเฉลยทั้งหมด 380 ผลเฉลย

**คำสำคัญ:** สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อคาดการณ์แอร์ดิช-แชส

### Abstract

This research aimed to show the positive integer solutions of the Diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$  using the method of considering the range of  $x, y$  and  $z$  which has a value consistent with the Diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$ . We considered 3 cases. Let case 1, 2 and 3 were  $x \leq y \leq z$  or  $x \leq z \leq y$ , let  $y < x \leq z$  or  $y < z < x$  and let  $z < x \leq y$  or  $z < y < x$ , respectively. Then, the equation was solved to find the solutions. In conclusion, a total of 380 solutions were obtained.

**Keywords:** Diophantine equation, Positive integer solutions, Erdos-strauss conjecture

## บทนำ

ในปี ค.ศ. 1948 มีการค้นพบสมการไดโอแฟนไทน์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{n} \quad (1)$$

เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง ซึ่งเป็นที่รู้จักในชื่อข้อคาดการณ์แอร์ดิช-แซส โดยข้อคาดการณ์นี้เป็นปัญหาที่ยังเปิดรอคำตอบที่กล่าวไว้ว่า (1) มี  $x, y$  และ  $z$  เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่  $x \neq y, y \neq z$  และ  $z \neq x$

ในปี ค.ศ. 2013 Rabago and Tagle ได้ศึกษาปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของของแข็งซึ่งปัญหานี้นำไปสู่การหาผลเฉลยของสมการไดโอ

แฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2019 อภิสัทธ์ ภาค

พงศ์พันธุ์ ได้หาผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$$

ถัดมาในปี ค.ศ. 2020 Atri ได้หาผลเฉลย

สมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$  ในกรณี

$x \leq y \leq z$  และ  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$  ในกรณี

$$x \leq y \leq z \leq t^4$$

นอกจากนี้ในปี ค.ศ. 2022 Chinram et al. ได้หาผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{3}$  และ Srimud et al. ได้หาผลเฉลย

สมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้แสดงการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟน

ไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$

## การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการหาผลเฉลย

ของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$

โดยเริ่มต้นจากการหาค่าเริ่มต้นของ  $x$  ที่เหมาะสมซึ่งได้จากการพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4} \text{ พบว่า } \frac{1}{x} < \frac{1}{4} \text{ นั่นคือ } x \geq 5$$

จากนั้นดำเนินการหาค่าเริ่มต้นของ  $y$  และ  $z$

โดยทำนองเดียวกันกับการหาค่าเริ่มต้นของ  $x$  ซึ่ง

จะได้ว่า  $y \geq 9$  และ  $z \geq 17$  โดยเราสนใจผลเฉลยที่

เป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น การหาผลเฉลยนั้นจะ

พิจารณาเป็น 3 กรณี ดังต่อไปนี้

**กรณีที่ 1** ให้  $x \leq y \leq z$  หรือ  $x \leq z \leq y$  จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{7}{x} \text{ ส่งผลให้ } 5 \leq x \leq 28$$

ถ้า  $x = 5$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{20}$  (2)

ถ้า  $x = 6$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{12}$  (3)

ถ้า  $x = 7$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{28}$  (4)

ถ้า  $x = 8$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{8}$  (5)

ถ้า  $x = 9$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{5}{36}$  (6)

ถ้า  $x = 10$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{20}$  (7)

ถ้า  $x = 11$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{7}{44}$  (8)

ถ้า  $x = 12$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{6}$  (9)

ถ้า  $x = 13$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{9}{52}$  (10)

ถ้า  $x = 14$  แล้ว  $\frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{5}{28}$  (11)

$$\text{ถ้า } x=15 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{11}{60} \quad (12)$$

$$\text{ถ้า } x=16 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{16} \quad (13)$$

$$\text{ถ้า } x=17 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{13}{68} \quad (14)$$

$$\text{ถ้า } x=18 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{7}{36} \quad (15)$$

$$\text{ถ้า } x=19 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{15}{76} \quad (16)$$

$$\text{ถ้า } x=20 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{5} \quad (17)$$

$$\text{ถ้า } x=21 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{17}{84} \quad (18)$$

$$\text{ถ้า } x=22 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{9}{44} \quad (19)$$

$$\text{ถ้า } x=23 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{19}{92} \quad (20)$$

$$\text{ถ้า } x=24 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{5}{24} \quad (21)$$

$$\text{ถ้า } x=25 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{21}{100} \quad (22)$$

$$\text{ถ้า } x=26 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{11}{52} \quad (23)$$

$$\text{ถ้า } x=27 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{23}{108} \quad (24)$$

$$\text{ถ้า } x=28 \text{ แล้ว } \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{14} \quad (25)$$

จากนั้นทำการจัดรูป (2) ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. นำ ค.ร.น. ของตัวส่วนทั้งหมดใน (2) คูณตลอดสมการ (2)

2. ทำการแยกตัวประกอบของ (2) ได้เป็น  $(y-40)(z-80)=3200$

3. ดำเนินการหาผลเฉลยโดยสามารถแบ่งกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด 24 กรณี ดังนี้

$$y-40=1, z-80=3200; \quad y-40=3200, z-80=1$$

$$y-40=2, z-80=1600; \quad y-40=1600, z-80=2$$

$$y-40=4, z-80=800; \quad y-40=800, z-80=4$$

$$y-40=5, z-80=640; \quad y-40=640, z-80=5$$

$$y-40=8, z-80=400; \quad y-40=400, z-80=8$$

$$y-40=10, z-80=320; \quad y-40=320, z-80=10$$

$$y-40=16, z-80=200; \quad y-40=200, z-80=16$$

$$y-40=20, z-80=160; \quad y-40=160, z-80=20$$

$$y-40=25, z-80=128; \quad y-40=128, z-80=25$$

$$y-40=32, z-80=100; \quad y-40=100, z-80=32$$

$$y-40=40, z-80=80; \quad y-40=80, z-80=40$$

$$y-40=50, z-80=64; \quad y-40=64, z-80=50$$

จะได้ผลเฉลยของ  $(y-40)(z-80)=3200$  คือ

$$(x, y, z) = (5, 41, 3280), (5, 42, 1680), (5, 140, 112),$$

$$(5, 44, 880), (5, 45, 720), (5, 3240, 81), (5, 104, 130)$$

$$(5, 1640, 82), (5, 840, 84), (5, 680, 85), (5, 120, 120)$$

$$(5, 65, 208), (5, 72, 180), (5, 80, 160), (5, 90, 144),$$

$$(5, 48, 480), (5, 50, 400), (5, 56, 280), (5, 60, 240),$$

$$(5, 1640, 82), (5, 840, 84), (5, 680, 85), (5, 440, 88),$$

$$(5, 360, 90), (5, 240, 96), (5, 200, 100), (5, 168, 105),$$

ทำการจัดรูป (3), (5), (9) และ (17) ในทำนอง

เดียวกันกับ (2) ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น จะได้ว่า

$$\text{จาก (3) จัดรูปใหม่ได้เป็น } (y-24)(z-48)=1152$$

$$\text{จาก (5) จัดรูปใหม่ได้เป็น } (y-16)(z-32)=512$$

$$\text{จาก (9) จัดรูปใหม่ได้เป็น } (y-12)(z-24)=288$$

$$\text{จาก (17) จัดรูปใหม่ได้เป็น } (y-10)(z-20)=200$$

จากนั้นทำการหาผลเฉลยของ (3), (5), (9) และ

(17) ในทำนองเดียวกันกับ (2)

$$\text{จะพบว่าผลเฉลยของ (3) คือ } (x, y, z) = (6, 25, 1200),$$

$$(6, 26, 624), (6, 27, 432), (6, 28, 336), (6, 30, 240),$$

$$(6, 32, 192), (6, 33, 176), (6, 36, 144), (6, 40, 120),$$

$$(6, 42, 112), (6, 48, 96), (6, 56, 48), (6, 1176, 49),$$

$$(6, 408, 51), (6, 312, 52), (6, 216, 54), (6, 168, 56),$$

$$(6, 152, 57), (6, 120, 60), (6, 96, 64), (6, 88, 66),$$

$$(6, 600, 50), (6, 72, 72) \text{ และ } (6, 60, 80)$$

จะพบว่าผลเฉลยของ (5) คือ  $(x, y, z) = (8, 17, 544), (8, 18, 288), (8, 20, 160), (8, 24, 96), (8, 32, 64), (8, 272, 34), (8, 144, 36), (8, 80, 40), (8, 528, 33),$  และ  $(8, 48, 48)$

จะพบว่าผลเฉลยของ (9) คือ  $(x, y, z) = (12, 13, 312), (12, 14, 168), (12, 15, 120), (12, 16, 96), (12, 18, 72), (12, 20, 60), (12, 21, 56), (12, 24, 48), (12, 28, 42), (12, 300, 25), (12, 156, 26), (12, 108, 27), (12, 84, 28), (12, 60, 30), (12, 48, 32), (12, 44, 33), (12, 36, 36)$  และ  $(12, 30, 40)$

จะพบว่าผลเฉลยของ (17) คือ  $(x, y, z) = (20, 20, 40), (20, 210, 21), (20, 110, 22), (20, 60, 24), (20, 50, 25), (20, 35, 28)$  และ  $(20, 30, 30)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (4) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $z \leq y$  จะได้  $\frac{3}{28} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  $z \leq 56$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 56$

กรณีที่  $y \leq z$  จะได้  $\frac{3}{28} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  $y \leq 56$  แต่  $y \geq 9$  จึงได้ว่า  $9 \leq y \leq 56$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (4) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (7, 1064, 38), (7, 84, 48), (7, 56, 56), (7, 19, 2128), (7, 20, 560), (7, 21, 336), (7, 24, 168), (7, 28, 112), (7, 33, 112), (7, 280, 40), (7, 168, 42), (7, 35, 80), (7, 40, 70)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (6) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $z \leq y$  จะได้  $\frac{5}{36} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  $z \leq 43$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 43$

กรณีที่  $y \leq z$  จะได้  $\frac{5}{36} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้

$y \leq 43$  แต่  $y \geq 9$  จึงได้ว่า  $9 \leq y \leq 43$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (6) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (9, 2088, 29), (9, 360, 30), (9, 144, 32), (9, 72, 36), (9, 15, 720), (9, 16, 288), (9, 18, 144), (9, 24, 72), (9, 36, 48)$  และ  $(9, 40, 45)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (7) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $z \leq y$  จะได้  $\frac{3}{20} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้

$z \leq 40$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 40$

กรณีที่  $y \leq z$  จะได้  $\frac{3}{20} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$

ทำให้  $y \leq 40$  เนื่องจาก  $x = 10$  และ  $x \leq y$  จึงทำให้  $y \geq 10$  จึงได้ว่า  $10 \leq y \leq 40$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป

ได้ว่า (7) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (10, 1080, 27), (10, 280, 28), (10, 120, 30), (10, 80, 32), (10, 56, 35), (10, 40, 40), (10, 14, 560), (10, 15, 240), (10, 16, 160), (10, 20, 80), (10, 24, 60)$  และ  $(10, 30, 48)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (8) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $z \leq y$  จะได้  $\frac{7}{44} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้

$z \leq 37$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 37$

กรณีที่  $y \leq z$  จะได้  $\frac{7}{44} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้

$y \leq 37$  เนื่องจาก  $x = 11$  และ  $x \leq y$  จึงทำให้  $y \geq 11$  จึงได้ว่า  $11 \leq y \leq 37$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น พบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (8) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (10) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{9}{52} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 34$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 34$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{9}{52} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 34$  เนื่องจาก  $x = 13$  และ  $x \leq y$  จึงทำ  
ให้  $y \geq 13$  จึงได้ว่า  $13 \leq y \leq 34$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (10) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (13, 312, 24),$   
 $(13, 104, 26)$  และ  $(13, 13, 208)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (11) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{5}{28} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 33$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 33$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{5}{28} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 33$  เนื่องจาก  $x = 14$  และ  $x \leq y$  จึงทำ  
ให้  $y \geq 14$  จึงได้ว่า  $14 \leq y \leq 33$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (11) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (14, 168, 24),$   
 $(14, 56, 28), (14, 14, 112), (14, 21, 48), (14, 24, 42)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (12) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{11}{60} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 32$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 32$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{11}{60} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 32$  เนื่องจาก  $x = 15$  และ  $x \leq y$  จึงทำ  
ให้  $y \geq 15$  จึงได้ว่า  $15 \leq y \leq 32$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (12) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (15, 1320, 22),$   
 $(15, 120, 24), (15, 40, 30), (15, 15, 80), (15, 20, 48)$   
และ  $(15, 24, 40)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (13) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{3}{16} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 32$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 32$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{3}{16} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 32$  เนื่องจาก  $x = 16$  และ  $x \leq y$  จึงทำ  
ให้  $y \geq 16$  จึงได้ว่า  $16 \leq y \leq 32$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (13) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (16, 352, 22),$   
 $(16, 96, 24), (16, 32, 32)$  และ  $(16, 16, 64)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (14) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{13}{68} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 31$  แต่  $z \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq z \leq 31$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{13}{68} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 31$  เนื่องจาก  $x = 17$  และ  $x \leq y$  จึงทำ  
ให้  $y \geq 17$  จึงได้ว่า  $17 \leq y \leq 31$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (14) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (17, 2856, 21)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (15) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{7}{36} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 30$  เนื่องจาก  $x = 18$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า

$18 \leq z \leq 30$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{7}{36} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 30$  เนื่องจาก  $x=18$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $18 \leq y \leq 30$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (15) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (18, 504, 21)$ ,  
 $(18, 72, 24)$ ,  $(18, 18, 48)$  และ  $(18, 24, 36)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (16) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{15}{76} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 30$  เนื่องจาก  $x=19$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $19 \leq z \leq 30$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{15}{76} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 30$  เนื่องจาก  $x=19$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $19 \leq y \leq 30$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น  
พบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า  
(16) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (18) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{17}{84} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 29$  เนื่องจาก  $x=21$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $21 \leq z \leq 29$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{17}{84} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 29$  เนื่องจาก  $x=21$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $21 \leq y \leq 29$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (18) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (21, 168, 21)$   
และ  $(21, 56, 24)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (19) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{9}{44} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 29$  เนื่องจาก  $x=22$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $22 \leq z \leq 29$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{9}{44} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 29$  เนื่องจาก  $x=22$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $22 \leq y \leq 29$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (19) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (22, 88, 22)$   
และ  $(22, 24, 33)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (20) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{19}{92} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 29$  เนื่องจาก  $x=23$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $23 \leq z \leq 29$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{19}{92} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 29$  เนื่องจาก  $x=23$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $23 \leq y \leq 29$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น  
พบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า  
(20) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (21) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{5}{24} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 24$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $24 \leq z \leq 28$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{5}{24} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 24$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $24 \leq y \leq 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (21) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (24, 48, 24)$   
และ  $(24, 24, 32)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (22) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{21}{100} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 25$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $25 \leq z \leq 28$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{21}{100} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำให้  
 $y \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 25$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $25 \leq y \leq 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (22) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (25, 40, 25)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (23) สามารถแบ่งได้เป็น  
2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{11}{52} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำ  
ให้  $z \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 26$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $26 \leq z \leq 28$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{11}{52} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำ  
ให้  $y \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 26$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $26 \leq y \leq 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น พบว่า  
ผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (23)  
ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (24) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{23}{108} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 27$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $27 \leq z \leq 28$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{23}{108} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำ  
ให้  $y \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 27$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $27 \leq y \leq 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น พบว่า  
ผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (24)  
ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (25) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $z \leq y$  จะได้  $\frac{3}{14} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 28$  และ  $x \leq z$  จึงได้ว่า  
 $z = 28$

กรณี  $y \leq z$  จะได้  $\frac{3}{14} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{6}{y}$  ทำ  
ให้  $y \leq 28$  เนื่องจาก  $x = 28$  และ  $x \leq y$  จึงได้ว่า  
 $y = 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (25) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (28, 28, 28)$

**กรณีที่ 2** ให้  $y < x \leq z$  หรือ  $y \leq z < x$  จะได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} \leq \frac{7}{y} \text{ ส่งผลให้ } 9 \leq y \leq 28$$

$$\text{ถ้า } y=9 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{36} \quad (26)$$

$$\text{ถ้า } y=10 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{20} \quad (27)$$

$$\text{ถ้า } y=11 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{3}{44} \quad (28)$$

$$\text{ถ้า } y=12 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{12} \quad (29)$$

$$\text{ถ้า } y=13 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{5}{52} \quad (30)$$

$$\text{ถ้า } y=14 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{3}{28} \quad (31)$$

$$\text{ถ้า } y=15 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{7}{60} \quad (32)$$

$$\text{ถ้า } y=16 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{8} \quad (33)$$

$$\text{ถ้า } y=17 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{9}{68} \quad (34)$$

$$\text{ถ้า } y=18 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{5}{36} \quad (35)$$

$$\text{ถ้า } y=19 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{11}{76} \quad (36)$$

$$\text{ถ้า } y=20 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{3}{20} \quad (37)$$

$$\text{ถ้า } y=21 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{13}{84} \quad (38)$$

$$\text{ถ้า } y=22 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{7}{44} \quad (39)$$

$$\text{ถ้า } y=23 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{15}{92} \quad (40)$$

$$\text{ถ้า } y=24 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{1}{6} \quad (41)$$

$$\text{ถ้า } y=25 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{17}{100} \quad (42)$$

$$\text{ถ้า } y=26 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{9}{52} \quad (43)$$

$$\text{ถ้า } y=27 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{19}{108} \quad (44)$$

$$\text{ถ้า } y=28 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{4}{z} = \frac{5}{28} \quad (45)$$

จากนั้นทำการจัดรูป (26) ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. นำ ค.ร.น. ของตัวส่วนทั้งหมดใน (26)

คูณตลอดสมการ (26)

2. ทำการแยกตัวประกอบของ (26) ได้เป็น

$$(x-36)(z-144)=5184$$

3. ดำเนินการหาผลเฉลยโดยสามารถแบ่ง

กรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด 35 กรณี ดังนี้

$x-36=1, z-144=5184;$	$x-36=5184, z-144=1$
$x-36=2, z-144=2592;$	$x-36=2592, z-144=2$
$x-36=3, z-144=1728;$	$x-36=1728, z-144=3$
$x-36=4, z-144=1296;$	$x-36=1296, z-144=4$
$x-36=6, z-144=864;$	$x-36=864, z-144=6$
$x-36=8, z-144=648;$	$x-36=648, z-144=8$
$x-36=9, z-144=576;$	$x-36=576, z-144=9$
$x-36=12, z-144=432;$	$x-36=432, z-144=12$
$x-36=16, z-144=324;$	$x-36=324, z-144=16$
$x-36=18, z-144=288;$	$x-36=288, z-144=18$
$x-36=24, z-144=216;$	$x-36=216, z-144=24$
$x-36=27, z-144=192;$	$x-36=192, z-144=27$
$x-36=32, z-144=162;$	$x-36=162, z-144=32$
$x-36=36, z-144=144;$	$x-36=144, z-144=36$
$x-36=48, z-144=108;$	$x-36=108, z-144=48$
$x-36=54, z-144=96;$	$x-36=96, z-144=54$
$x-36=64, z-144=81;$	$x-36=81, z-144=64$
$x-36=72, z-144=72;$	

จะได้ผลเฉลยของ  $(x-36)(z-144)=5184$  คือ

$$(x, y, z) = (37, 9, 5328), (38, 9, 2736), (39, 9, 1872),$$

$$(40, 9, 1440), (42, 9, 1008), (44, 9, 792), (45, 9, 720),$$

$$(48, 9, 576), (52, 9, 468), (54, 9, 432), (60, 9, 360),$$

$$(63, 9, 336), (68, 9, 306), (72, 9, 288), (84, 9, 252),$$

$$(90, 9, 240), (100, 9, 225), (108, 9, 216), (5220, 9, 145),$$

$$(684, 9, 152), (612, 9, 153), (468, 9, 156), (360, 9, 160),$$

$$(2628, 9, 146), (1764, 9, 147), (1332, 9, 148), (900, 9, 150),$$

$$(684, 9, 152), (612, 9, 153), (468, 9, 156), (360, 9, 160),$$

$$(324, 9, 162), (252, 9, 168), (228, 9, 171), (198, 9, 176),$$

$$(180, 9, 180), (144, 9, 192), (132, 9, 198), (117, 9, 208)$$

ทำการจัดรูป (27), (29), (33) และ (41) ในทำนองเดียวกันกับ (26) ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น จะได้ว่า

จาก (27) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-20)(z-80)=1600$

จาก (29) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-12)(z-48)=576$

จาก (33) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-8)(z-32)=256$

จาก (41) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-6)(z-24)=144$

จากนั้นทำการหาผลเฉลยของ (27), (29), (33) และ (41) ในทำนองเดียวกันกับ (26)

จะพบว่า ผลเฉลยของ (27) คือ

$(x, y, z) = (21, 10, 1680), (22, 10, 880), (24, 10, 480), (25, 10, 400), (28, 10, 280), (30, 10, 240), (36, 10, 180), (40, 10, 160), (45, 10, 144), (52, 10, 130), (60, 10, 120), (1620, 10, 81), (820, 10, 82), (420, 10, 84), (340, 10, 85), (220, 10, 88), (180, 10, 90), (120, 10, 96), (100, 10, 100), (84, 10, 105)$  และ  $(70, 10, 112)$

ผลเฉลยของ (29) คือ  $(x, y, z) = (13, 12, 624), (14, 12, 336), (15, 12, 240), (16, 12, 192), (18, 12, 144), (20, 12, 120), (21, 12, 112), (24, 12, 96), (28, 12, 84), (30, 12, 80), (36, 12, 72), (588, 12, 49), (300, 12, 50), (204, 12, 51), (156, 12, 52), (108, 12, 54), (81, 12, 56), (76, 12, 57), (60, 12, 60), (48, 12, 64), (44, 12, 66)$

ผลเฉลยของ (33) คือ  $(x, y, z) = (24, 16, 48), (264, 16, 33), (136, 16, 34), (72, 16, 36)$  และ  $(40, 16, 40)$

ผลเฉลยของ (41) คือ  $(x, y, z) = (150, 24, 25), (78, 24, 26), (54, 24, 27), (42, 24, 28)$  และ  $(30, 24, 30)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (28) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $x \leq z$  จะได้  $\frac{3}{44} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้

$x \leq 73$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 11$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 12$  นั่นคือ  $12 \leq x \leq 73$

กรณีที่  $z < x$  จะได้  $\frac{3}{44} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้

$z \leq 73$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 11$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 17$  นั่นคือ  $17 \leq z \leq 73$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (28) มีผลเฉลยคือ  $(x, y, z) = (15, 11, 2640), (16, 11, 704), (20, 11, 220), (22, 11, 176), (36, 11, 99), (44, 11, 88), (55, 11, 80), (2596, 11, 59), (660, 11, 60), (176, 11, 64)$  และ  $(132, 11, 66)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (30) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $x \leq z$  จะได้  $\frac{5}{52} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้

$x \leq 52$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 13$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 14$  นั่นคือ  $14 \leq x \leq 52$

กรณีที่  $z < x$  จะได้  $\frac{5}{52} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้

$z \leq 51$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 13$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 17$  นั่นคือ  $17 \leq z \leq 51$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (30) มีผลเฉลยคือ

$(x, y, z) = (52, 13, 52), (1092, 13, 42)$  และ  $(78, 13, 48)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (31) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่  $x \leq z$  จะได้  $\frac{3}{28} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้

$x \leq 46$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 14$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 15$  นั่นคือ  $15 \leq x \leq 46$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{3}{28} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 46$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=14$  และ  $y \leq z$   
จึงทำให้  $z \geq 17$  นั่นคือ  $17 \leq z \leq 46$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (31) มีผลเฉลยคือ  
 $(x, y, z) = (20, 14, 70), (28, 14, 56), (42, 14, 48),$   
 $(532, 14, 38), (140, 14, 40)$  และ  $(84, 14, 42)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (32) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{7}{60} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  
 $x \leq 42$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=15$  และ  $y < x$  จึง  
ทำให้  $x \geq 16$  นั่นคือ  $16 \leq x \leq 42$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{7}{60} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 42$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=15$  และ  $y \leq z$   
จึงทำให้  $z \geq 17$  นั่นคือ  $17 \leq z \leq 42$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (32) มีผลเฉลยคือ  
 $(x, y, z) = (20, 15, 60), (30, 15, 48), (36, 15, 45),$   
 $(420, 15, 35), (180, 15, 36)$  และ  $(60, 15, 40)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (34) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{9}{68} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  
 $x \leq 37$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=17$  และ  $y < x$  จึง  
ทำให้  $x \geq 18$  นั่นคือ  $18 \leq x \leq 37$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{9}{68} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 37$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=17$  และ  $y \leq z$   
จึงทำให้  $z \geq 17$  นั่นคือ  $17 \leq z \leq 37$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (34) มีผลเฉลยคือ  $(x, y, z) = (136, 17, 32)$   
และ  $(68, 17, 34)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (35) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{5}{36} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  
 $x \leq 36$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=18$  และ  $y < x$  จึง  
ทำให้  $x \geq 19$  นั่นคือ  $19 \leq x \leq 36$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{5}{36} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 35$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=18$  และ  $y \leq z$   
จึงทำให้  $z \geq 18$  นั่นคือ  $18 \leq z \leq 35$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (35) มีผลเฉลยคือ  
 $(x, y, z) = (20, 18, 45), (36, 18, 36),$   
 $(1044, 18, 29), (180, 18, 30)$  และ  $(72, 18, 32)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (36) สามารถแบ่งได้  
เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{11}{76} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  
 $x \leq 34$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=19$  และ  $y < x$  จึง  
ทำให้  $x \geq 20$  นั่นคือ  $20 \leq x \leq 34$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{11}{76} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  
 $z \leq 34$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=19$  และ  $y \leq z$   
จึงทำให้  $z \geq 19$  นั่นคือ  $19 \leq z \leq 34$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุป  
ได้ว่า (36) มีผลเฉลยคือ  $(x, y, z) = (532, 19, 28)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (37) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{3}{20} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  $x \leq 33$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 20$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 21$  นั่นคือ  $21 \leq x \leq 33$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{3}{20} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  $z \leq 33$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 20$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 20$  นั่นคือ  $20 \leq z \leq 33$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (37) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (28, 20, 35), (540, 20, 27), (140, 20, 28), (60, 20, 30)$  และ  $(40, 20, 32)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (38) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{13}{84} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  $x \leq 32$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 21$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 21$  นั่นคือ  $22 \leq x \leq 32$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{13}{84} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  $z \leq 32$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 21$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 21$  นั่นคือ  $21 \leq z \leq 32$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (38) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (1092, 21, 26)$  และ  $(84, 21, 28)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (39) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{7}{44} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  $x \leq 31$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 22$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 23$  นั่นคือ  $23 \leq x \leq 31$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{7}{44} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้

$z \leq 31$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 22$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 22$  นั่นคือ  $22 \leq z \leq 31$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น พบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (39) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (40) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{15}{92} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้

$x \leq 30$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 23$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 24$  นั่นคือ  $24 \leq x \leq 30$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{15}{92} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้

$z \leq 30$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 23$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 23$  นั่นคือ  $23 \leq z \leq 30$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น พบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (40) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (42) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{17}{100} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้

$x \leq 29$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y = 25$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 26$  นั่นคือ  $26 \leq x \leq 29$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{17}{100} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้

$z \leq 29$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y = 25$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 25$  นั่นคือ  $25 \leq z \leq 29$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (42) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (100, 25, 25)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (43) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{9}{52} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  $x \leq 28$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=26$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 27$  นั่นคือ  $27 \leq x \leq 28$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{9}{52} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  $z \leq 28$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=26$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 26$  นั่นคือ  $26 \leq z \leq 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (43) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (52, 26, 26)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (44) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{19}{108} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  $x \leq 28$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=27$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 28$  นั่นคือ  $x = 28$

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{19}{108} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  $z \leq 28$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=27$  และ  $y \leq z$  จึงทำให้  $z \geq 27$  นั่นคือ  $27 \leq z \leq 28$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (44) มีผลเฉลย คือ  $(x, y, z) = (36, 27, 27)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (45) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq z$  จะได้  $\frac{5}{28} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} \leq \frac{5}{x}$  ทำให้  $x \leq 28$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $y=28$  และ  $y < x$  จึงทำให้  $x \geq 29$  จะเห็นได้ว่าไม่มีค่า  $x$  ที่ตรงตามเงื่อนไขในกรณีนี้ จึงทำให้ไม่มีผลเฉลย

กรณี  $z < x$  จะได้  $\frac{5}{28} = \frac{1}{x} + \frac{4}{z} < \frac{5}{z}$  ทำให้  $z \leq 27$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $y=28$  และ  $y \leq z$

จึงทำให้  $z \geq 28$  จะเห็นได้ว่าไม่มีค่า  $z$  ที่ตรงตามเงื่อนไขในกรณีนี้ จึงทำให้ไม่มีผลเฉลย

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า (45) ไม่มีผลเฉลย

**กรณีที่ 3** ให้  $z < x \leq y$  หรือ  $z < y < x$  จะได้ได้ว่า

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} < \frac{7}{z} \text{ ส่งผลให้ } 17 \leq z \leq 27$$

$$\text{ถ้า } z=17 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{68} \quad (46)$$

$$\text{ถ้า } z=18 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{36} \quad (47)$$

$$\text{ถ้า } z=19 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{76} \quad (48)$$

$$\text{ถ้า } z=20 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{20} \quad (49)$$

$$\text{ถ้า } z=21 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{84} \quad (50)$$

$$\text{ถ้า } z=22 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{44} \quad (51)$$

$$\text{ถ้า } z=23 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{92} \quad (52)$$

$$\text{ถ้า } z=24 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{12} \quad (53)$$

$$\text{ถ้า } z=25 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{9}{100} \quad (54)$$

$$\text{ถ้า } z=26 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{52} \quad (55)$$

$$\text{ถ้า } z=27 \text{ แล้ว } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{108} \quad (56)$$

จากนั้นทำการจัดรูป (46) ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. นำ ค.ร.น. ของตัวส่วนทั้งหมดใน (46)

คูณตลอดสมการ (46)

2. ทำการแยกตัวประกอบของ (46) ได้เป็น

$$(x-68)(y-136) = 9248$$

3. ดำเนินการหาผลเฉลยโดยสามารถแบ่ง

กรณีที่ เป็นไปได้ทั้งหมด 18 กรณี ดังนี้

$$\begin{array}{ll}
 x-68=1, y-136=9248; & x-68=9248, y-136=1 \\
 x-68=2, y-136=4624; & x-68=4624, y-136=2 \\
 x-68=4, y-136=2312; & x-68=2312, y-136=4 \\
 x-68=8, y-136=1156; & x-68=1156, y-136=8 \\
 x-68=16, y-136=578; & x-68=578, y-136=16 \\
 x-68=17, y-136=544; & x-68=544, y-136=17 \\
 x-68=32, y-136=289; & x-68=289, y-136=32 \\
 x-68=34, y-136=272; & x-68=272, y-136=34 \\
 x-68=68, y-136=136; & x-68=136, y-136=68
 \end{array}$$

จะได้ผลเฉลยของ  $(x-68)(y-136)=9248$  คือ  
 $(x, y, z) = (69, 9384, 17), (70, 4760, 17), (72, 2448, 17),$   
 $(76, 1292, 17), (84, 714, 17), (85, 680, 17), (100, 425, 17),$   
 $(102, 408, 17), (136, 272, 17), (9316, 137, 17), (4692, 138, 17),$   
 $(2380, 140, 17), (1224, 144, 17), (646, 152, 17), (612, 153, 17),$   
 $(357, 168, 17), (340, 170, 17)$  และ  $(204, 204, 17)$

ทำการจัดรูป (47), (49) และ (53) ใน

ทำนองเดียวกันกับ (46) ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น  
 จะได้ว่า

จาก (47) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-36)(y-72)=2592$

จาก (49) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-20)(y-40)=800$

จาก (53) จัดรูปใหม่ได้เป็น  $(x-12)(y-24)=288$

จากนั้นทำการหาผลเฉลยของ (47), (49)

และ (53) ในทำนองเดียวกันกับ (46)

จะพบว่าผลเฉลยของ (47) คือ

$$\begin{array}{l}
 (x, y, z) = (37, 2664, 18), (38, 1368, 18), \\
 (39, 936, 18), (40, 720, 18), (42, 504, 18), \\
 (44, 396, 18), (45, 360, 18), (48, 288, 18), (52, 234, 18), \\
 (54, 216, 18), (60, 180, 18), (63, 168, 18), (68, 153, 18), \\
 (72, 144, 18), (84, 126, 18), (2628, 73, 18), (1332, 74, 18), \\
 (900, 75, 18), (684, 76, 18), (468, 78, 18), (360, 80, 18), \\
 (324, 81, 18), (252, 84, 18), (198, 88, 18), (180, 90, 18), \\
 (144, 96, 18), (132, 99, 18), (117, 104, 18), (108, 108, 18)
 \end{array}$$

และ  $(90, 120, 18)$

ผลเฉลยของ (49) คือ  $(x, y, z) = (21, 840, 20),$   
 $(22, 440, 20), (24, 240, 20), (25, 200, 20), (28, 140, 20),$   
 $(30, 120, 20), (36, 90, 20), (40, 80, 20), (45, 72, 20),$   
 $(820, 41, 20), (420, 42, 20), (220, 44, 20), (180, 45, 20),$   
 $(120, 48, 20), (100, 50, 20), (70, 56, 20), (60, 60, 20)$   
 และ  $(52, 65, 20)$

ผลเฉลยของ (53) คือ  $(x, y, z) = (28, 42, 24),$   
 $(300, 25, 24), (156, 26, 24), (108, 27, 24), (84, 28, 24),$   
 $(60, 30, 24), (48, 32, 24), (44, 33, 24), (36, 36, 24)$   
 และ  $(30, 40, 24)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (48) สามารถแบ่งได้  
 เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{3}{76} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้

$x \leq 76$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 19$  และ  $z < x$  จึง  
 ทำให้  $x \geq 20$  นั่นคือ  $20 \leq x \leq 76$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{3}{76} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้

$y \leq 75$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 19$  และ  $z < y$  จึง  
 ทำให้  $y \geq 20$  นั่นคือ  $20 \leq y \leq 75$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณี ข้างต้น  
 สรุปลงได้ว่า (48) มีผลเฉลย คือ

$$\begin{array}{l}
 (x, y, z) = (26, 1976, 19), (28, 532, 19), \\
 (36, 171, 19), (38, 152, 19), (76, 76, 19), (3876, 51, 19), \\
 (988, 52, 19), (266, 56, 19) \text{ และ } (228, 57, 19)
 \end{array}$$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (50) สามารถแบ่งได้  
 เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{5}{84} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้

$x \leq 50$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 21$  และ  $z < x$   
 จึงทำให้  $x \geq 22$  นั่นคือ  $22 \leq x \leq 50$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{5}{84} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้  $y < 50$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 21$  และ  $z < y$  จึงทำให้  $y \geq 22$  นั่นคือ  $22 \leq y \leq 50$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้นสรุปได้ว่า (50) มีผลเฉลยคือ  $(x, y, z) = (24, 112, 21), (28, 84, 21), (36, 63, 21), (42, 56, 21), (1428, 34, 21), (420, 35, 21), (252, 36, 21), (105, 40, 21), (84, 42, 21)$  และ  $(56, 48, 21)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (51) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{3}{44} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้  $x \leq 44$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 22$  และ  $z < x$  จึงทำให้  $x \geq 23$  นั่นคือ  $23 \leq x \leq 44$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{3}{44} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้  $y < 43$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 22$  และ  $z < y$  จึงทำให้  $y \geq 23$  นั่นคือ  $23 \leq y \leq 43$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้นสรุปได้ว่า (51) มีผลเฉลยคือ  $(x, y, z) = (44, 44, 22), (660, 30, 22), (176, 32, 22), (132, 33, 22)$  และ  $(55, 40, 22)$

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (52) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{7}{92} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้  $x \leq 39$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 23$  และ  $z < x$  จึงทำให้  $x \geq 24$  นั่นคือ  $24 \leq x \leq 39$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{7}{92} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้  $y < 39$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 23$  และ  $z < y$  จึงทำให้  $y \geq 24$  นั่นคือ  $24 \leq y < 39$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้นพบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (52) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (54) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{9}{100} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้  $x \leq 33$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 25$  และ  $z < x$  จึงทำให้  $x \geq 26$  นั่นคือ  $26 \leq x \leq 33$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{9}{100} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้  $y < 33$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 25$  และ  $z < y$  จึงทำให้  $y \geq 26$  นั่นคือ  $26 \leq y < 33$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้นพบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (54) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (55) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{5}{52} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้  $x \leq 31$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 26$  และ  $z < x$  จึงทำให้  $x \geq 27$  นั่นคือ  $27 \leq x \leq 31$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{5}{52} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้  $y < 31$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 26$  และ  $z < y$  จึงทำให้  $y \geq 27$  นั่นคือ  $27 \leq y < 31$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้นพบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (55) ไม่มีผลเฉลย

ต่อมาพิจารณาหาผลเฉลย (56) สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี  $x \leq y$  จะได้  $\frac{11}{108} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \leq \frac{3}{x}$  ทำให้  $x \leq 29$  แต่  $x \geq 5$  เนื่องจาก  $z = 27$  และ  $z < x$  จึงทำให้  $x \geq 28$  นั่นคือ  $28 \leq x \leq 29$

กรณี  $y < x$  จะได้  $\frac{11}{108} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} < \frac{3}{y}$  ทำให้  $y \leq 29$  แต่  $z \geq 17$  เนื่องจาก  $z = 27$  และ  $z < y$  จึงทำให้  $y \geq 28$  นั่นคือ  $28 \leq y \leq 29$

จากการหาผลเฉลยทั้ง 2 กรณีข้างต้นพบว่าผลเฉลยไม่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงสรุปได้ว่า (56) ไม่มีผลเฉลย

### อภิปรายผล

งานวิจัยนี้มีพื้นฐานมาจากปัญหาอียิปต์โบราณ<sup>1</sup> ซึ่งได้มีการหาผลเฉลยและพัฒนารูปแบบสมการที่จากเดิมตัวเศษมีค่าเป็น 1 เปลี่ยนเป็นตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ซึ่งจากการศึกษาในงานวิจัยของ Rabago and Tagle<sup>2</sup>, อภิลิทธิ ภาคพงศ์พันธุ์<sup>3</sup>, Atri<sup>4</sup>, Chinram et al.<sup>5</sup> และ Srimud et al.<sup>6</sup> พบว่า สมการของตัวแปร 3 และ 4 ตัวแปรมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกและมีจำนวนจำกัด โดยงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้สร้างรูปแบบสมการที่แตกต่างไปจากงานวิจัยที่ได้ศึกษาดังกล่าวไปแล้วข้างต้น ซึ่งสนใจว่าถ้าเปลี่ยนรูปแบบสมการแล้วจะมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกและมีจำนวนจำกัดหรือไม่ โดยการหาผลเฉลยในงานวิจัยนี้ปรากฏว่ามีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกและมีจำนวนจำกัดเช่นเดียวกัน

### สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ เราแสดงการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$  ซึ่งมีผลเฉลยทั้งหมด 380 ผลเฉลย

### กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏราชชนนครินทร์ ที่ให้สถานที่ และทรัพยากรในการทำวิจัยฉบับนี้

### เอกสารอ้างอิง

- Zelator K. An ancient Egyptian problem: The Diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{n}$ . United States of America: University of Pittsburgh 2009:1-9.
- Rabago JFT, Tagle RP. On the area and volume of a certain regular solid and the diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ . NNTDM 2013;19:28-32.
- อภิลิทธิ ภาคพงศ์พันธุ์. ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$ . วารสารคณิตศาสตร์ 2562;64:36-43.
- Atri R. On the diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$  and  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$ . IJSR 2020;11:573-4.
- Chinram R, Sirikantisophon K, Kaewchay S. Positive integer solution of the diophantine equation  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{3}$ . Int J Math Comput Sci 2022;17:1051-9.
- Srimud K, Makate N, Ampawa T, Jantree T. On the diophantine equation  $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{2}$ . Prog Appl Sci Tech 2022;12:11-16.