

อัลกอริทึมของ Dijkstra สำหรับปัญหาเส้นทางสั้นที่สุดภายใต้สภาพแวดล้อมฟัซซี่แบบ สัญชาตญาณ

Dijkstra's Algorithm for the Shortest Path Problem under Intuitionistic Fuzzy Environment

ดรุณี หันวิสัย*

Darunee Hunwisai*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology, Valaya Alongkorn Rajabhat University under the Royal Patronage

*Corresponding author; E-mail: darunee.hun@vru.ac.th

Received: 05 June 2024 /Revised: 01 October 2024 /Accepted: 01 October 2024

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นการพัฒนากระบวนการแก้ปัญหาหาเส้นทางที่สั้นที่สุดเมื่อข้อมูลเป็นแบบฟัซซี่ ซึ่งมีความไม่แน่นอนหรือคลุมเครือ ผู้วิจัยได้เสนอแนวทางการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดภายใต้ตัวเลขฟัซซี่สัญชาตญาณสามเหลี่ยม (Triangular intuitionistic fuzzy number) โดยใช้วิธีเซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่ (Centroid of fuzzy number) ในการแปลงตัวเลขฟัซซี่ให้เป็นค่าที่สามารถนำไปประมวลผลได้ จากนั้นจึงประยุกต์ใช้อัลกอริทึม Dijkstra ในการค้นหาระยะทางที่สั้นที่สุด ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าวิธีการที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่มีความคลุมเครือได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถหาคำตอบที่ถูกต้องและเหมาะสมได้

คำสำคัญ: อัลกอริทึมของไดคอสตรา ปัญหาหาเส้นทางที่สั้นที่สุด ตัวเลขฟัซซี่ เซนทรอยด์

Abstract

This research aims to develop a process for solving the shortest path problem when the data is fuzzy, uncertain, or ambiguous. The researcher proposed a shortest path solution approach under triangular intuitionistic fuzzy numbers by using the centroid of fuzzy numbers method to convert the fuzzy numbers into processable values. Subsequently, Dijkstra's algorithm was applied to find the shortest path. The results of the study showed that the developed method can effectively solve the problem in an ambiguous environment and can find the correct and appropriate answer.

Keywords: Dijkstra's algorithm, Shortest path problems, Fuzzy numbers, Centroid

บทนำ

ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (Shortest path problem) เป็นหนึ่งในปัญหาพื้นฐานและสำคัญในทฤษฎีกราฟ และได้มีการนำไปประยุกต์ใช้ในหลากหลายด้าน เช่น การวางแผนการเดินทาง การจัดการเครือข่ายคอมพิวเตอร์ หรือ การออกแบบระบบโลจิสติกส์ เป็นต้น การหาวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาดังกล่าวจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง หนึ่งในวิธีการที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดคืออัลกอริทึมของ Dijkstra ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นโดย Dijkstra EW¹ ในปี ค.ศ. 1956 และตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1959 อัลกอริทึมนี้ใช้ในการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดจากโหนดต้นทางไปยังโหนดปลายทางภายใต้ข้อกำหนดค่าน้ำหนักของทุกโหนดจะต้องเป็นบวกและข้อมูลต้องมีตัวเลขที่ชัดเจน เพื่อการหาผลลัพธ์ที่มีความถูกต้อง ในปัจจุบันพบว่า การแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดได้ถูกนำไปใช้ในหลายสถานการณ์ เช่น การคำนวณค่าใช้จ่ายในการเดินทางให้น้อยที่สุด หรือการคำนวณเส้นทางเดินทางที่รวดเร็วและสั้นที่สุด ซึ่งข้อมูลที่จะนำมาใช้กับอัลกอริทึมของ Dijkstra จะต้องเป็นข้อมูลที่มีความแน่นอน จึงจะส่งผลให้การตัดสินใจเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามหากข้อมูลที่ได้มาไม่มีความแน่นอน เช่น ความไม่แน่นอนของค่าใช้จ่ายในการเดินทาง ความไม่แน่นอนของระยะเวลาที่ใช้ในการขนส่ง อาจทำให้อัลกอริทึมแบบเดิมไม่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาก็ได้ จึงจำเป็นต้องมีการต้องแก้ปัญหาค่าความไม่แน่นอนหรือมีความคลุมเครือนี้ก่อน ด้วยเหตุนี้การหาเส้นทางที่

สั้นที่สุดภายใต้ความไม่แน่นอนหรือความคลุมเครือจึงกลายเป็นเรื่องที่ได้ได้รับความสนใจจากนักวิจัยเป็นอย่างมาก นักวิจัยได้ศึกษาวิธีการแก้ปัญหามาในสถานการณ์ที่กล่าวมาข้างต้นนี้ โดยใช้แนวคิดการตัดสินใจในสภาพแวดล้อมที่คลุมเครือหรือที่เรียกว่า ฟัซซี่ ซึ่งเป็นแนวคิดของ Bellman RE และ Zadeh LA² ความสนใจในการแก้ปัญหาระยะทางสั้นที่สุดกับข้อมูลที่เป็นแบบฟัซซี่นี้ได้ถูกพัฒนามาอย่างต่อเนื่องโดย Dubois D และ Prade H³ เป็นคนแรกที่ศึกษาอัลกอริทึมสำหรับปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ โดยดัดแปลงอัลกอริทึมแบบคลาสสิกของ Ford Moore Bellman นอกจากนี้ Nayeem SMA และ Pal M⁴ ได้นำเสนออัลกอริทึมเพื่อแก้ปัญหาลำเส้นทางที่สั้นที่สุด โดยใช้ตัวเลขฟัซซี่สามเหลี่ยมและตัวเลขค่าแบบช่วงในการคำนวณ Hernandez F และคณะ⁵ ได้พัฒนาวิธีการในการแก้ปัญหาลำเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ เมื่อข้อมูลเป็นตัวเลขฟัซซี่สามเหลี่ยม Takahashi MT และ Yamakami A⁶ ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาลำเส้นทางที่สั้นที่สุดโดยใช้ความยาวเส้นทางที่เป็นฟัซซี่ และได้ทำการขยายวิธีการของ Okada S⁷ Lin L, Wu C และ Ma L⁸ ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาลำเส้นทางที่สั้นที่สุดในเครือข่ายฟัซซี่โดยใช้อัลกอริทึมทางพันธุกรรมในการค้นหาเส้นทางที่เหมาะสม และ Deng Y และคณะ⁹ ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ โดยการรวมค่าเฉลี่ยของตัวเลขฟัซซี่และประยุกต์ใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra กับข้อมูลที่เป็นตัวเลขฟัซซี่ในรูปแบบสี่เหลี่ยมคางหมู

ในบทความวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุด โดยกำหนดให้ข้อมูลค่าใช้จ่าย

ในการเดินทาง แสดงด้วยตัวเลขพีชชีสหัญญาณสามเหลี่ยม จากนั้นทำการวิเคราะห์ค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด โดยใช้เซททออยด์ของตัวเลขพีชชีในการแปลงตัวเลขพีชชีให้เป็นค่าที่สามารถนำไปประมวลผลได้ หลังจากนั้นจึงใช้อัลกอริทึม Dijkstra เพื่อหาค่าใช้จ่ายในการเดินทางที่น้อยที่สุด

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบตัวเลขพีชชีสหัญญาณสามเหลี่ยม

วิธีดำเนินการวิจัย

- ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนต่อไปนี้
- 1) ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบพีชชี
 - 2) ศึกษาอัลกอริทึมของ Dijkstra เพื่อใช้ในการหาค่าระยะทางที่สั้นที่สุด
 - 3) ศึกษาวิธีการหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขพีชชีสหัญญาณสามเหลี่ยม โดยใช้เซททออยด์ของตัวเลขพีชชี
 - 4) นำเสนอขั้นตอนการดำเนินงานและแสดงวิธีการหาลดลัพท์สำหรับปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบพีชชี

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory)

ทฤษฎีกราฟ เป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่ทำการศึกษาเกี่ยวกับกราฟซึ่งเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยกลุ่มของจุดยอด (vertex) และเส้นเชื่อม (edge) ระหว่างจุดยอดเหล่านั้น ทฤษฎีนี้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลายสาขา เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ เครือข่ายคอมพิวเตอร์ การจราจร การวางแผนการเดินทาง เป็นต้น

นิยาม 1 กราฟ $G = (V, E)$ ประกอบด้วย

เซต $V=V(G)$ ซึ่งเป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด และเซต $E = E(G)$ เป็นเซตจำกัดของเส้นเชื่อม ที่แต่ละเส้นเชื่อมมีจุดยอดหนึ่งจุดหรือสองจุดที่เกี่ยวข้องกัน¹⁰

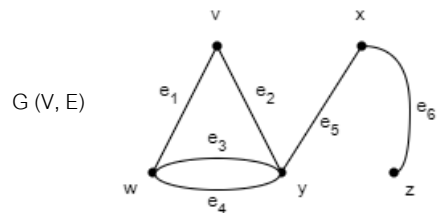


Figure 1. A graph

จาก Figure 1 จะได้ว่ากราฟ $G = (V, E)$ ประกอบด้วยเซตของจุดยอดและเส้นเชื่อมดังนี้

$$V(G) = \{v, w, x, y, z\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

กราฟ G จะสามารถเขียนลำดับของเส้นเชื่อมในกราฟ ที่มีจุดยอดแตกต่างกัน ซึ่งเรียกว่าเป็นเส้นทางหรือวิถี (path) รูปแบบหนึ่งของเส้นทางหรือวิถี $w - x$ คือ $w - e_3 - y - e_5 - x$

นิยาม 2 ค่าน้ำหนัก (weight) ของเส้นเชื่อม e ในกราฟ คือ จำนวนที่ไม่เป็นลบที่กำหนดไว้บนเส้นเชื่อม e

กราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph) คือกราฟที่เส้นเชื่อมทุกเส้นมีค่าน้ำหนัก¹⁰

นิยาม 3 วิถีที่สั้นที่สุด จากจุด A ถึงจุดยอด Z ในกราฟถ่วงน้ำหนัก คือวิถี $A - Z$ ที่ผลรวมของค่าน้ำหนักทุกเส้นเชื่อมในวิถี $A-Z$ ได้ค่าน้อยที่สุด¹⁰

2. ฟัซซีเซต (Fuzzy set)

ฟัซซีเซตเป็นเซตที่มีขอบเขตคลุมเครือและมีความไม่แน่นอน ถูกคิดค้นขึ้นในปีค.ศ. 1965 โดย Zadeh LA¹¹ โดยฟัซซีเซตยอมให้มีการกำหนดค่าระดับความเป็นสมาชิก (Degree of membership) อยู่ในช่วง $[0,1]$ การกำหนดค่าระดับความเป็นสมาชิกนี้ต้องอาศัยฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership function) ของฟัซซีเซต โดยมีนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 4 กำหนดให้ X เป็นเซต และ $X \neq \phi$ ฟัซซีเซต $\tilde{Y}$ ใน X คือคู่อันดับ $(x, \mu_{\tilde{Y}})$ และ $\mu_{\tilde{Y}} : X \rightarrow [0,1]$ เรียก $\mu_{\tilde{Y}}(x)$ ว่าระดับความเป็นสมาชิกของ x ในฟัซซีเซต $\tilde{Y}$ ดังนั้นค่า $[0,1]$ คือระดับความเป็นสมาชิกของ x ในฟัซซีเซต $\tilde{Y}$ ¹¹

นิยาม 5 ฟัซซีเซต $\tilde{Y}$ จะเรียกว่าเป็นตัวเลขวฟัซซี ถ้ามีสมบัติสอดคล้องดังต่อไปนี้

- 1) เป็นสับเซตของจำนวนจริง
- 2) เป็นเซตปกติ (Normal set) ที่มีจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $\mu_{\tilde{Y}}(x) = 1$
- 3) เป็นเซตนูน (Convex set) กล่าวคือสำหรับทุกจำนวนจริง x และ y และ $\gamma \in [0,1]$

$$\mu_{\tilde{Y}}(\gamma x + (1-\gamma)y) \geq \min(\mu_{\tilde{Y}}(x), \mu_{\tilde{Y}}(y))$$
- 4) $\mu_{\tilde{Y}} : R \rightarrow [0,1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่

$$\mu_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} l'(x); & x \in (-\infty, c) \\ 1; & x = c \\ r'(x); & (c, \infty) \end{cases}$$

เมื่อ l' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $(-\infty, c)$ และ r' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและลดลงอย่างสม่ำเสมอบนช่วง (c, ∞) ¹²

นิยาม 6 กำหนดให้ X เป็นเซต และ $X \neq \phi$ เซตฟัซซีสหัชฐาน (Intuitionistic fuzzy set) Y ในเซต X

เขียนแทนด้วย $\tilde{Y}^* = \{ \langle x, \mu_{\tilde{Y}^*}(x), \nu_{\tilde{Y}^*}(x) \rangle \mid x \in X \}$ โดยที่ $\mu_{\tilde{Y}^*} : X \rightarrow [0,1]$ และ $\nu_{\tilde{Y}^*} : X \rightarrow [0,1]$ เรียก $\mu_{\tilde{Y}^*}(x)$ และ $\nu_{\tilde{Y}^*}(x)$ ว่าระดับความเป็นสมาชิก (Membership degree) และระดับความไม่เป็นสมาชิก (Non-membership degree) ของ x ที่ $\tilde{Y}^* \subseteq X$ ตามลำดับ และสำหรับทุกจำนวน $x \in X$ จะได้ว่า $0 \leq \mu_{\tilde{Y}^*}(x) + \nu_{\tilde{Y}^*}(x) \leq 1$ ¹³

นิยาม 7 ตัวเลขวฟัซซี $\tilde{Y}^* = \langle (y_l, y_{c^*}, y_r); (y'_l, y_{c^*}, y'_r) \rangle$ จะเรียกว่าเป็นตัวเลขวฟัซซีสหัชฐานสามเหลี่ยม ถ้ามีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$\mu_{\tilde{Y}^*}(x) = \begin{cases} \frac{x - y_l}{y_{c^*} - y_l} & ; y_l \leq x \leq y_{c^*} \\ 1 & ; x = y_{c^*} \\ \frac{y_r - x}{y_r - y_{c^*}} & ; y_{c^*} \leq x \leq y_r \\ 0 & ; x > y_r \text{ และ } x < y_l \end{cases}$$

และ

$$\nu_{\tilde{Y}^*}(x) = \begin{cases} \frac{y_{c^*} - x}{y_{c^*} - y'_l} & ; y'_l \leq x \leq y_{c^*} \\ 0 & ; x = y_{c^*} \\ \frac{x - y_{c^*}}{y'_r - y_{c^*}} & ; y_{c^*} \leq x \leq y'_r \\ 1 & ; x > y'_r \text{ และ } x < y'_l \end{cases}$$

เมื่อ $y'_l \leq y_l \leq y_{c^*} \leq y_r \leq y'_r$ ¹⁴

จากนิยาม 7 ตัวเลขวฟัซซีสหัชฐานสามเหลี่ยม $\tilde{Y}^* = \langle (y_l, y_{c^*}, y_r); (y'_l, y_{c^*}, y'_r) \rangle$ ถ้า $y_l = y'_l$ และ $y_r = y'_r$ แล้วจะได้ว่า $\tilde{Y}^* = (y_l, y_{c^*}, y_r)$ เรียกว่าเป็นตัวเลขวฟัซซีสามเหลี่ยม (Triangular fuzzy number)

นิยาม 8 ตัวเลขวฟัซซี $\tilde{Y}^* = \langle (y_l, y_{c^*}, y_r); (y'_l, y_{c^*}, y'_r) \rangle$ และ $\tilde{Z}^* = \langle (z_l, z_{c^*}, z_r); (z'_l, z_{c^*}, z'_r) \rangle$ เป็นตัวเลขวฟัซซีสหัชฐานสามเหลี่ยมและ $\xi \neq 0$ การดำเนินการระหว่างตัวเลขวฟัซซีและการคูณเชิงสเกลาร์บนตัวเลขวฟัซซี เป็นดังนี้¹⁴

- $\tilde{Y}^* \oplus \tilde{Z}^* = \langle (y_l + z_l, y_{c^*} + z_{c^*}, y_r + z_r); (y'_l + z'_l, y'_{c^*} + z'_{c^*}, y'_r + z'_r) \rangle$
- $\tilde{Y}^* \ominus \tilde{Z}^* = \langle (y_l - z_l, y_{c^*} - z_{c^*}, y_r - z_r); (y'_l - z'_l, y'_{c^*} - z'_{c^*}, y'_r - z'_r) \rangle$
- $\xi \tilde{Y}^* = \begin{cases} \langle (\xi y_l, \xi y_{c^*}, \xi y_r); (\xi y'_l, \xi y'_{c^*}, \xi y'_r) \rangle, & \xi > 0 \\ \langle (\xi y_r, \xi y_{c^*}, \xi y_l); (\xi y'_r, \xi y'_{c^*}, \xi y'_l) \rangle, & \xi < 0 \end{cases}$

นิยาม 9 กำหนดให้ (β, γ) - เซตตัด (Cut set) ของตัวเลขฟัซซี่สหัชญาณสามเหลี่ยม $\tilde{Y}^* = \langle (y_l, y_{c^*}, y_r); (y'_l, y'_{c^*}, y'_r) \rangle$ เป็นเซตย่อยชัดแจ้ง (Crisp subset) บนจำนวนจริง ซึ่งนิยามโดย $\tilde{Y}^*_\beta = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{Y}^*}(x) \geq \beta, v_{\tilde{Y}^*}(x) \leq \gamma\}$ และ $\beta, \gamma \in [0, 1]$ ¹⁴

3. เซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอเซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่ คิดค้นโดย Wang YM, Yang J, Xu DL และ Chin KS¹⁵

นิยาม 10 ให้ $\tilde{Y}^*$ เป็นตัวเลขฟัซซี่สหัชญาณเซนทรอยด์ของ $\tilde{Y}^*$ คือ $\frac{D}{N}$ โดยที่

$$D = \int_{y'_l}^{y_l} \frac{-f(x)+1}{2} dx + \int_{y_l}^{y_{c^*}} \frac{g(x)-f(x)+1}{2} dx + \int_{y_{c^*}}^{y_r} \frac{h(x)-k(x)+1}{2} dx + \int_{y'_r}^{y_r} \frac{-k(x)+1}{2} dx$$

และ

$$N = \int_{y'_l}^{y_l} \frac{-f(x)+1}{2} dx + \int_{y_l}^{y_{c^*}} \frac{g(x)-f(x)+1}{2} dx + \int_{y_{c^*}}^{y_r} \frac{h(x)-k(x)+1}{2} dx + \int_{y'_r}^{y_r} \frac{-k(x)+1}{2} dx$$

กำหนดให้ $f: R \rightarrow [0, 1]$, $g: R \rightarrow [0, 1]$, $h: R \rightarrow [0, 1]$ และ $k: R \rightarrow [0, 1]$ โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ และ h และ k เป็นฟังก์ชันลดอย่างสม่ำเสมอ¹⁵

จากนิยาม 7 โดยการแทนค่าตัวเลขฟัซซี่

สหัชญาณสามเหลี่ยม $\tilde{Y}^* = \langle (y_l, y_{c^*}, y_r); (y'_l, y'_{c^*}, y'_r) \rangle$ ในนิยาม 10 จะได้เซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่ จัดรูปใหม่ได้ ดังนี้

$$\frac{1}{3} \left[\frac{(y'_r - y'_l)(y_{c^*} - 2y'_r - 2y'_l) + (y_r - y_l)(y_l + y_{c^*} + y_r) + 3(y_r^2 - y_l^2)}{y'_r - y'_l + y_r - y_l} \right] \quad (2)$$

ข้อสังเกต ตัวเลขฟัซซี่สหัชญาณสามเหลี่ยม

$\tilde{Y}^* = \langle (y_l, y_{c^*}, y_r); (y'_l, y'_{c^*}, y'_r) \rangle$ ถ้า $y_l = y'_l$ และ $y_r = y'_r$ แล้วจะได้ว่า $\tilde{Y}^* = (y_l, y_{c^*}, y_r)$ ดังนั้นเซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่สามเหลี่ยม $\tilde{Y}^*$ จะได้เป็น $\frac{y_l + y_{c^*} + y_r}{3}$

ในงานวิจัยนี้จะใช้สัญลักษณ์ $D(\tilde{Y}^*_{i,j})$ แทนดัชนีค่าเดินทางฟัซซี่จากโหนดต้นทางที่ i ไปยังโหนดปลายทางที่ j

4. อัลกอริทึมของ Dijkstra สำหรับการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่

วิธีการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ (Fuzzy shortest path problem) มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : พิจารณากราฟหรือเส้นทางที่กำหนดแสดงด้วยตัวเลขฟัซซี่ จากนั้นนำตัวเลขที่ได้จากวิธีเซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่ มาแทนที่ค่าน้ำหนักในแต่ละเส้นทางให้ครบทุกเส้นทาง

ขั้นตอนที่ 2 : เริ่มต้นกำหนดโหนดต้นทาง (Source node) และกำหนดโหนดปลายทาง (Destination node) ที่ต้องการหาน้ำหนักที่น้อยที่สุดหรือระยะทางที่สั้นที่สุด (ในที่นี้แทนด้วยค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด)

ขั้นตอนที่ 3 : กำหนดค่าระยะทางให้กับทุกโหนด สำหรับโหนดต้นทางตั้งค่าเป็นศูนย์ และโหนดอื่นตั้งค่าเป็นอนันต์

ขั้นตอนที่ 4 : ตั้งค่าโหนดเริ่มต้นเป็นปัจจุบันและทำเครื่องหมายโหนดทั้งหมดว่าไม่ได้สำรวจ (Unexplored)

ขั้นตอนที่ 5 : โหนดที่เลือกมาแล้วถือว่าเป็นโหนดที่ได้รับการสำรวจแล้ว (Explored) จากนั้นพิจารณาโหนดที่อยู่ติดกับโหนดที่เลือกทุกโหนด โดยเลือกโหนดที่มีน้ำหนักหรือระยะทางที่สั้นที่สุดให้เป็นโหนดที่ได้รับการสำรวจแล้ว และคำนวณค่าน้ำหนักรวมของเส้นทางที่มีสถานะสำรวจแล้ว โดยโหนดที่เลือกจะมีค่าระยะทางรวมน้อยกว่าโหนดที่ไม่ได้รับการเลือก

ขั้นตอนที่ 6 : ดำเนินการสำรวจโหนดที่เหลือต่อไปเรื่อย ๆ จนทุกโหนดได้รับการสำรวจเสร็จสิ้น ทำเครื่องหมายว่ามีสถานะสำรวจแล้ว โดยที่โหนดที่เคยสำรวจแล้วจะไม่ถูกตรวจสอบอีก

ขั้นตอนที่ 7 : คำนวณค่าน้ำหนักจากตัวเลขที่ได้อ่านทุกเส้นทาง

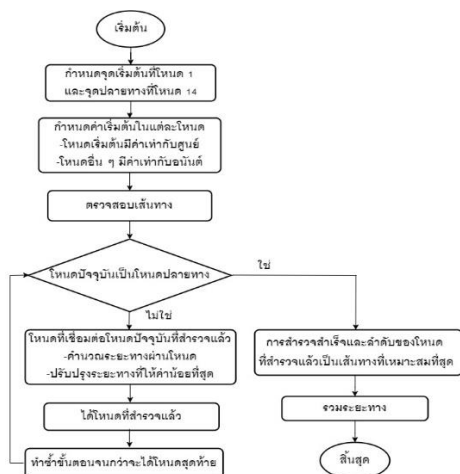


Figure 2. A Flowchart of Dijkstra's algorithm

ผลการวิจัย

หัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดน้ำหนักในแต่ละเส้นทางเป็นตัวเลขค่าใช้จ่ายในการเดินทางไปยังสถานที่ต่าง ๆ ให้เป็นแบบฟัซซี่สหัชญาณสามเหลี่ยม โดยในสถานการณ์จริงข้อมูลที่น่ามาคำนวณจะได้มาจากการเก็บข้อมูลค่าใช้จ่ายในการเดินทางซึ่งเป็นการนำข้อมูลย้อนหลังมาพิจารณาว่าตัวเลขที่เกิดขึ้นอยู่ในช่วงใด แล้วจึงนำข้อมูลที่ได้อามาวิเคราะห์ในตัวอย่างนี้กำหนดปัญหาให้อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า ค่าใช้จ่ายในการเดินทางเป็นแบบฟัซซี่สหัชญาณสามเหลี่ยม

ตัวอย่าง 1 กำหนดเส้นทางการเดินทางแสดงใน Figure 3 และกำหนดค่าใช้จ่ายในการเดินทางจากจุดเริ่มต้นโหนด 1 ไปยังจุดหมายปลายทางโหนด 14 แสดงเป็นตัวเลขฟัซซี่สหัชญาณสามเหลี่ยม ดัง Table 1

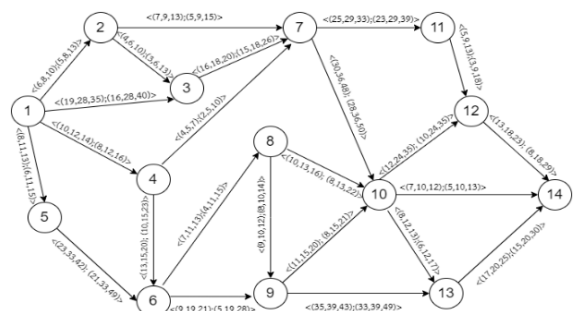


Figure 3. A graph shows the fuzzy travel cost between node 1 to node 14

Table 1. Triangular intuitionistic fuzzy number edge weight

Edges	Triangular intuitionistic fuzzy number	Edges	Triangular intuitionistic fuzzy number	Edges	Triangular intuitionistic fuzzy number
(1,2)	$\langle(6,8,10);(5,8,13)\rangle$	(4,7)	$\langle(4,5,7);(2,5,10)\rangle$	(9,10)	$\langle(11,15,20);(8,15,21)\rangle$
(1,3)	$\langle(19,28,35);(16,28,40)\rangle$	(5,6)	$\langle(23,33,42);(21,33,49)\rangle$	(9,13)	$\langle(35,39,43);(33,39,49)\rangle$
(1,4)	$\langle(10,12,14);(8,12,16)\rangle$	(6,8)	$\langle(7,11,13);(4,11,15)\rangle$	(10,12)	$\langle(12,24,35);(10,24,35)\rangle$
(1,5)	$\langle(8,11,13);(6,11,15)\rangle$	(6,9)	$\langle(9,19,21);(5,19,28)\rangle$	(10,13)	$\langle(8,12,13);(6,12,17)\rangle$
(2,3)	$\langle(4,6,10);(3,6,13)\rangle$	(7,10)	$\langle(30,36,48);(28,36,50)\rangle$	(10,14)	$\langle(7,10,12);(5,10,13)\rangle$
(2,7)	$\langle(7,9,13);(5,9,15)\rangle$	(7,11)	$\langle(25,29,33);(23,29,39)\rangle$	(11,12)	$\langle(5,9,13);(3,9,18)\rangle$
(3,7)	$\langle(16,18,20);(15,18,26)\rangle$	(8,9)	$\langle(9,10,12);(8,10,14)\rangle$	(12,14)	$\langle(13,18,23);(8,18,29)\rangle$
(4,6)	$\langle(13,15,20);(10,15,23)\rangle$	(8,10)	$\langle(10,13,16);(8,13,22)\rangle$	(13,14)	$\langle(17,20,25);(15,20,30)\rangle$

จาก Table 1 จะเห็นว่าค่าเดินทางแสดงเป็นตัวเลขฟัซซี่สามเหลี่ยม ดังนั้นใช้วิธีเซนทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่ในสมการ (2) เพื่อหาค่าที่เป็นตัวแทนของค่าเดินทาง ได้ดังนี้

เส้นขอบ (1,2) แสดงค่าเดินทางจากโหนด 1 ไปยังโหนด 2 คือ $\langle(6,8,10);(5,8,13)\rangle$ ดังนั้นค่าเดินทางจากโหนด 1 ไปยังโหนด 2 แทนด้วย $D(\tilde{y}_{1,2}^*)$ โดยใช้เซนทรอยด์จะได้ว่า

$$D(\tilde{y}_{1,2}^*) = \frac{1}{3} \left[\frac{(13-5)(8-2(13)-2(5)) + (10-6)(6+8+10) + 3(13^2-5^2)}{13-5+10-6} \right] = 8.44$$

ดังนั้นค่าเดินทางใหม่ โดยใช้เซนทรอยด์จากโหนด 1 ไปยังโหนด 2 เท่ากับ 8.44 ในทำนองเดียวกัน เส้นขอบอื่นๆ จะได้ค่าเดินทางใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} D(\tilde{y}_{1,3}^*) &= 27.73, & D(\tilde{y}_{1,4}^*) &= 12, \\ D(\tilde{y}_{1,5}^*) &= 10.67, & D(\tilde{y}_{2,3}^*) &= 7.08, \\ D(\tilde{y}_{2,7}^*) &= 9.67, & D(\tilde{y}_{3,7}^*) &= 19.22, \\ D(\tilde{y}_{4,6}^*) &= 16, & D(\tilde{y}_{4,7}^*) &= 5.58, \\ D(\tilde{y}_{5,6}^*) &= 33.66, & D(\tilde{y}_{6,8}^*) &= 10.12, \\ D(\tilde{y}_{6,9}^*) &= 16.99, & D(\tilde{y}_{7,10}^*) &= 38, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\tilde{y}_{7,11}^*) &= 29.89, & D(\tilde{y}_{8,9}^*) &= 10.56, \\ D(\tilde{y}_{8,10}^*) &= 13.93, & D(\tilde{y}_{9,10}^*) &= 14.94, \\ D(\tilde{y}_{9,13}^*) &= 39.89, & D(\tilde{y}_{10,12}^*) &= 23.32, \\ D(\tilde{y}_{10,13}^*) &= 11.46, & D(\tilde{y}_{10,14}^*) &= 9.46, \\ D(\tilde{y}_{11,12}^*) &= 9.65, & D(\tilde{y}_{12,14}^*) &= 18.23 \text{ และ } \\ D(\tilde{y}_{13,14}^*) &= 21.32 \end{aligned}$$

ค่าเดินทางใหม่ที่คำนวณได้แสดงดัง Table 2 และภาพแสดงค่าเดินทางที่ถูกปรับค่าใหม่แสดงดัง Figure 4

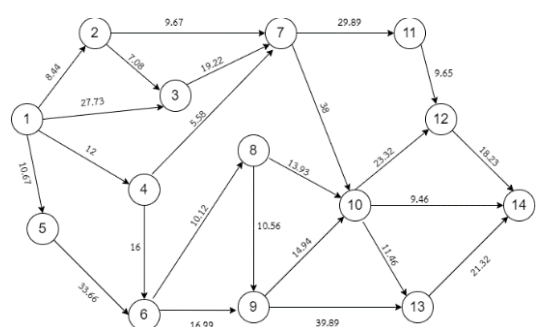


Figure 4. A graph of triangular intuitionistic fuzzy number after calculate centroid

Table 2. Triangular intuitionistic fuzzy number after calculate centroid

Edges	travel costs	Edges	travel costs	Edges	travel costs
(1,2)	8.44	(4,7)	5.58	(9,10)	14.94
(1,3)	27.73	(5,6)	33.66	(9,13)	39.89
(1,4)	12	(6,8)	10.12	(10,12)	23.32
(1,5)	10.67	(6,9)	16.99	(10,13)	11.46
(2,3)	7.08	(7,10)	38	(10,14)	9.46
(2,7)	9.67	(7,11)	29.89	(11,12)	9.65
(3,7)	19.22	(8,9)	10.56	(12,14)	18.23
(4,6)	16	(8,10)	13.93	(13,14)	21.32

ต่อไปจะแสดงการหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยใช้อัลกอริทึมของ Dijkstra สำหรับการแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่ ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : พิจารณาค่าเดินทางที่กำหนดที่เป็นฟัซซี่ใน Table 1 จากนั้นใช้วิธีเซทรอยด์ของตัวเลขฟัซซี่ เพื่อหาค่าที่เป็นตัวแทนของตัวเลขฟัซซี่แสดงได้ดัง Table 2 และแทนค่าน้ำหนักในแต่ละเส้นทาง ให้ครบทุกเส้นทางดัง Figure 4

ขั้นตอนที่ 2 : กำหนดโหนด 1 เป็นโหนดต้นทาง และกำหนดโหนด 14 เป็นโหนดปลายทาง

ขั้นตอนที่ 3 : ให้โหนด 1 มีค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ และโหนด 2 ถึง 14 มีค่าเป็นอนันต์

ขั้นตอนที่ 4 : พิจารณาโหนดที่อยู่ติดกับโหนด 1 ซึ่งมีโหนด 2, 3, 4 และ 5 เลือกโหนดที่มีค่าเดินทางน้อยที่สุด นั่นคือจากโหนด 1 ไปยังโหนด 2, 3, 4 และ 5 พบว่ามีค่าเดินทางเป็น 8.44 , 27.73, 12

และ 10.67 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกโหนด 2 ซึ่งให้ค่าน้อยสุดคือ 8.44 จากนั้นให้โหนด 2 เป็นโหนดที่มีการสำรวจแล้ว และคำนวณค่าน้ำหนักรวมของเส้นทางที่มีสถานะสำรวจแล้ว ซึ่งโหนด 2 ที่ถูกเลือกจะมีค่าระยะทางรวมน้อยกว่าโหนดที่ไม่ถูกเลือกอื่น ๆ

ขั้นตอนที่ 5 : ทำการสำรวจโหนดอื่นเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนได้โหนดที่ต้องการครบทุกโหนด

ขั้นตอนที่ 6 : คำนวณค่าน้ำหนักจากตัวเลขที่ได้รวมทุกเส้นทาง

จาก Table 3 แสดงลำดับขั้นตอนในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดแบบฟัซซี่จนได้คำตอบที่น้อยสุด นั่นคือจากโหนด 1 จนถึงโหนด 14 ค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ 61.51 บาท โดยจะเริ่มต้นเดินทางจากโหนด 1 ไปยังโหนด 4 ต่อไปยังโหนด 6 ไปยังโหนด 8 ไปยังโหนด 10 และสุดท้ายไปยังโหนด 14 แสดงเส้นทางดัง Figure 5



Table 3. Steps of the Dijkstra algorithm for a graph in Figure 4

step	Explored	Unexplored
1		$1^0, 2^\infty, 3^\infty, 4^\infty, 5^\infty, 6^\infty, 7^\infty, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
2	1^0	$2^{8.44(1)}, 3^{27.73(1)}, 4^{12(1)}, 5^{10.67(1)}, 6^\infty, 7^\infty, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
3	$1^0, 2^{8.44(1)}$	$3^{15.52(2)}, 4^{12(1)}, 5^{10.67(1)}, 6^\infty, 7^{18.11(2)}, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
4	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}$	$3^{15.52(2)}, 4^{12(1)}, 6^{44.33(5)}, 7^{18.11(2)}, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
5	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}$	$3^{15.52(2)}, 6^{28(4)}, 7^{17.58(4)}, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
6	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}$	$6^{28(4)}, 7^{17.58(4)}, 8^\infty, 9^\infty, 10^\infty, 11^\infty, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
7	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}$	$6^{28(4)}, 8^\infty, 9^\infty, 10^{55.58(7)}, 11^{47.47(7)}, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
8	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}$	$8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}, 10^{55.58(7)}, 11^{47.47(7)}, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
9	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}$	$9^{44.99(6)}, 10^{52.05(8)}, 11^{47.47(7)}, 12^\infty, 13^\infty, 14^\infty$
10	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}$	$10^{52.05(8)}, 11^{47.47(7)}, 12^\infty, 13^{84.88(9)}, 14^\infty$
11	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}, 11^{47.47(7)}$	$10^{52.05(8)}, 12^{57.12(11)}, 13^{84.88(9)}, 14^\infty$
12	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}, 11^{47.47(7)}, 10^{52.05(8)}$	$12^{57.12(11)}, 13^{63.51(10)}, 14^{61.51(10)}$
13	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}, 11^{47.47(7)}, 10^{52.05(8)}, 12^{57.12(11)}$	$13^{63.51(10)}, 14^{61.51(10)}$
14	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}, 11^{47.47(7)}, 10^{52.05(8)}, 12^{57.12(11)}, 14^{61.51(10)}$	$13^{63.51(10)}$
15	$1^0, 2^{8.44(1)}, 5^{10.67(1)}, 4^{12(1)}, 3^{15.52(2)}, 7^{17.58(4)}, 6^{28(4)}, 8^{38.12(6)}, 9^{44.99(6)}, 11^{47.47(7)}, 10^{52.05(8)}, 12^{57.12(11)}, 14^{61.51(10)}, 13^{63.51(10)}$	

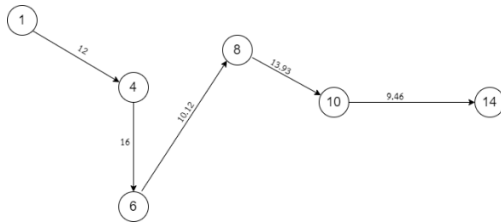


Figure 5. Shortest path for Dijkstra's algorithm จาก Table 3 สามารถเขียนระยะทางจากโหนด 1 ไปยังโหนดอื่น ๆ แสดงได้ดัง Table 4

Table 4. Distance and distances value from node 1 to other nodes

Source node	Destination node	distance value
1	2	1→2 =8.44
1	3	1→3 = 27.73
1	4	1→4 = 12
1	5	1→5 = 10.67
1	6	1→4→6 = 28
1	7	1→4→7 = 17.58
1	8	1→4→6→8 = 38.12
1	9	1→4→6→9 = 44.99
1	10	1→4→6→8→10 = 52.05
1	11	1→4→7→11 = 47.47
1	12	1→4→7→11→12 = 57.12
1	13	1→4→6→8→10→13 = 63.51
1	14	1→4→6→8→10→14 = 61.51

สรุปผลการวิจัย

การแก้ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบพัชชี่ เป็นปัญหาการเพิ่มประสิทธิภาพเครือข่ายที่ได้รับ ความสนใจอย่างมากในด้านทฤษฎีกราฟแบบพัชชี่ จากการศึกษางานวิจัยก่อนหน้านี้ นักวิจัยหลายคน ได้ใช้วิธีการและเครื่องมือต่าง ๆ ในการหาระยะทาง ที่สั้นที่สุดภายใต้ข้อมูลที่ไม่มีความแน่นอนหรือมี ความคลุมเครือ ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นการ พัฒนาวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าว โดยกำหนด ค่าใช้จ่ายในการเดินทางเป็นตัวเลขพัชชี่สหัชญาณ สามเหลี่ยม จากนั้นทำการแปลงค่าตัวเลขพัชชี่ โดยใช้วิธีเซนต์รอยด์ของตัวเลขพัชชี่เพื่อแปลงค่า ตัวเลขพัชชี่ให้สามารถนำไปวิเคราะห์ได้ แล้วประยุกต์ใช้อัลกอริทึม Dijkstra ในการค้นหา ระยะทางที่สั้นที่สุด ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่า วิธีการที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถแก้ปัญหาใน สถานการณ์ที่มีความคลุมเครือได้อย่างมีประสิทธิภาพและสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องและ เหมาะสมได้ วิธีการที่ได้นำเสนอนี้สามารถนำไป ประยุกต์ใช้ในการวางแผนการเดินทาง เช่น การคำนวณเส้นทางที่สั้นที่สุดในการเดินทาง ไม่ว่าจะเป็น การขับรถ การเดินเท้า หรือการใช้ขนส่ง สาธารณะ การจัดการด้านการขนส่ง เช่น การจัดส่ง สินค้าโดยคำนวณเส้นทางที่สั้น และเร็วที่สุดสำหรับการ จัดส่งสินค้า เพื่อลดต้นทุนและเวลาในการ ขนส่ง รวมไปถึงการวางแผนการเดินทางท่องเที่ยว ที่มีประสิทธิภาพ จะช่วยให้การเดินทางสะดวกและ ประหยัดเวลา เป็นต้น



ข้อเสนอแนะ

การทำวิจัยครั้งต่อไป ผู้วิจัยควรศึกษาวิธีการแก้ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุดให้หลากหลาย พร้อมทั้งทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบเพื่อค้นหาวิธีการที่ให้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพสูงสุด

เอกสารอ้างอิง

1. Dijkstra EW. A note on two problems in connexion with graphs. *Numer Math* (Heidelb) 1959;1:269–71.
2. Bellman RE, Zadeh LA. Decision making in a fuzzy environment. *Manage Sci* 1970;17:141-64.
3. Dubois D, Prade H. *Theory and Applications: Fuzzy Sets and Systems*, New York: Academic Press; 1980.
4. Nayeem SMA, Pal M. Shortest path problem on a network with imprecise edge weight. *Fuzzy Optim Decis Mak* 2005;4:293–312.
5. Hernandez F, Lamata MT, Verdegay JL, Yamakami A. The shortest path problem on networks with fuzzy parameters. *Fuzzy Sets Syst* 2007;158:1561–70.
6. Takahashi MT, Yamakami A. On fuzzy shortest path problems with fuzzy parameters: an algorithmic approach. *Fuzzy Logic Control for an Autonomous Robot*. 2005 Annual meeting of the North American fuzzy information processing

society; 26-28 June 2005; Detroit, MI, USA.

IEEE; 2005.

7. Okada S. Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths. *Fuzzy Sets Syst* 2004;142:335–57.
8. Lin L, Wu C, Ma L. A genetic algorithm for the fuzzy shortest path problem in a fuzzy network. *Complex Intell Syst* 2021;7:225–34.
9. Deng Y, Chen Y, Zhang Y, Mahadevan S. Fuzzy Dijkstra algorithm for shortest path problem under uncertain environment. *Appl Soft Comput* 2012;12:1231–7.
10. Rosen KH. *Discrete mathematics and its applications*. 6th ed. New York: McGraw-Hill. Publishing; 2012.
11. Zadeh LA. Fuzzy sets. *Inform Control* 1965;8:338-56.
12. Dubois D, Prade H. Operation on fuzzy numbers. *Int J Syst Sci* 1978;9:613-26.
13. Atanassov KT. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Set Syst* 1986;20:87–96.
14. Mondal SP, Roy TK. First order non homogeneous ordinary differential equation with initial value as triangular intuitionistic fuzzy number. *J Uncertain Syst* 2015;9:274-85.
15. Wang YM, Yang J, Xu DL, Chin KS. On the centroids of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets Syst* 2006;157:919-26.