

ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลบวกของจำนวนแนวรูปไม้ฮอกกี้บนสามเหลี่ยมปาสกาล**
Generalized Beauty: The Sum of the Numbers in a Hockey Stick on
the Pascal's Triangle**

กัลยา ทนะมูล อัจฉรา พระสงฆ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

Kanlaya Tanamoon, Autchara Prasong & Aiyared Iampan*
Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหาสรุปทั่วไปของผลบวกของจำนวนแนวรูปไม้ฮอกกี้บนสามเหลี่ยมปาสกาล ผลการศึกษาพบว่าสรุปทั่วไปของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล เท่ากับ $\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$ เมื่อ n และ m เป็น

จำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 0$ และ $m > 0$ ยิ่งไปกว่านั้น ผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ โดยเริ่มจากด้านซ้ายและด้านขวาบนสามเหลี่ยมปาสกาลนั้นเท่ากัน

คำสำคัญ: สามเหลี่ยมปาสกาล ผลบวกของจำนวนในไม้ฮอกกี้

Abstract

The purpose of this study was to find a general form of the sum of the numbers in a hockey stick on Pascal's triangle. The results demonstrate that the general form of the sum of the numbers in the handle of the hockey stick, with m slots and starting from the left in the $(n+1)^{\text{th}}$ row on Pascal's triangle is equal to $\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$ where n and

m are integers with $n \geq 0$ and $m > 0$. Moreover, the sum of the numbers in the handle of the hockey stick, starting from the left and right on the Pascal's triangle, are equal.

Keywords: Pascal's triangle, sum of the numbers in a hockey stick

* ผู้ประสานงานหลัก (Corresponding Author)

e-mail: aiyared.ia@up.ac.th

Generalized Beauty: The Sum of the Numbers in a Hockey Stick on
the Pascal's Triangle

**บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

บทนำ

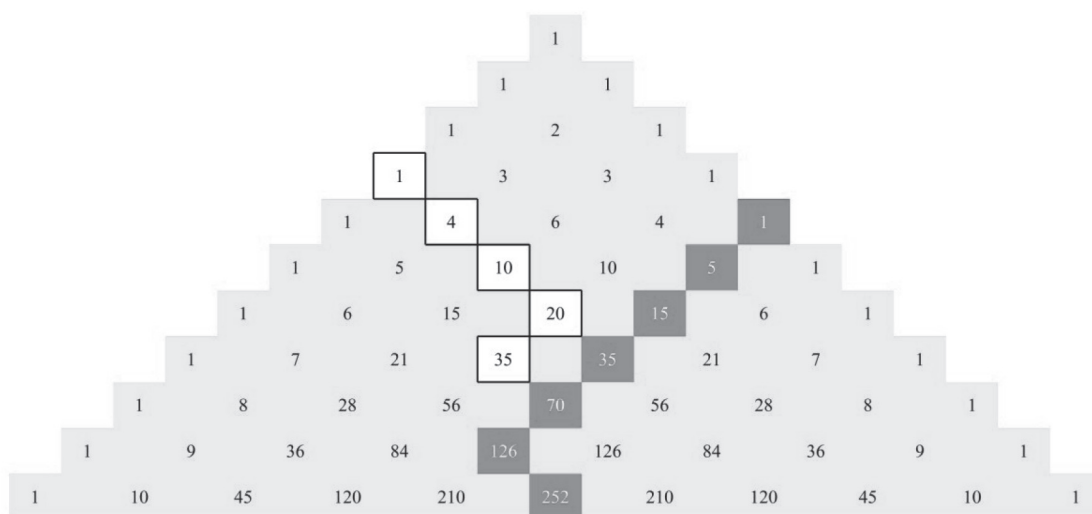
รูปสามเหลี่ยมปาสกาล (Pascal's triangle) คือแถวลำดับรูปสามเหลี่ยม (Triangular array) ของสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficient) ซึ่งจะกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 2 โดยได้ตั้งชื่อเพื่อเป็นเกียรติให้กับปาสกาล (Blaise Pascal, ค.ศ. 1623-1662) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส รูปสามเหลี่ยมปาสกาลนับว่าเป็นเครื่องมือที่สำคัญและมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึงระดับสูง และยังพบอีกว่ารูปสามเหลี่ยมปาสกาลมีความสัมพันธ์กับเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์อีกหลายเรื่อง อาทิ จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number) จำนวนรูปสามเหลี่ยม (Triangular number) จำนวนทรงสี่หน้า (Tetrahedral number) และจำนวนทรงห้าหน้า (Pentatope number) lampan (2012) ได้ศึกษาเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวบนสามเหลี่ยมปาสกาลกับผลการยกกำลังของเลข 11 และได้พบว่าเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลเท่ากับ 11^n สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นั่นคือ

$$\bar{\Delta}_{n+1} = {}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_r = 1^n \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เมื่อ ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ตำราบางเล่มอาจจะเขียนแทน nC_r ด้วย $\binom{n}{r}$ และ $\bar{\Delta}_n$ แทนเลขเรียงกันจากซ้าย

ไปขวาในแถวที่ n บนสามเหลี่ยมปาสกาล

จากรูปสามเหลี่ยมปาสกาล สังเกตเห็นความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกของจำนวนในแนวไม้ฮอกกี้ ในส่วนด้านของไม้ฮอกกี้ที่ยาว 4 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 4 ถึงแถวที่ 7 บนสามเหลี่ยมปาสกาลกับจำนวนในส่วนหัวของไม้ฮอกกี้ในแถวที่ 8 และผลบวกของจำนวนในแนวไม้ฮอกกี้ ในส่วนด้านของไม้ฮอกกี้ที่ยาว 6 ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ 5 ถึงแถวที่ 10 บนสามเหลี่ยมปาสกาลกับจำนวนในส่วนหัวของไม้ฮอกกี้ในแถวที่ 11 ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ไม้ฮอกกี้ที่ยาว 4 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 4 และไม้ฮอกกี้ที่ยาว 6 ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ 5 บนสามเหลี่ยมปาสกาล

ให้ HL_m^n แทนผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล และให้ HR_m^n แทนผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล เมื่อ $n, m \in \mathbf{Z}$ โดยที่ $n \geq 0$ และ $m \geq 1$ จากภาพที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} HL_4^3 &= {}^3C_3 + {}^4C_3 + {}^5C_3 + {}^6C_3 \\ &= \frac{3!}{3!0!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{6!}{3!3!} \\ &= 1 + 4 + 10 + 20 \\ &= 35 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} HR_6^4 &= {}^4C_0 + {}^5C_1 + {}^6C_2 + {}^7C_3 + {}^8C_4 + {}^9C_5 \\ &= \frac{4!}{0!4!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{7!}{3!4!} + \frac{8!}{4!4!} + \frac{9!}{5!4!} \\ &= 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 \\ &= 252 \end{aligned}$$

จากภาพที่ 1 สรุปเป็นข้อสังเกตได้ดังนี้

(1) เมื่อพิจารณาไม้ฮอกกี้ที่ยาว 4 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 4 ถึงแถวที่ 7 บนสามเหลี่ยมปาสกาล พบว่าผลบวกของจำนวนในแนวไม้ฮอกกี้ ที่ส่วนด้านของไม้ฮอกกี้จะมีค่าเท่ากับจำนวนในส่วนหัวของไม้ฮอกกี้ในแถวที่ 8 คือ 35 ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาไม้ฮอกกี้ที่ยาว 6 ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ 5 ถึงแถวที่ 10 บนสามเหลี่ยมปาสกาล พบว่าผลบวกของจำนวนในแนวไม้ฮอกกี้ ที่ส่วนด้านของไม้ฮอกกี้จะมีค่าเท่ากับจำนวนในส่วนหัวของไม้ฮอกกี้ในแถวที่ 11 คือ 252

(2) รูปทั่วไปของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล และรูปทั่วไปของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลจะมีลักษณะเป็นอย่างไร

(3) ผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้าย และเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ดังนั้นบทความนี้จะศึกษาความสัมพันธ์และหารูปทั่วไปของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้าย และเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล เมื่อ n และ m เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 0$ และ $m > 0$ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญในการพิสูจน์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบททวินาม (The Binomial Theorem) (Solomon, 1997) กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n {}^nC_r x^{n-r} y^r \quad (1)$$

สองบทตั้งต่อไปนี้ เป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

บทตั้ง 1 เอกลักษณ์ปาสกาล (Pascal's Identity) (Shoup, 2009) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq r \leq n$

บทตั้ง 2 (Shoup, 2009) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \leq r \leq n$

ผลการศึกษาหลัก

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงความสัมพันธ์และรูปทั่วไปของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล เมื่อ n และ m เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 0$ และ $m > 0$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้จะ

ทฤษฎีบท 3 สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จะได้ว่าผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลเท่ากับจำนวนที่หัวไม้ฮอกกี้ นั่นคือ

$$HL_m^n = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} \quad (2)$$

โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$HL_m^n = \frac{n!}{n!0!} + \frac{(n+1)!}{n!1!} + \frac{(n+2)!}{n!2!} + \dots + \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(m)$ แทนข้อความ

$$HL_m^n = \frac{n!}{n!0!} + \frac{(n+1)!}{n!1!} + \frac{(n+2)!}{n!2!} + \dots + \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m

ถ้า $m=1$ แล้ว $HL_1^n = \frac{n!}{n!0!} = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(1-1)!}$ ฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า

$P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k จะได้ว่า

$$HL_k^n = \frac{n!}{n!0!} + \frac{(n+1)!}{n!1!} + \frac{(n+2)!}{n!2!} + \dots + \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n+1)!(k-1)!}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} HL_{k+1}^n &= \frac{n!}{n!0!} + \frac{(n+1)!}{n!1!} + \frac{(n+2)!}{n!2!} + \dots + \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} + \frac{(n+k)!}{n!k!} \\ &= \frac{(n+k)!}{(n+1)!(k-1)!} + \frac{(n+k)!}{n!k!} \\ &= (n+k)! \left[\frac{1}{(n+1)!(k-1)!} + \frac{1}{n!k!} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+k)! \left[\frac{k+(n+1)}{(n+1)!k!} \right] \\
&= (n+k)(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)! \left[\frac{(n+k+1)}{(n+1)!k!} \right] \\
&= \frac{(n+2)(n+3)\dots(n+k)[n+(k+1)]}{k!} \\
&= \frac{((n+1)+1)((n+1)+2)\dots((n+1)+(k-1))((n+1)+k)}{k!} \\
&= \frac{(n+1)!((n+1)+1)((n+1)+2)\dots((n+1)+(k-1))((n+1)+k)}{(n+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!k!} \\
&= \frac{(n+(k+1))!}{(n+1)!((k+1)-1)!}
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$HL_m^n = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } m$$

ต่อไปจะยกตัวอย่างการหาค่าของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ โดยเริ่มจากด้านซ้ายบน สามเหลี่ยมปาสกาลโดยใช้ทฤษฎีบท 3 และตรวจคำตอบด้วยทฤษฎีบททวินามและโปรแกรมคอมพิวเตอร์

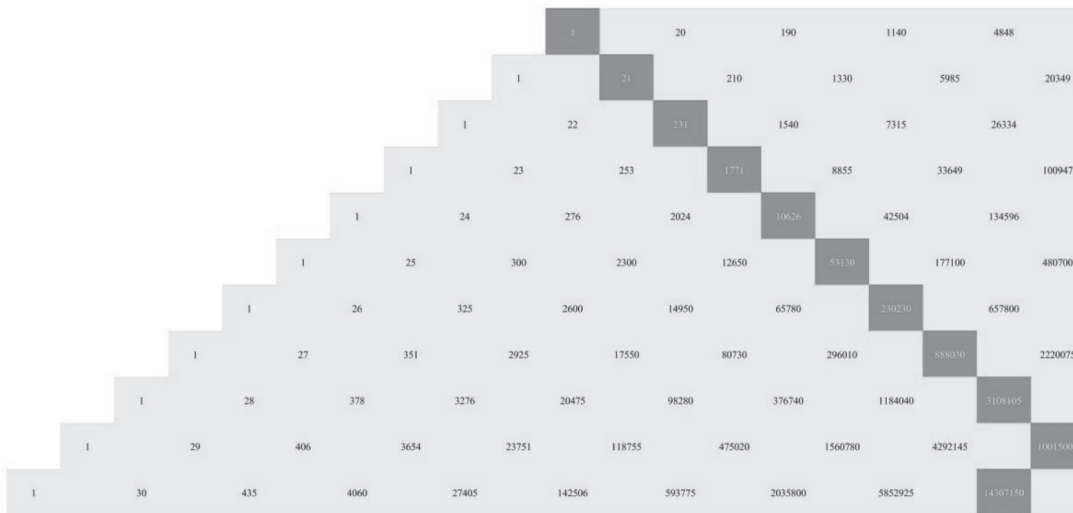
ตัวอย่าง 1 การหาผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว 7 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 13 บนสามเหลี่ยมปาสกาล


$$\begin{aligned} HL_7^{12} &= \frac{(12+7)!}{(12+1)!(7-1)!} \\ &= \frac{19!}{13!6!} \\ &= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{720} \\ &= \frac{19,535,040}{720} \\ &= 27,132 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่าผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว 7 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้าย
ในแถวที่ 13 บนสามเหลี่ยมปาสกาล เท่ากับ

$$\begin{aligned}
 HL_7^{12} &= \frac{12!}{12!0!} + \frac{(12+1)!}{12!1!} + \frac{(12+2)!}{12!2!} + \dots + \frac{(12+7-1)!}{12!6!} \\
 &= 1 + 13 + \frac{13 \cdot 14}{2} + \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} + \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{24} + \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{120} + \\
 &\quad \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{720} \\
 &= 1 + 13 + 91 + 455 + 1,820 + 6,188 + 18,564 \\
 &= 27,132
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 การหาผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว 10 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 21 บนสามเหลี่ยมปาสกาล



ภาพที่ 3 ไม้ฮอกกี้ที่ยาว 10 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 21 บนสามเหลี่ยมปาสกาล โดยผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้เท่ากับจำนวนที่หัวไม้ฮอกกี้ คือ 14,307,150

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่าผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว 10 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ 21 บนสามเหลี่ยมปาสกาลเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 HL_{10}^{20} &= \frac{(20+10)!}{(20+1)!(10-1)!} \\
 &= \frac{30!}{21!9!} \\
 &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 14,307,150
 \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 3 ทำให้ได้รับบทแทรก 1 ดังนี้

บทแทรก 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จะได้ว่าผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลเท่ากับผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล นั่นคือ

$$HL_m^n = HR_m^n \quad (3)$$

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

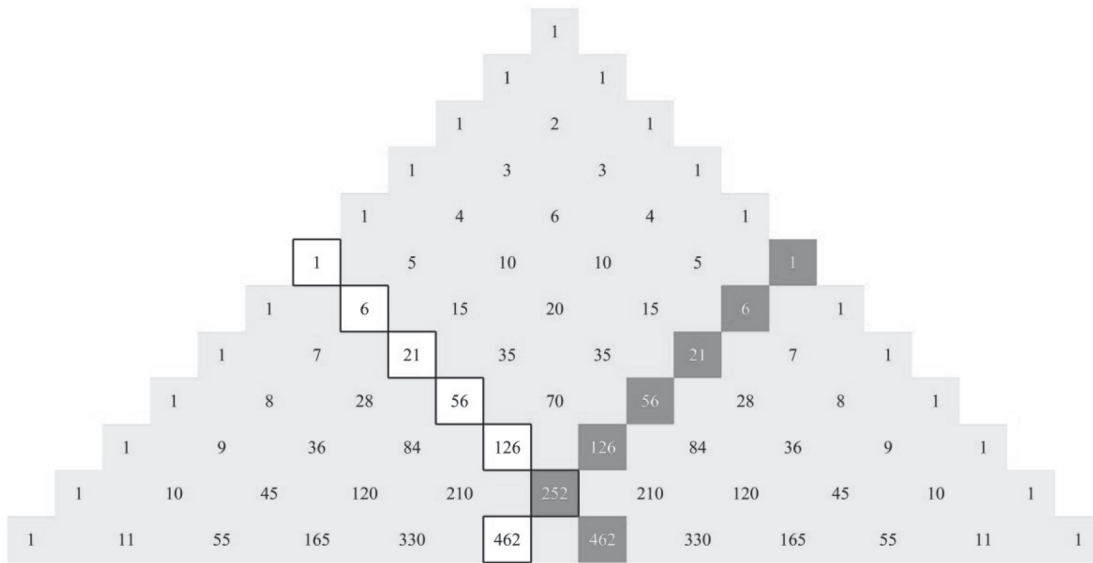
$$HL_m^n = {}^nC_n + {}^{n+1}C_n + {}^{n+2}C_n + \dots + {}^{n+m-1}C_n$$

โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 HR_m^n &= {}^nC_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+2}C_2 + \dots + {}^{n+m-1}C_{m-1} \\
 &= {}^nC_{n-0} + {}^{n+1}C_{n+1-1} + {}^{n+2}C_{n+2-2} + \dots + {}^{n+m-1}C_{n+m-1-(m-1)} \\
 &= {}^nC_n + {}^{n+1}C_n + {}^{n+2}C_n + \dots + {}^{n+m-1}C_n \\
 &= HL_m^n
 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลเท่ากับผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล

ตัวอย่าง 3 การหาผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว 6 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้าย และเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ 6 บนสามเหลี่ยมปาสกาล



ภาพที่ 4 ไม้ฮอกกี้ที่ยาว 6 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายและด้านขวาในแถวที่ 6 บนสามเหลี่ยมปาสกาล โดยผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้เท่ากับจำนวนที่หัวไม้ฮอกกี้ คือ 462

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 3 และบทแทรก 1 จะได้ว่าผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว 6 ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายและด้านขวาในแถวที่ 6 บนสามเหลี่ยมปาสกาลเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 HR_6^5 = HL_6^5 &= \frac{(5+6)!}{(5+1)!(6-1)!} \\
 &= \frac{11!}{6!5!} \\
 &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{55440}{120} \\
 &= 462
 \end{aligned}$$

บทสรุป

รูปทั่วไปของผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาล เมื่อ n และ m เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 0$ และ $m > 0$ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญในการพิสูจน์ ซึ่งกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 3 ดังนี้

$$HL_m^n = \frac{n!}{n!0!} + \frac{(n+1)!}{n!1!} + \frac{(n+2)!}{n!2!} + \dots + \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$$

อีกทั้งยังพบความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลกับผลบวกของจำนวนในด้ามไม้ฮอกกี้ที่ยาว m ช่อง โดยเริ่มจากด้านขวาในแถวที่ $n+1$ บนสามเหลี่ยมปาสกาลนั้นเท่ากัน ซึ่งได้กล่าวไว้ในบทแทรก 1 ดังนี้

$$HL_m^n = HR_m^n$$

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถหาจำนวนบางจำนวนที่หายไปในด้ามไม้ฮอกกี้ได้จากทฤษฎีบท 3 และยังสามารถศึกษาและหารูปทั่วไปบางอย่างบนสามเหลี่ยมปาสกาล เช่น ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์บนสามเหลี่ยมปาสกาล หรือหารูปทั่วไปทางพีชคณิตที่มีจำนวนหลักมาก ๆ ในทำนองเดียวกับการศึกษาผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่กับเลขโดด 9 (Loawtaew et al., 2014)

References

- Clark, W.E. (2002). *Elementary Number Theory*. Department of Mathematics, University of South Florida.
- Iampan, A. (2012). Generalized beauty : the Pascal's triangle and the power of 11. *Thai Journal of Science and Technology*, 1(2), 79-88. (in Thai).
- Loawtaew, S. & Iampan, A. (2014). Generalized beauty : the product of the arranged number by increasing to the left by odd number and the digit number 9. *SDU Research Journal of Humanities and Social Sciences*, 10(3), 241-253. (in Thai).

Shoup, V. (2009). *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra (Second Edition)*. Cambridge University Press, New York.

Solomon, R.C. (1997). *A Level Mathematics (4th Edition)*. Letts Educational, London.

คณะผู้เขียน

นางสาวกัลยา ทนมูล

นิสิต วท.บ. คณิตศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา 56000
e-mail: k.tanamoon@gmail.com

นางสาวอัจฉรา พระสงฆ์

นิสิต วท.บ. คณิตศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา 56000
e-mail: a.prasong@gmail.com

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัยเรศ เอี่ยมพันธ์

อาจารย์ประจำ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยพะเยา จังหวัดพะเยา 56000
e-mail: aiyaed.ia@up.ac.th