

สมการ Jensen-Hosszú กับการดำเนินการทวิภาค

$$x * y = \ln(e^x + e^y)$$

On a Jensen-Hosszú Equation with a Binary Operation

$$x * y = \ln(e^x + e^y)$$

ศิริจันทร์ เวสารัชชศต*, ณัฐภัทร ชอบประดิษฐ์, สหรัฐ สงวนพนงษ์

และอุกัันตา เสนแก้ว

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Sirichan Vesarachasart* Nadtapat Chobpradith, Saharath Sa-nguanpong

and Oukanta Sankaew

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,

Rangsit Centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อหาผลเฉลยของสมการ Jensen-Hosszú : $f(x+y-(x*y))+f(x*y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และการดำเนินการทวิภาค $x*y = \ln(e^x + e^y)$ ผลการศึกษาพบว่าผลเฉลยของสมการนี้ คือ $f(x) = A(x) + f(0)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก

คำสำคัญ: สมการ Jensen-Hosszú; สมการเชิงฟังก์ชัน; ฟังก์ชันเชิงการบวก; ผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชัน

Abstract

The purpose of this research is to find a solution of the Jensen-Hosszú Equation: $f(x+y-(x*y))+f(x*y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, where f is a real-valued function with a binary operation $x*y = \ln(e^x + e^y)$. The result found that a solution of this equation is $f(x) = A(x) + f(0)$ for all real value x and $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is an additive function.

Keywords: Jensen-Hosszú equation; functional equation; additive function; Solutions of functional equation

1. คำนำ

ในปี ค.ศ. 1967 Hosszú ได้ศึกษาสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y) \quad (1.1)$$

เมื่อ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จากการศึกษานี้ของ Hosszú พบว่าผลเฉลยของ (1.1) อยู่ในรูป $f(x) = A(x) + f(0)$ เมื่อ $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก

ในเวลาต่อมา (1.1) ได้เป็นที่รู้จักกันในชื่อ “สมการ Hosszú” และมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจนำสมการ Hosszú มาศึกษาต่อ หนึ่งในนักคณิตศาสตร์เหล่านั้น คือ Daróczy โดยในปี ค.ศ. 1999 Daróczy (Daróczy, 1999) ได้นิยามการดำเนินการทวิภาค $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ขึ้นใหม่ คือ

$$x * y = \ln(e^x + e^y) \quad (1.2)$$

Daróczy ได้นำการดำเนินการทวิภาคซึ่งนิยามดัง (1.2) ไปแทนลงใน (1.1) ได้เป็น

$$f(x+y-(x*y))+f(x*y)=f(x)+f(y) \quad (1.3)$$

และพบว่าผลเฉลยของ (1.3) ยังคงมีรูปแบบเดียวกับผลเฉลยของ (1.1)

ต่อมาในปี ค.ศ. 2009 Kominek ได้นำสมการ Jensen ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1.4)$$

มารวมกับสมการ Hosszú และเกิดเป็นสมการ Jensen-Hosszú (Kominek, 2009)

$$f(x+y-xy)+f(xy)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1.5)$$

ซึ่ง Kominek พบว่าผลเฉลยของ (1.5) ยังคงอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงการบวกเช่นเดียวกับผลเฉลยของ (1.1) เช่นกัน

ในงานวิจัยนี้ได้หาผลเฉลยของ (1.5) โดยแทน xy ด้วย $x*y$ ที่นิยามการดำเนินการทวิภาคดัง (1.2) ซึ่งเกิดเป็นสมการ Jensen-Hosszú ใหม่

ดังนี้

$$f(x+y-(x*y))+f(x*y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1.6)$$

โดยที่ $x*y = \ln(e^x + e^y)$ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ และ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1 (Kuczma, 1985)

กำหนดให้ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $D \neq \emptyset$ และให้ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f เป็น ฟังก์ชันเชิงการบวก (additive function) ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องสมการ $f(x+y)=f(x)+f(y)$ สำหรับ $x, y \in D$

ทฤษฎีบท 2.2 (Kominek, 2009)

ทฤษฎีบทภาคขยาย (The Extension Theorem) กำหนดให้ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ โดยที่ $D \neq \emptyset$ เป็นเซตเปิดและเซตเชื่อมโยง ถ้า g เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก สำหรับทุก $(u,v) \in D$ แล้วจะมีฟังก์ชันเชิงการบวก $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่ทำให้ $g(x) = A(x) + a$ เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

จากบทนิยามของการดำเนินการทวิภาค (1.2) สามารถแสดงได้ว่าการดำเนินการทวิภาค $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ นั่นคือ สำหรับจำนวนจริง x, y และ z ใด ๆ $x*y*z = x*(y*z) = (x*y)*z$

3. ผลการศึกษา

จากการศึกษา (1.6) หรือสมการ Jensen-Hosszú ใหม่ พบว่าผลเฉลยของ (1.6) อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงการบวก สำหรับบทพิสูจน์ของผลเฉลยของ (1.6) นั้น สามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยทฤษฎีบทที่จะได้มาก่อน ได้แก่ ทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $x, y \in \mathbb{R}$

ถ้า f สอดคล้องกับสมการ

$$f(x) + 2f(y) = f(x+2y) \text{ และ } f(0) = 0 \quad (3.1)$$

แล้ว $f(r y) = r f(y)$ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

พิสูจน์

กำหนดให้ r เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่สอดคล้อง (3.1) และ $x, y \in \mathbb{R}$

กรณี 1 ถ้า r เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $r=1$ แล้ว $f(1 \cdot y) = f(y) = 1 \cdot f(y)$

ถ้า $r=2$ แล้ว $f(2y) = f(0+2y) = f(0) + 2f(y) = 2f(y)$

ถ้า $r=3$ แล้ว $f(3y) = f(y+2y) = f(y) + 2f(y) = 3f(y)$

อาศัยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะสามารถพิสูจน์ได้

โดยง่ายว่า $f(r y) = r f(y)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม

บวก r ใด ๆ

ถ้า $r=-1$ แล้ว

$$f(y) = f(-y+2y) = f(-y) + 2f(y)$$

ดังนั้น $f(-y) = f(y) - 2f(y) = -f(y) \quad (3.2)$

กรณี 2 ถ้า r เป็นจำนวนเต็มลบ ได้ว่า

$r = -s$ เมื่อ s เป็นจำนวนเต็มบวก อาศัยผลจาก

กรณี 1 และ (3.2) จะได้ $f(r y) = f((-s)y) = f(-sy)$

$= -f(sy) = -(sf(y)) = (-s)f(y) = rf(y)$ จึงได้ว่า

$f(r y) = r f(y)$ สำหรับจำนวนเต็มลบ r ใด ๆ

จากทั้งสองกรณี สามารถสรุปได้ว่า

$f(r y) = r f(y)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ใด ๆ

ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า $r = \frac{p}{q}$ เมื่อ

p, q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$ เนื่องจาก

$q f(r y) = f(r q y) = f(p y) = p f(y)$ ดังนั้น

$f(r y) = \frac{p}{q} f(y)$ หรือ $f(r y) = r f(y)$ นั่นคือ

สามารถแสดงได้ว่า $f(r y) = r f(y)$ สำหรับ

จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

ทฤษฎีบท 3.2

กำหนดให้ $D = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid u, v < -\ln 2\}$

ถ้า $(u, v) \in D$ แล้ว จะมี $x, y \in \mathbb{R}^+$ ที่

$$u = -(x * y * \ln(e^{-x} - e^y))$$

$$\text{และ } v = (x * y) + \ln(e^{-x} - e^y)$$

เมื่อ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตของจำนวนจริงซึ่งกำหนดโดย (1.2)

พิสูจน์

กำหนดให้ $(u, v) \in D$ และให้ $C = \sqrt{e^{-2u} - 4}$

เนื่องจาก $u < -\ln 2$ จึงได้ว่า $e^{-2u} > 4$ นั่นคือ C

เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{ให้ } B_1 = \frac{e^{-u} + C}{2}, B_{-1} = \frac{2}{e^{-u} + C},$$

$$B_2 = \frac{e^{-2u} + e^{-u}C - 2}{2} \quad \text{และ} \quad B_{-2} = \frac{2}{e^{-2u} + e^{-u}C - 2}$$

สามารถแสดงได้ว่า

$$B_1 B_{-1} = 1 = B_2 B_{-2}, (B_1)^2 = B_2 \text{ และ } (B_{-1})^2 = B_{-2}$$

และให้ $B = \sqrt{B_2 + B_{-2} + 2 - 4e^v}$ เห็นได้ว่า B เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{กำหนดให้ } x = \ln B_1 \text{ และ } y = \ln \left(\frac{B_{-1} - B_1 + B}{2} \right)$$

เนื่องจาก $B_1 > 1$ ดังนั้น $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} (B_{-1} + B)^2 &= (B_{-1})^2 + 2B_{-1}B + B^2 \\ &= B_{-2} + 2B_{-1}B + B^2 \\ &= B_{-2} + 2B_{-1}B + (B_2 + B_{-2} + 2 - 4e^v) \\ &= B_2 + (2B_{-2} + 2 - 4e^v + 2B_{-1}B) \\ &> B_2 = (B_1)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $B_{-1} + B > B_1$ จะได้ว่า $B_{-1} - B_1 + B > 0$ นั่นคือ $y \in \mathbb{R}^+$

ในทำนองเดียวกันจะสามารถแสดงได้ว่า

$$B_{-1} + B_1 - B > 0 \text{ และจาก } x = \ln B_1 \text{ จึงทำให้}$$

$$e^{-x} = B_{-1} \text{ ดังนั้น } e^{-x} - e^y = B_{-1} - \left(\frac{B_{-1} - B_1 + B}{2} \right) =$$

$$\frac{B_{-1} + B_1 - B}{2} > 0 \text{ เนื่องจาก}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(x * y * \ln\left(e^{-x} - e^y\right)\right) \\
 & = -\ln\left(e^x + e^y + e^{\ln(e^{-x} - e^y)}\right) \\
 & = -\ln\left(e^x + e^y + e^{-x} - e^y\right) \\
 & = -\ln\left(e^x + e^{-x}\right) \\
 & = -\ln\left(B_1 + B_{-1}\right) \\
 & = -\ln\left(\frac{e^{-u} + C}{2} + \frac{2}{e^{-u} + C}\right) \\
 & = -\ln\left(\frac{e^{-2u} + 2e^{-u}C + C^2 + 4}{2(e^{-u} + C)}\right) \\
 & = -\ln\left(\frac{e^{-2u} + 2e^{-u}C + e^{-2u}}{2(e^{-u} + C)}\right) \\
 & = -\ln\left(\frac{2e^{-2u} + 2e^{-u}C}{2(e^{-u} + C)}\right) \\
 & = -\ln e^{-u} \\
 & = u
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $u = -\left(x * y * \ln\left(e^{-x} - e^y\right)\right)$

เนื่องจาก $e^{-x} e^y = B_{-1} \left(\frac{B_{-1} - B_1 + B}{2} \right) =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(B_{-1})^2 - B_{-1}B_1 + B_{-1}B}{2} = \frac{B_{-2} - 1 + B_{-1}B}{2}, \\
 & e^x e^y = B_1 \left(\frac{B_{-1} - B_1 + B}{2} \right) = \\
 & \frac{B_1B_{-1} - B_1^2 + B_1B}{2} = \frac{1 - B_1^2 + B_1B}{2} = \frac{1 - B_2 + B_1B}{2} \\
 & \text{และ } e^{2y} = \left(\frac{B_{-1} - B_1 + B}{2} \right)^2 = \frac{B_{-2} + B_2 + B_{-1}B - B_1B - 2e^y}{2} \\
 & \text{ดังนั้น } (x * y) + \ln(e^{-x} - e^y) \\
 & = \ln(e^x + e^y) + \ln(e^{-x} - e^y) \\
 & = \ln(1 + e^{-x}e^y - e^xe^y - e^{2y}) \\
 & = \ln\left(1 + \left(\frac{B_{-2} - 1 + B_{-1}B}{2}\right) - \left(\frac{1 - B_2 + B_1B}{2}\right) - \left(\frac{B_{-2} + B_2 + B_{-1}B - B_1B - 2e^y}{2}\right)\right) \\
 & = v \\
 & \text{นั่นก็คือ } y = \ln\left(\frac{B_{-1} - B_1 + B}{2}\right)
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.3

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง f สอดคล้องกับ (1.6) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันเชิงการบวก $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x) = A(x) + f(0)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิสูจน์

ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับ (1.6) และ x, y, z เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า $f(x + (y * z) - (x * y * z)) + f(x * y * z) = 2f\left(\frac{x + (y * z)}{2}\right)$ (3.3)

และ $f((x * y) + z - (x * y * z)) + f(x * y * z) = 2f\left(\frac{(x * y) + z}{2}\right)$ (3.4)

จาก (3.3) จะได้ $f(x * y * z) = 2f\left(\frac{x + (y * z)}{2}\right) - f(x + (y * z) - (x * y * z))$ (3.5)

จาก (3.4) ได้ว่า $f(x * y * z) = 2f\left(\frac{(x * y) + z}{2}\right) - f((x * y) + z - (x * y * z))$ (3.6)

จาก (3.5) และ (3.6) จะได้ว่า

$$2f\left(\frac{x+(y*z)}{2}\right) - f(x+(y*z)-(x*y*z)) = 2f\left(\frac{(x*y)+z}{2}\right) - f((x*y)+z-(x*y*z))$$

ดังนั้น $f((x*y)+z-(x*y*z)) + 2f\left(\frac{x+(y*z)}{2}\right) = f(x+(y*z)-(x*y*z)) + 2f\left(\frac{(x*y)+z}{2}\right)$ (3.7)

$$\text{กำหนดให้ } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ นิยามโดย } f(x) = g(x) + f(0) \quad (3.8)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x ; จาก (3.8) จะได้ว่า $g(0) = 0$ อาศัย (3.7) และ (3.8) พบว่า

$$g((x*y)+z-(x*y*z)) + 2g\left(\frac{x+(y*z)}{2}\right) + 3f(0) = g(x+(y*z)-(x*y*z)) + 2g\left(\frac{(x*y)+z}{2}\right) + 3f(0)$$

ดังนั้น $g((x*y)+z-(x*y*z)) + 2g\left(\frac{x+(y*z)}{2}\right) = g(x+(y*z)-(x*y*z)) + 2g\left(\frac{(x*y)+z}{2}\right)$ (3.9)

ให้ $z = \ln(e^{-x} - e^y)$ จะได้ว่า $x+(y*z) = 0$ และจาก (3.9) จึงทำให้ได้

$$g((x*y)+\ln(e^{-x}-e^y)-(x*y*\ln(e^{-x}-e^y))) + 2g(0) = g(-(x*y*\ln(e^{-x}-e^y))) + 2g\left(\frac{(x*y)+\ln(e^{-x}-e^y)}{2}\right)$$

เนื่องจาก $g(0) = 0$ จึงได้

$$g((x*y)+\ln(e^{-x}-e^y)-(x*y*\ln(e^{-x}-e^y))) = g(-(x*y*\ln(e^{-x}-e^y))) + 2g\left(\frac{(x*y)+\ln(e^{-x}-e^y)}{2}\right)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad g(u+v) = g(u) + 2g\left(\frac{v}{2}\right) \quad (3.10)$$

$$\text{เมื่อ } u = -(x*y*\ln(e^{-x}-e^y)) \text{ และ } v = (x*y)+\ln(e^{-x}-e^y)$$

$$\text{จาก (3.10) จะได้ว่า } g(u) + 2g\left(\frac{v}{2}\right) = g\left(u + 2\left(\frac{v}{2}\right)\right)$$

อาศัยทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 จะได้ $g(u) + g(v) = g(u+v)$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก และโดยอาศัยผลจากทฤษฎีบท 2.2 จึงได้ว่า มีฟังก์ชันเชิงการบวก $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่

$$g(x) = A(x) + a \quad (3.11)$$

เมื่อ $x, a \in \mathbb{R}$; จาก (3.11) และ $g(0) = 0$ พบว่า $a = 0$ นั่นคือสามารถแสดงได้ว่า มีฟังก์ชันเชิงการบวก $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x) = A(x) + f(0)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ในทางกลับกัน ถ้ามีฟังก์ชันเชิงการบวก $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x) = A(x) + f(0)$

สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว; ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้

$$f(x+y-(x*y)) + f(x*y) = A(x+y-(x*y)) + f(0) + A(x*y) + f(0) = A(x) + A(y) + 2f(0)$$

$$\text{และ } 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\left[A\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(0)\right] = A\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + A\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + 2f(0) = A(x) + A(y) + 2f(0)$$

$$\text{ดังนั้น } f(x+y-(x*y)) + f(x*y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ นั่นคือ } f \text{ สอดคล้อง (1.6)}$$

4. สรุป

ผลจากการศึกษาสมการเชิงฟังก์ชัน (1.6) ซึ่งเป็นสมการ Jensen-Hosszú ใหม่ พบว่าสามารถหาผลเฉลยของ (1.6) ได้ โดยผลเฉลยคือฟังก์ชันค่าจริง f ซึ่งอยู่ในรูป $f(x) = A(x) + f(0)$ เมื่อ $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงการบวก สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ ผศ.ดร.จรินทร์ทิพย์ เสงคราวิทย์ สำหรับคำแนะนำต่าง ๆ ในการวิจัยนี้

6. รายการอ้างอิง

- Daróczy, Z., 1999, On a function equation of Hosszú type, *Mathematica Pannonica* 10(1): 77-82.
- Kominek, Z. , 2009, On a Jensen- Hosszú equation I, *Annales Mathematicae Silesianae* 23: 57-60.
- Kuczma, M., 1985, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Warszawa-Krakow-Katowice.