

การศึกษาการโบล์วอัพของผลเฉลย เนื่องจากแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น

A Study on Blow-up Solutions due to a Concentrated Nonlinear Source

ธวิกาหนต์ ตริยะประเสริฐ*

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Tawikan Treeyaprasert*

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Rangsit Centre, Klong Nueng, Klong Luang, Pathum Thani 12120

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอการพัฒนาผลการวิเคราะห์หาเงื่อนไขในการเกิดโบล์วอัพของผลเฉลยของสมการเชิงพาราโบล่าที่มีแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นบนโดเมนหนึ่งมิติ

คำสำคัญ : การโบล์วอัพของผลเฉลย แหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น

Abstract

This article presents some recent progress in the analysis of blow-up criteria for parabolic problems that have a concentrated nonlinear source on a one dimensional space domain.

Keywords: blow-up solutions, concentrated nonlinear source

1. บทนำ

กำหนดให้ T เป็นจำนวนจริงและ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ เมื่อ $n \geq 1$ พิจารณา $u(x, t)$ ที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น $u_t - \Delta u = f(t, x, u, \nabla u)$ ใน $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$,
(1.1) สามารถอธิบายอุณหภูมิของวัตถุอัน

เนื่องมาจากปฏิกิริยาเคมีได้ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t, x, u, \nabla u)$ คือแหล่งกำเนิดพลังงานอันเนื่องมาจากปฏิกิริยาคายความร้อน (Exothermic reaction)

มีนักวิชาการหลายท่านทำการศึกษาถึงผลเฉลยและสมบัติของผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

ในรูป (1.1) ตัวอย่างของผลงานวิจัยเมื่อ Ω เป็นโดเมนชนิดมีขอบเขต เช่น ผลงานวิจัยของ Osgood (1898), Hayakawa (1973), Lacey (1983), Friedman และ McLeod (1985), Chadam และคณะ (1992), Olmstead และ Roberts (1994), Chan และ Tian (2003) และ Chan และ Boonklurb (2007) ส่วนผลงานวิจัยของ Fujita (1966), Fujita (1970), Kobayashi และคณะ (1977), Herrero และ Velázquez (1992), Brezis และคณะ (1996), Galaktionov และ Levine (1996), Falconer และ Hu (2001) เป็นตัวอย่างผลวิจัยของปัญหาในรูป (1.1) เมื่อ Ω คือโดเมนชนิดไม่มีขอบเขต ถ้าฟังก์ชัน f ขึ้นอยู่กับ ∇u แล้วในการศึกษาปัญหาดังกล่าวจะต้องพิจารณาถึงการพาความร้อน (convection) รวมด้วย ในด้านพลศาสตร์ประชากร (population dynamics) สมการ (1.1) เมื่อ $f = |u|^{p-1}u - \beta|\nabla u|^q$ โดยที่ $p, q > 1$ และ $\beta > 0$ สามารถนำไปอธิบายการเปลี่ยนแปลงของทรัพยากรชีวภาพเนื่องจากผลกระทบของกลไกธรรมชาติ (Chipot and Weissler, 1989; Souplet and Weissler, 1997)

หัวข้อที่ 2 ของบทความวิชาการนี้กล่าวถึงนิยาม แนวคิด และทฤษฎีบทที่สำคัญซึ่งเกี่ยวข้องกับการศึกษาวิจัยในเรื่องการโบลล์อัพของผลเฉลยของปัญหาสมการเชิงพาราโบลาไม่เชิงเส้น

หัวข้อที่ 3 เป็นการวิเคราะห์และเรียบเรียงผลงานวิจัยที่นักวิชาการหลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการโบลล์อัพของผลเฉลยของสมการเชิงพาราโบลาเนื่องจากแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น (concentrated nonlinear source) โดยผู้เขียนได้วิเคราะห์เปรียบเทียบ สรุปความเหมือนและความต่างของแต่ละผลงานวิจัยทั้งด้านวิธีการที่ใช้ในการพิสูจน์และด้านผลลัพธ์ของแต่ละผลงานวิจัยว่า แต่ละ

ผลงานวิจัยได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องหรือแตกต่างกันอย่างไรบ้าง

หัวข้อที่ 4 เป็นการสรุปผลของการศึกษาเกี่ยวกับเงื่อนไขในการเกิดโบลล์อัพของผลเฉลยของสมการเชิงพาราโบลาเนื่องจากแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น และเสนอแนวคิดในการพัฒนาต่อยอดการศึกษาจากผลงานวิจัยต่าง ๆ ที่รวบรวมไว้ในหัวข้อที่ 3 เพื่อได้ผลวิจัยที่ให้ข้อมูลของผลเฉลยหรือพฤติกรรมของผลเฉลยของสมการเชิงพาราโบลาเนื่องจากแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นมากขึ้น ทั้งนี้เพื่อการพัฒนาทางด้านการศึกษาและการวิจัยในด้านสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นต่อไป

2. นิยาม แนวคิด และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

กำหนดให้ T เป็นจำนวนจริงและ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ เมื่อ $n \geq 1$ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $u_t - \Delta u = f(u(x, t))$ ใน $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, (2.1) กับเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = u_0(x) \geq 0$ เมื่อ $x \in \Omega$ (2.2) ในกรณีที่โดเมน Ω เป็นเซตมีขอบเขต กำหนดเงื่อนไขขอบของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) เป็นเงื่อนไขขอบดีริคเล (Dirichlet boundary condition) $u = 0$ บน $\partial\Omega \times (0, T]$ หรือเงื่อนไขขอบนอยมันน์ (Neumann boundary condition) $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ บน $\partial\Omega \times (0, T]$ เมื่อ ν คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยชี้ออก (Unit outward normal vector) จาก $\partial\Omega$

นิยาม 2.1 กำหนดให้ $\hat{x} \in \Omega$, $t_b \leq \infty$, และ $u(x, t)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) ถ้า $\lim_{(x, t) \rightarrow (\hat{x}, t_b)} u(x, t) = \infty$ (2.3) แล้วเรา

กล่าวว่า $u(x, t)$ โบลล์อัพ (Blow-up) ที่ $(x, t) = (\hat{x}, t_b)$ ทั้งนี้ ถ้า (2.3) เป็นจริงเมื่อ

$t_b < \infty$ เรากล่าวว่า $u(x, t)$ โบลัวอัพที่จุด $\hat{x} \in \Omega$ ในเวลาจำกัด (Finite time blow-up) และถ้า (2.3) เป็นจริงเมื่อ $t_b = \infty$ เรากล่าวว่า $u(x, t)$ โบลัวอัพที่ $\hat{x} \in \Omega$ ในเวลาไม่จำกัด (Infinite time blow-up)

ฟังก์ชัน f ในสมการ (2.1) เป็นฟังก์ชันบวกที่แสดงถึงแหล่งกำเนิดพลังงานไม่เชิงเส้นบนโดเมน Ω ในสถานการณ์ที่อุณหภูมิเป็นตัวเร่งปฏิกิริยาเคมีและทำให้เกิดความร้อน ถ้าการแพร่ความร้อนของวัตถุไม่ดีพออาจจะสามารถส่งผลให้วัตถุมีอุณหภูมิสูงมากขึ้นจนอาจทำให้เกิดการระเบิด การหลอมละลาย หรือการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุได้

ถ้า $f = e^u$ ปัญหา (2.1) - (2.2) สามารถใช้อธิบายกระบวนการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงแข็ง (Solid fuel ignition) ได้ (Bebernes and Eberly, 1989; Zel'dovich *et al.*, 1985) การศึกษาหลักการของกระบวนการเผาไหม้และวิธีการควบคุมการเผาไหม้มีบทบาทสำคัญต่อการอนุรักษ์พลังงานและการรักษาสีสิ่งแวดล้อม การทราบถึงสาเหตุของการสูญเสียความร้อนและแนวทางการป้องกันการสูญเสียความร้อน ทำให้สามารถปรับปรุงประสิทธิภาพในการควบคุมพลังงานความร้อนของระบบโดยรวมให้สูงขึ้น

นอกจากกรณีที่ $f = e^u$ แล้วยังมีนักวิชาการอีกหลายท่านทำการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับผลเฉลยและพฤติกรรมของผลเฉลยของปัญหา (2.1) - (2.2) ในกรณีที่ $f = u^p$, $p > 1$

ในปี ค.ศ. 1966 Fujita เป็นผู้ริเริ่มทำการศึกษาวิจัยถึงผลเฉลยและพฤติกรรมของผลเฉลยของปัญหา (2.1) - (2.2) เมื่อ $f = u^p$ จากนั้นมีนักวิชาการอีกหลายท่านที่ศึกษาต่อยอดงานวิจัยของ Fujita เช่น Kaplan (1963), Hayakawa (1973), Weissler (1984), Herrero และ Velázquez (1992) และ Falconer และ Hu (2001)

หลักการและแนวคิดในการศึกษาถึงพฤติกรรมของผลเฉลยในปัญหา (2.1) - (2.2) นั้นพัฒนามาจากแนวคิดเกี่ยวกับพฤติกรรมของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $u_t = f(u)$ (2.4) เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่สอดคล้องกับ

$$\text{เงื่อนไข } f(u) > 0 \text{ เมื่อ } u > 0 \text{ และ } \int_N \frac{1}{f(u)} du < \infty$$

(2.5) สำหรับบางจำนวนจริงบวก N หากกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (2.4) และกำหนดฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (2.4) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.5) เราจะสามารถพิสูจน์การมีผลเฉลยเพียงหนึ่งผลเฉลยเท่านั้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังกล่าว ในช่วงเวลาหนึ่ง นอกจากนี้ผลที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือจะมีจำนวนจริง t_b ที่ทำให้ฟังก์ชันผลเฉลย $u(t)$ ของสมการ (2.4) นี้เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตเมื่อ t เข้าใกล้ t_b นั่นคือ $\lim_{t \rightarrow t_b} u(t) = \infty$ (2.6)

Osgood เป็นผู้ค้นพบเงื่อนไข (2.5) เมื่อปี ค.ศ. 1898 พฤติกรรมของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (2.4) นี้เป็นตัวกำหนดลักษณะเฉพาะของผลเฉลยของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) - (2.2) มีผลการศึกษาวิจัยจากนักวิชาการหลายท่านแสดงให้เห็นว่าอัตราการโบลัวอัพของผลเฉลยของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) - (2.2) นั้นเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับอัตราการโบลัวอัพของผลเฉลยของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (2.4) เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่เหมาะสมให้กับสมการ (2.4)

เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบให้กับปัญหา (2.1) - (2.2) ปัญหาดังกล่าวอาจจะมีผลเฉลยเพียงแค่ช่วงเวลาหนึ่งและเกิดการโบลัวอัพที่เวลาจำกัดหรืออาจจะมีผลเฉลยสำหรับเวลา t ใด ๆ ที่ $t > 0$ (ไม่เกิดการโบลัวอัพที่เวลาจำกัดหรือมีผลเฉลยวงกว้าง)

ขึ้นอยู่กับการแข่งขันระหว่างพลังงานความร้อนจากแหล่งกำเนิดพลังงานบนโดเมน (ฟังก์ชัน f) กับการแพร่ (พจน์ Δu)

โดยทั่วไปแล้วการเคลื่อนที่ในของแข็งจะถูกจำกัดด้วยเงื่อนไขที่รับพลังงาน (เช่น พลังงานความร้อน) ซึ่งอาจมีผลทำให้อะตอมในวัตถุเกิดการสั่นและเคลื่อนที่หรือเกิดการจัดตำแหน่งอะตอมในวัตถุใหม่ อะตอมของวัตถุมีพลังงานในตัวเองอยู่แล้ว การได้รับพลังงานกระตุ้นจะทำให้มีระดับพลังงานเพิ่มขึ้นและหากได้รับพลังงานกระตุ้นมากพอวัตถุก็อาจเกิดการเปลี่ยนรูปไปได้

การแพร่ความร้อนของวัตถุจะมากหรือน้อยนั้น นอกจากจะขึ้นอยู่กับพลังงานความร้อนจากแหล่งกำเนิดพลังงานที่ป้อนให้กับวัตถุแล้ว ยังขึ้นอยู่กับลักษณะทางเรขาคณิตของวัตถุด้วย ถ้าโดเมนของวัตถุยิ่งเล็กการแพร่ความร้อนของวัตถุก็ยิ่งดี

หากเราพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) โดยละพจน์ที่แสดงการแพร่ (Δu) ออกไป จะเห็นได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เกิดจากการละพจน์ Δu ในสมการ (2.1) คือ $u_t = f(u)$ ดังนั้นถ้าฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไข (2.5) แล้วผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้จะเกิดขึ้นได้แค่ช่วงเวลาจำกัดช่วงเวลาหนึ่งเท่านั้นและจะเกิดการโบลั้วพตามมาในภายหลัง

หากเราพิจารณาย้อนกลับไปที่ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) การจะเกิดโบลั้วพในเวลาจำกัดของผลเฉลยของปัญหา (2.1) หรือไม่นั้นจึงขึ้นอยู่กับพจน์ Δu ว่าสามารถแพร่ความร้อนที่ถูกป้อนจากแหล่งกำเนิดพลังงานได้มากหรือน้อยเพียงใดและมีการถ่ายโอนความร้อนออกไปยังสิ่งแวดล้อมภายนอกได้ดีเพียงใด

เงื่อนไข (2.5) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary condition) และเงื่อนไขที่เพียงพอ (Sufficient condition) ต่อการเกิดการโบลั้วพของ

ผลเฉลยในเวลาจำกัด นอกจากนี้ Osgood (1898) ยังพบว่าถ้า $\int_M \frac{1}{f(u)} du = \infty$ แล้วปัญหา (2.1) -

(2.2) กับการกำหนดเงื่อนไขขอบที่เหมาะสมจะมีผลเฉลยเสมอสำหรับ t ใด ๆ ที่ $t > 0$ นั่นคือไม่เกิดการโบลั้วพในเวลาจำกัดนั่นเอง

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ Kaplan ได้พิสูจน์ไว้ในปี ค.ศ. 1963

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ Ω เป็นโดเมนที่มีขอบเขตโดยที่ $\partial\Omega \in C^1$, ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (2.5) และ $u \in C(\bar{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$ เป็นผลเฉลยของปัญหา $u_t - \Delta u = f(u(x, t))$ ใน

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T], \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ เมื่อ } x \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ บน } \partial\Omega \times (0, T] \quad (2.9)$$

ถ้า $\int_{\Omega} u_0(x) dx$ มีขนาดใหญ่มากพอแล้วผลเฉลย

$u(x, t)$ จะโบลั้วพในเวลาจำกัด

เงื่อนไขของการมีขนาดใหญ่มากพอของพจน์ $\int_{\Omega} u_0(x) dx$ ในทฤษฎีบท 2.1 นี้ไม่สามารถละ

ได้ หากปราศจากเงื่อนไขนี้ปัญหา (2.7) - (2.9) แล้วผลเฉลย $u(x, t)$ จะไม่โบลั้วพในเวลาจำกัด

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1 Kaplan ใช้ผลเฉลย $\phi(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเฉพาะ (Eigenfunction) ที่สมนัยกับค่าเฉพาะตัวแรก λ_1 (First eigenvalue) ของปัญหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue problem) (2.10) - (2.11)

$$-\Delta\phi = \lambda_1\phi \text{ ใน } \Omega \quad (2.10)$$

$$\phi = 0 \text{ บน } \partial\Omega \text{ และ } \int_{\Omega} \phi(x) dx = 1 \quad (2.11)$$

ค่าเฉพาะของปัญหาค่าเฉพาะ (2.10) - (2.11) นี้มีมากมายเป็นอนันต์ ค่าเฉพาะตัวแรกในทฤษฎีบท 2.1 นี้คือค่าเฉพาะที่เล็กที่สุดในจำนวนค่าเฉพาะทั้งหมดของปัญหา (2.10) - (2.11)

หลักการเกี่ยวกับฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะตัวแรกของปัญหาค่าเฉพาะที่ Kaplan ใช้นี้เป็นที่นิยมใช้ในการพิสูจน์การโบลล์ว็อพของผลเฉลยของปัญหาสมการเชิงพาราโบลาไม่เชิงเส้น

3. การโบลล์ว็อพของผลเฉลยที่เกิดจากแหล่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้ผู้เขียนจะมุ่งความสนใจไปที่การพัฒนาผลงานวิจัยของนักวิชาการหลายท่านที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับเงื่อนไขในการโบลล์ว็อพของผลเฉลยของปัญหาที่มีแหล่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นบนโดเมนในหนึ่งมิติ โดยปัญหาที่จะทำวิเคราะห์คือปัญหาที่อยู่ในรูป

$$x^q v_t - v_{xx} = \delta(x-a)g(v(x,t)) \text{ ใน } \Omega_T = \Omega \times (0, T] \quad (3.1)$$

โดย $q \geq 0$ เป็นจำนวนจริง, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, และ g เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่

$$g(v) > 0, g'(v) > 0, g'''(v) > 0 \quad \text{เมื่อ } v > 0 \quad (3.2)$$

ฟังก์ชัน δ คือดิสดริบิวชันดีแรคเดลต้า (Dirac delta distribution) ซึ่งเป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น (Linear functional) จากเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องไปยังเซตจำนวนจริง นิยามโดย

$$\phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

ถ้า $q = 0$ สมการ (3.1) ก็คือสมการความร้อน (Heat equation) นั่นเอง

ในปี ค.ศ. 1994 Olmstead และ Roberts เสนอผลงานวิจัยเกี่ยวกับปัญหา (3.1) เมื่อ $q = 0$ นั่นคือปัญหาในรูป

$$v_t - v_{xx} = \delta(x-a)g(v(x,t)) \text{ ใน } \Omega_T = \Omega \times (0, T] \quad (3.3)$$

โดยศึกษาปัญหา (3.3) บนโดเมน $\Omega = (0, l)$ เมื่อ l เป็นจำนวนจริงบวกและ $0 < a < l$

ในกรณีศึกษาของ Olmstead และ Roberts นี้ใช้ฟังก์ชันดีแรคเดลต้า $\delta(x-a)$ คู่กับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น $g(v(x,t))$ เพื่อแสดงถึงแหล่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นที่จุด $x = a$

งานวิจัยดังกล่าว Olmstead และ Roberts ได้ศึกษาผลเฉลยของปัญหาทั้งในกรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบดีรีเคิล

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 \text{ สำหรับทุก } t \in (0, T] \quad (3.4)$$

และเงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบนอยมันน์

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0 \text{ สำหรับทุก } t \in (0, T] \quad (3.5)$$

โดยเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาดังกล่าวถูกกำหนดเป็น

$$v(x,0) = v_0(x) \text{ สำหรับทุก } x \in [0, l] \quad (3.6)$$

ได้การศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.3) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบดีรีเคิล (3.4) [หรือเงื่อนไขขอบนอยมันน์ (3.5)] และเงื่อนไขเริ่มต้น (3.6) ของ Olmstead และ Roberts นั้นได้ทำการหาสมการอินทิกรัลที่เป็นผลเฉลยของสมการ (3.3) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบดีรีเคิล (3.4) และเงื่อนไขเริ่มต้น (3.6) และหาสมการอินทิกรัลที่เป็นผลเฉลยของสมการ (3.3) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบนอยมันน์ (3.5) และเงื่อนไขเริ่มต้น (3.6) และศึกษา

พฤติกรรมของผลเฉลย $v(a, t)$ ผู้เขียนขอสรุปผลวิจัยหลัก ๆ ที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. กรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบดีรีเคิล (3.4) สามารถป้องกันไม่ให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.3) โบลัวฟในเวลาจำกัดถ้าสมการ (3.7) เป็นจริง

$$\frac{a(l-a)}{l} < \frac{1}{g'(M+h_\infty)} = \frac{M}{g(M+h_\infty)}$$

โดยค่าคงที่ M คือผลเฉลยที่เล็กที่สุดของสมการ $M = \frac{g(M+h_\infty)}{g'(M+h_\infty)}$ และ h_∞ เป็นค่าคงที่ ซึ่งขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น

2. กรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบดีรีเคิล (3.4) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.3) จะเกิดการโบลัวฟในเวลาจำกัดเสมอถ้าสมการ (3.8) เป็นจริง

$$\frac{a(l-a)}{l} > \int_{h_0}^{\infty} \frac{1}{g(z)} dz$$

โดยที่ $\int_{h_0}^{\infty} \frac{1}{g(z)} dz < \infty$ และ h_0 เป็นค่าคงที่ ซึ่งขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น

3. กรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบมีนน์ (3.5) Olmstead และ Roberts พิสูจน์ให้เห็นว่าผลเฉลยของปัญหา (3.3) จะโบลัวฟในเวลาจำกัดเสมอ

หากเราพิจารณาเงื่อนไขในสมการ (3.7) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอในการป้องกันไม่ให้เกิดการเกิดโบลัวฟในเวลาจำกัด จะเห็นได้ว่าเราสามารถทำให้เงื่อนไขนี้เป็นจริงได้ด้วยการกำหนดตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นให้เหมาะสม (ตำแหน่ง a) และสรุปได้ว่า ถ้าเลือกตำแหน่ง a ให้เข้าใกล้ 0 หรือเลือกตำแหน่ง a ให้เข้าใกล้ l จะทำให้ $\frac{a(l-a)}{l}$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์จึง

สามารถทำให้อสมการ (3.7) เป็นจริงได้ และทำให้ปัญหา (3.3) กับเงื่อนไขขอบดีรีเคิล (3.4) และเงื่อนไขเริ่มต้น (3.6) มีผลเฉลย $v(x, t)$ สำหรับทุก t ที่ $t \geq 0$

ทำนองเดียวกันกับเงื่อนไข (3.8) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการเกิดโบลัวฟในเวลาจำกัดซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สามารถเกิดได้จริง เช่นสามารถกำหนดตำแหน่งของแหล่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นไว้ ณ จุดกึ่งกลางของช่วง $(0, l)$ ทั้งนี้ l ต้องมีขนาดใหญ่มากพอเพราะถ้าโดเมนของวัตถุมีขนาดเล็กอาจจะไม่สามารถเกิดโบลัวฟในเวลาจำกัดได้ (การสะสมความร้อนที่เกิดจากแหล่งกำเนิดพลังงานทำได้ไม่มากพอเนื่องจากโดเมนแคบ และมีการถ่ายโอนความร้อนออกไปได้เร็วขึ้น)

จากผลการศึกษาที่ Olmstead และ Roberts ได้มานั้นสรุปได้ว่าเงื่อนไขขอบมีผลต่อการหาเงื่อนไขที่พอเพียงในการทำให้ผลเฉลยโบลัวฟในเวลาจำกัด กรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นขอบมีนน์ ผลเฉลยจะโบลัวฟในเวลาจำกัดเสมอ

ถึงแม้ว่างานวิจัยดังกล่าวจะสรุปว่าสามารถป้องกันไม่ให้เกิดผลเฉลยโบลัวฟในเวลาจำกัดได้ในกรณีที่เงื่อนไขขอบของปัญหาเป็นเงื่อนไขขอบดีรีเคิล โดยการกำหนดตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นให้ใกล้ขอบของโดเมน แต่ผลงานวิจัยชิ้นนี้ไม่ได้สรุปว่าแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นควรอยู่ใกล้ขอบของ Ω มากน้อยเพียงใด

ในปี ค.ศ. 2003 Chan และ Tian ศึกษาวิจัยปัญหาโบลัวฟที่เกิดจากแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นบนโดเมนที่มีขอบเขต โดยปัญหาที่ทั้งสองท่านศึกษาอยู่ในรูป

$$x^q v_t - v_{xx} = l \delta(x-a) g(v(x, t))$$

ใน $\Omega_T = \Omega_1 \times (0, T]$ (3.9)

โดย q และ l เป็นจำนวนจริงบวก, $\Omega_1 = (0, 1)$ และ a เป็นจำนวนจริงบวกที่ $0 < a < 1$ และฟังก์ชัน g มีคุณสมบัติ (3.2) กำหนดเงื่อนไขขอบตึรีเคลเป็น $v(0, t) = v(1, t) = 0$ สำหรับทุก $t \in (0, T]$

$$(3.10)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$v(x, 0) = v_0(x) \text{ สำหรับทุก } x \in [0, 1] \quad (3.11)$$

หมายเหตุ: กำหนดให้

$$x = \frac{\zeta}{l}, t = \frac{\gamma}{l^{q+2}}, a = \frac{b}{l}, g(v(x, t)) = \hat{g}(w(\zeta, \gamma)), \hat{\Omega} = (0, 1)$$

ปัญหา (3.9) - (3.11) สมมูลกับปัญหาต่อไปนี้

$$\zeta^q w_\gamma - w_{\zeta\zeta} = \delta(\zeta - b) \hat{g}(w(\zeta, \gamma))$$

ใน $\hat{\Omega}_T = \hat{\Omega} \times (0, \sigma]$

$$w(0, \gamma) = w(l, \gamma) = 0 \text{ สำหรับทุก } \gamma \in (0, \sigma]$$

$$w(\zeta, 0) = w_0(\zeta) \text{ สำหรับทุก } \zeta \in [0, l]$$

โดยที่ $0 < b < l$

วิธีการวิจัย การพิสูจน์การมีผลเฉลย และการมีผลเฉลยเพียงหนึ่งผลเฉลยในช่วงเวลาหนึ่งของ Chan และ Tian (2003) ต่างไปจากวิธีการของ Olmstead และ Roberts (1994) โดยที่ Chan และ Tian ศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลย $v(x, t)$ ที่ทุก $x \in \Omega_1$ แต่ Olmstead และ Roberts นั้นศึกษาเฉพาะผลเฉลย $v(x, t)$ ที่จุด $x = a$ เท่านั้น ซึ่งอาจจะส่งผลให้ได้ข้อมูลของผลเฉลยไม่ครบถ้วนบนทุก ๆ จุดของโดเมนที่ศึกษา

Chan และ Tian พบเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะป้องกันไม่ให้เกิดการโบลัวัพของผลเฉลยในเวลาจำกัดซึ่งสอดคล้องกับผลที่ Olmstead และ Roberts ได้มา นั่นคือสามารถป้องกันไม่ให้เกิดการโบลัวัพในเวลาจำกัดได้โดยกำหนดตำแหน่งของแหล่งพลังงานไม่เชิงเส้นให้ใกล้ขอบของโดเมน (ขอบด้านซ้ายหรือขอบด้านขวา) เพื่อทำให้วัตถุไม่สามารถสะสมพลังงานได้มากพอจนเกิดการโบลัวัพ

อัปในเวลาจำกัด ผู้เขียนขอยกทฤษฎีบทที่สำคัญใน Chan และ Tian (2003) มากล่าวในทฤษฎีบท 3.1

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $v_0(x)$ มีค่าสูงสุดที่จุด $x = a$ และ

$$\mu(0) > \left(\frac{\lambda}{l^2} \right)^{1/(p-1)}, \quad (3.12)$$

$$\varphi(a) g(v(a, t)) \geq \left(\frac{1}{q+1} \right)^{p/2} v^p(a, t) \quad (3.13)$$

เมื่อ p คือจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหนึ่ง แล้วผลเฉลย $v(x, t)$ ของปัญหา (3.9)-(3.11) จะโบลัวัพในเวลาจำกัด

ฟังก์ชัน φ ในทฤษฎีบท 3.1 คือฟังก์ชันค่าเฉพาะนอร์มัลไลซ์ (Normalized eigenfunction) ซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะตัวแรก λ ของปัญหาค่าเฉพาะ

$$\varphi'' + \lambda x^q \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0 = \varphi(1)$$

และ $\mu(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$\mu(t) = \int_0^1 x^q \varphi(x) v(x, t) dx$$

วิธีพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.1 นี้ Chan และ Tian ปรับปรุงจากวิธีการของ Kaplan (ทฤษฎีบท 2.1)

จากทฤษฎีบท 3.1 ทำให้สามารถสรุปได้ว่า หากต้องการให้เกิดการโบลัวัพที่เวลาจำกัด อุณหภูมิเริ่มต้น $v_0(x)$ ต้องสูงมากพอ [จากอสมการ (3.12)] และอุณหภูมิเริ่มต้นต้องมีค่าสูงสุด ณ ตำแหน่งแหล่งกำเนิดพลังงานไม่เชิงเส้น และแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขในอสมการ (3.13) จะเห็นว่าเงื่อนไขในอสมการ (3.13) นี้มีค่าตำแหน่ง a ของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ดังนั้นตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นย่อมมีผลต่อการเกิดโบลัวัพในเวลาจำกัด

โดยที่หากกำหนดตำแหน่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นไว้ชัดเจนด้านใดด้านหนึ่งของ Ω_1 จะสามารถป้องกันไม่ให้เกิดการโบลัวัพในเวลาจำกัดได้

ถึงแม้วิธีการในการวิจัยของ Olmstead และ Roberts (1994) กับ Chan และ Tian (2003) จะต่างกัน แต่ทั้งสองบทความวิจัยก็ให้ผลเกี่ยวกับเงื่อนไขในการเกิดโบลัวัพในเวลาจำกัดที่สอดคล้องกัน คือ สามารถป้องกันไม่ให้เกิดผลเฉลยเกิดโบลัวัพในเวลาจำกัดในกรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบดีรีเคลได้ โดยการเลือกวางตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นให้เหมาะสม ทั้งนี้ทั้งสองผลงานวิจัยไม่ได้หาค่าวิกฤติของตำแหน่งการวางแหล่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นนี้

ในปี ค.ศ. 2007 Chan และ Boonklurb ทำวิจัยต่อยอดผลการศึกษาของปัญหา (3.9) - (3.11) และสามารถหาสูตรในการคำนวณหาค่าวิกฤติ a^* ของการกำหนดตำแหน่งแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นได้สำเร็จ โดยสูตรในการหาค่าวิกฤติของตำแหน่งแหล่งพลังงานเข้มข้นเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า

$$l > 4 \max \left\{ \sup_{V(a) \in (0, \infty)} \left(\frac{1}{g'(V(a))} \right), \sup_{V(a) \in (0, \infty)} \left(\frac{V(a)}{g(V(a))} \right) \right\} \quad (3.14)$$

แล้วจะมีค่าวิกฤติ a^* ของตำแหน่งแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นกำหนดโดย

$$a^* = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{l} \sup_{V(a) \in (0, \infty)} \frac{V(a)}{g(V(a))}} \right) \quad (3.15)$$

ถ้า ตำแหน่ง ของ แหล่งกำเนิดพลังงาน $a \in (0, a^*) \cup (1 - a^*, 1)$ แล้วผลเฉลย $v(x, t)$ จะไม่โบลัวัพในเวลาจำกัด แต่ถ้าตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงาน $a \in (a^*, 1 - a^*)$ แล้ว $v(x, t)$ จะโบลัวัพในเวลาจำกัดเสมอ

จากทฤษฎีบท 3.2 จะเห็นว่าการจะหาค่าวิกฤติของตำแหน่งแหล่งพลังงานไม่เชิงเส้นได้นั้นต้องมีเงื่อนไขของโดเมนที่ศึกษาว่ามีขนาดใหญ่มากพอเสียก่อน [อสมการ (3.14)] ทฤษฎีบท 3.2 ให้ผลที่ตามมาดังนี้

บทแทรก 3.3 ถ้า $g(0) > 0$ แล้ว $\sup_{V(a) \in (0, \infty)} \left(\frac{V(a)}{g(V(a))} \right)$ เกิดเมื่อ $g(V(a)) = V(a)g'(V(a))$ สำหรับ $V(a) \in (0, \infty)$ และ $v(x, t)$ ไม่โบลัวัพในเวลาไม่จำกัด

ฟังก์ชัน $V(a)$ ที่ปรากฏในทฤษฎีบท 3.2 และบทแทรก 3.3 คือผลเฉลยที่จุด $x = a$ ของสมการสภาวะคงที่ (Steady state solution) ที่สมนัยกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.9) กับเงื่อนไขขอบ (3.10) จากบทแทรก 3.3 นี้สรุปได้ว่าหากผลเฉลยโบลัวัพแล้วการโบลัวัพจะไม่เกิดที่เวลานอนันต์ $t = \infty$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2012 Chan และ Treeyaprasert เสนอผลงานวิจัยเกี่ยวกับปัญหาปฏิกิริยาการแพร่ที่มีแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นบนช่วงกึ่งอนันต์ (3.16) กับเงื่อนไขขอบดีรีเคล (3.17) และเงื่อนไขเริ่มต้น (3.18)

$$v_t - v_{xx} = \alpha \delta(x - a) g(v(x, t)) \text{ ใน } [0, \infty) \times (0, T], \quad (3.16)$$

$$v(0, t) = 0 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0 \text{ สำหรับ } 0 < t \leq T, \quad (3.17)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \text{ สำหรับ } 0 \leq x < \infty \quad (3.18)$$

เมื่อ $\alpha, a \in (0, \infty)$ และ g สอดคล้องกับ (3.2)

ผู้เขียนขอสรุปผลวิจัยหลัก ๆ จาก Chan และ Treeyaprasert (2012) ดังนี้

1. ใช้หลักการมากที่สุด (maximum principle) บทตั้งของ Hopf และหลักของ Phragmén-Lindelöf Principle ในการพิสูจน์ว่าถ้าผลเฉลยโบลัวัพแล้วการโบลัวัพจะเกิดที่จุด

$x = a$ เพียงจุดเดียวเท่านั้น (Single point blow-up)

2. เงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้ผลเฉลยของปัญหา (3.16) - (3.18) โบลว์อัพในเวลาจำกัด ทั้งนี้วิธีการที่ใช้ในพิสูจน์หาเงื่อนไขต่างไปจากวิธีการ Chan และ Boonklurb (2007) กับ Chan และ Tian (2003) เนื่องจากกรณีของ Chan และ Treeyaprasert (2012) โดเมนที่ศึกษาเป็นช่วงกึ่งอนันต์ซึ่งไม่มีขอบเขต กรณีโดเมนชนิดไม่มีขอบเขตค่าเฉพาะจะเป็นสเปกตรัมต่อเนื่อง (Continuous spectrum) ซึ่งต่างจากกรณีโดเมนมีขอบเขต

3. เงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้ผลเฉลยของปัญหา (3.16) - (3.18) มีอยู่จริงสำหรับทุก $t \geq 0$

4. สูตรในการคำนวณหาตำแหน่งวิกฤติของแหล่งพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นบนช่วงกึ่งอนันต์ที่จะป้องกันไม่ให้เกิดการโบลว์อัพของผลเฉลยในเวลาจำกัด ซึ่งวิธีการในการหาตำแหน่งวิกฤติในกรณีโดเมนไม่มีขอบเขตนี้ต่างจากวิธีการ Chan และ Boonklurb (2007)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทจาก Chan และ Treeyaprasert (2012) ซึ่งให้เงื่อนไขที่เพียงพอในการเกิดโบลว์อัพในเวลาจำกัด

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้น $v_0(x)$ มีค่าสูงสุดที่ $x = a$ และ

$$\gamma(0) > \left(\frac{6k}{\alpha} \right)^{1/(p-1)}, \quad (3.19)$$

$$h(a)g(s) \geq s^p, \quad (3.20)$$

โดยที่ p เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 และ $s \in [0, \infty)$ แล้วผลเฉลย $v(x, t)$ ของปัญหา (3.16)-(3.18) โบลว์อัพในเวลาจำกัด ฟังก์ชัน h ที่ปรากฏในทฤษฎีบท 3.4 นิยามโดย

$$h(x) = 2kxe^{-kx^2}, \quad x \geq 0,$$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวก และนิยามฟังก์ชัน $\gamma(t)$ ในทฤษฎีบท 3.4 โดย

$$\gamma(t) = \int_0^\infty h(x)v(x, t)dx.$$

จากทฤษฎีบท 3.4 จะเห็นว่าเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการเกิดโบลว์อัพในเวลาจำกัดของผลเฉลยในปัญหา (3.16) - (3.18) คืออุณหภูมิเริ่มต้นต้องมีค่าสูงระดับหนึ่ง [อสมการ (3.19)] พลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น g สอดคล้องกับอสมการ (3.20) ซึ่งมีตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น a ปรากฏอยู่ในอสมการ (3.20) ด้วย ดังนั้นตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นย่อมส่งผลต่อการเกิดโบลว์อัพในเวลาจำกัดของผลเฉลย ทฤษฎีบท 3.5 เป็นอีกหนึ่งทฤษฎีบทที่สำคัญ (Chan and Treeyaprasert, 2012) ซึ่งให้สูตรในการคำนวณตำแหน่งวิกฤติ a^* ของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น g

ทฤษฎีบท 3.5 ตำแหน่งวิกฤติ a^* ในการวางแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นของปัญหา (3.16) - (3.18) มีอยู่จริงและสามารถป้องกันไม่ให้เกิดโบลว์อัพในเวลาจำกัดได้หากวางตำแหน่งของพลังงานเข้มข้น ณ จุด a ใด ๆ ที่ $a \leq a^*$ แต่ถ้าวางตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้น ณ จุด a ที่ $a > a^*$ แล้วจะเกิดโบลว์อัพในเวลาจำกัดเสมอ

- ถ้า $v_0(a) \leq \hat{s}$ เมื่อ $\hat{s}$ คือค่าวิกฤติของฟังก์ชัน $s / g(s)$, $s \in (0, \infty)$ จะสามารถคำนวณตำแหน่งวิกฤติของพลังงานเข้มข้นได้จากสูตร

$$a^* = \frac{\hat{s}}{\lambda g(\hat{s})} \quad (3.21)$$

- ถ้า $v_0(a) > \hat{s}$ เมื่อ $\hat{s}$ คือค่าวิกฤติของฟังก์ชัน $s / g(s)$, $s \in (0, \infty)$ จะสามารถคำนวณ

ตำแหน่งวิกฤติของพลังงานเข้มข้นได้จากสูตร

$$a^* = \frac{v_0(a)}{g(v_0(a))} \quad (3.22)$$

นอกจากนี้ Chan และ Treeyaprasert ยังพบว่าหากผลเฉลยของปัญหา (3.16) - (3.18) โบลัวอัฟ แล้วการโบลัวอัฟจะไม่เกิดที่เวลาอนันต์

ผลงานวิจัยทั้งหลายที่ได้กล่าวถึงข้างต้นเป็นงานวิจัยที่ศึกษาในกรณีที่ตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นนั้นคงที่ (Stationary concentrated source) ในปี ค.ศ. 2002 Kirk และ Olmstead ได้เสนอผลงานวิจัยของปัญหา

$$v_t - v_{xx} = \delta(x - x_0)g(v(x_0, t)) \text{ ใน } (-\infty, \infty) \times (0, T] \quad (3.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, t) = 0 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0 \text{ เมื่อ } 0 < t \leq T \quad (3.24)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 \text{ บน } (-\infty, \infty) \quad (3.25)$$

โดยฟังก์ชัน g สอดคล้องกับสมการ (3.2) และ

$$x_0 = x_0(t), \quad x_0(0) = 0 \text{ และ } x_0'(t) = c_0(t) \quad (3.26)$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.23) แหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นคือ $\delta(x - x_0(t))g(v(x_0(t), t))$ จากคุณสมบัติของฟังก์ชันดีแรคเดลตาและนิยามของฟังก์ชัน x_0 ที่กำหนดโดย (3.26) จะเห็นว่าตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา t ดังนั้นพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น g ในกรณีนี้จึงเป็นพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $c_0(t)$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

Kirk และ Olmstead พบว่าสามารถป้องกันไม่ให้ผลเฉลยของปัญหา (3.23) - (3.25) โบลัวอัฟในเวลาจำกัดได้ด้วยการให้แหล่งพลังงานเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่สูงมากพอ มีการพิสูจน์ให้เห็นว่าถ้าแหล่งพลังงานเข้มข้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำมากจะทำให้มีการสะสมพลังงานความร้อนที่สูง และ

อาจจะทำให้ผลเฉลยโบลัวอัฟในเวลาจำกัด ผู้เขียนขอนำทฤษฎีบทที่พิสูจน์จาก Kirk และ Olmstead (2002) เกี่ยวกับเงื่อนไขเพียงพอในการทำให้ผลเฉลยของปัญหา (3.23) - (3.25) มีอยู่จริงสำหรับ $t \geq 0$ และเงื่อนไขที่เพียงพอในการทำให้ผลเฉลยโบลัวอัฟในเวลาจำกัด มากล่าวในทฤษฎีบท 3.6 และ 3.7 ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนดให้ $x_0(t)$ หาคู่พหุนิธได้เมื่อ $0 \leq t < \infty$ และค่าคงที่ c^* สอดคล้องกับ

$$|x_0'(t)| = |c_0(t)| \geq c^* \text{ สำหรับ } 0 \leq t < \infty$$

ถ้า c^* มีค่าสูงมากพอแล้วปัญหา (3.23) - (3.25) จะมีผลเฉลยทุกเวลา t ที่ $t \geq 0$ และจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$c^* > \frac{1}{\Lambda} \text{ โดยที่ } \Lambda = \max_{0 \leq M < \infty} \left[\frac{M}{g(M + \bar{h})} \right] \text{ เมื่อ}$$

M และ $\bar{h}$ เป็นจำนวนจริง ($\bar{h}$ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น $v_0(x)$)

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดให้ $x_0(t)$ หาคู่พหุนิธได้เมื่อ $0 \leq t < \infty$ และค่าคงที่ c^{**} สอดคล้องกับ

$$|x_0'(t)| = |c_0(t)| \leq c^{**} \text{ สำหรับ } 0 \leq t < \infty$$

ถ้า c^{**} มีค่าต่ำมากพอแล้วจะมี $t^{**} < \infty$ ที่ทำให้ปัญหา (3.23) - (3.25) ไม่มีผลเฉลยเมื่อ $t \geq t^{**}$ และจะ

$$\text{เกิดขึ้นเมื่อ } c^{**} < \frac{1}{\kappa} \text{ โดยที่ } \kappa = \int_{\bar{h}}^{\infty} \frac{1}{g(z)} dz \text{ เมื่อ}$$

$\bar{h}$ เป็นจำนวนจริงที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น $v_0(x)$

ทฤษฎีบท 3.6 แสดงให้เห็นว่าถ้าแหล่งพลังงานเข้มข้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่มากกว่าหรือเท่ากับค่า c^* แล้วปัญหา (3.23) - (3.25) จะมีผลเฉลยทุกเวลา t ที่ $t \geq 0$ (นั่นคือไม่เกิดโบลัวอัฟในเวลาจำกัด) ส่วนทฤษฎีบท 3.7 กล่าวว่าถ้าแหล่งพลังงานเข้มข้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่น้อย

กว่าหรือเท่ากับค่า c^{**} แล้วผลเฉลยของปัญหา (3.23) - (3.25) จะโบลัวฟในเวลากำกัฏ ทั้งนี้ ทฤษฎีบททั้งสองไม่สามารถให้คำตอบได้ว่าในกรณี ที่ความเร็วของการเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิด พลังงานเข้มข้นมากกว่า c^{**} แต่น้อยกว่า c^* จะ ให้ผลเป็นเช่นไร

ดังนั้นทฤษฎีบททั้งสองให้เพียงค่าขอบเขต บนและขอบเขตล่างของค่าความเร็ววิกฤติของการ เคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้น

นอกจากผลงานวิจัยดังกล่าวแล้ว Kirk และ Olmstead ยังมีผลงานวิจัยอื่นที่ศึกษาเกี่ยวกับ เงื่อนไขของการโบลัวฟในเวลากำกัฏเมื่อ แหล่งกำเนิดพลังงานมีการเคลื่อนที่ เช่น ในผลงาน Kirk และ Olmstead (2000) ซึ่งปัญหาที่ศึกษาคลาย กับปัญหา (3.23)-(3.25) แต่มีแหล่งกำเนิดพลังงาน เข้มข้นไม่เชิงเส้นสองแหล่งที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว คงที่เท่ากัน ในงานวิจัยดังกล่าวทั้งสองท่านได้ พิสูจน์ให้เห็นว่าความเร็วของการเคลื่อนที่ของ พลังงานเข้มข้นไม่เชิงเส้นมีผลต่อการโบลัวฟ ของผลเฉลยในเวลากำกัฏ

ทำนองเดียวกับผลงานวิจัยของ Olmstead (1997) มีการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่า ความเร็ววิกฤติในการเคลื่อนที่ของพลังงานเข้มข้น ไม่เชิงเส้นเพื่อการป้องกันไม่ให้เกิดโบลัวฟในเวลากำกัฏ

4. สรุป

ผู้เขียนได้เรียบเรียงและวิเคราะห์ผลงาน วิจัยของนักวิชาการที่ศึกษาเกี่ยวกับเงื่อนไขที่ เพียงพอต่อการโบลัวฟของผลเฉลยในเวลากำกัฏ และเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการมีผลเฉลยสำหรับเวลา t ใด ๆ ที่ $t \geq 0$ ของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เชิงพาราโบลามีแหล่งกำเนิดพลังงานเข้มข้นไม่ เชิงเส้น จากการศึกษาพบว่าในกรณีที่โดเมนของ

ปัญหามีขอบเขตจำกัดและเงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไข ขอบดีรีเคลนั้น จะสามารถป้องกันการโบลัวฟใน เวลากำกัฏได้โดยการกำหนดตำแหน่งของแหล่ง กำเนิดพลังงานเข้มข้นให้ใกล้กับขอบของโดเมน จากสมบัติของการไหลของความร้อนซึ่งจะไหลจาก บริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำ จึงได้ว่าเงื่อนไขขอบดีรีเคลจะส่งผลให้มีการระบาย ความร้อนทำให้ความร้อนสะสมบนโดเมนไม่มาก พอที่จะเกิดการโบลัวฟในเวลากำกัฏ แต่สำหรับ กรณีที่เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขขอบนอยมันน์ความ ร้อนจะไม่สามารถไหลผ่านขอบของโดเมนได้ใน ขณะเดียวกันแหล่งกำเนิดพลังงานยังคงป้อนให้ พลังงานแก่โดเมนจึงส่งผลให้มีการสะสมความร้อน มากขึ้นและผลเฉลยจะโบลัวฟในเวลากำกัฏเสมอ

เนื่องจากตำแหน่งแหล่งกำเนิดพลังงานของ ปัญหาสมการเชิงพาราโบลามีเงื่อนไขขอบดีรีเคล มีผลต่อการเกิดโบลัวฟของผลเฉลยในเวลากำกัฏ จึงสามารถหาตำแหน่งวิกฤติของแหล่งกำเนิด พลังงานไม่เชิงเส้นเพื่อป้องกันผลเฉลยไม่ให้โบลัว ฟในเวลากำกัฏได้

ส่วนกรณีปัญหามบนโดเมนช่วงอนันต์ที่ แหล่งกำเนิดพลังงานเคลื่อนที่ หากความเร็วของ การเคลื่อนที่ของแหล่งกำเนิดพลังงานสูงไม่มากพอ ก็เกิดโบลัวฟในเวลากำกัฏทั้งนี้จากผลงานวิจัยที่ ได้ศึกษามาทั้งหมด ยังไม่มีผู้ใดสามารถหาค่า ความเร็ววิกฤติในการป้องกันไม่ให้ผลเฉลยโบลัวฟ ในเวลากำกัฏได้มีเพียงหาขอบเขตบนและขอบเขต ล่างของค่าความเร็ววิกฤติในการป้องกันการโบลัว ฟเท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงเกิดแรงจูงใจแก่ผู้เขียนที่จะ ทำการศึกษาหาค่าความเร็ววิกฤติที่จะสามารถ ป้องกันการโบลัวฟของผลเฉลยในเวลากำกัฏ

ค่าวิกฤติของความเร็วในการเคลื่อนที่ของ แหล่งกำเนิดพลังงานนี้มีประโยชน์อย่างกว้างขวาง ในทางประยุกต์ ตัวอย่างเช่นสามารถนำไปประยุกต์

กับกระบวนการตัดวัตถุในระดับไมครอนด้วยเลเซอร์ หรือศึกษาหาปัจจัยที่เหมาะสมต่อการเชื่อมเหล็กหรือโลหะ เป็นต้น

5. เอกสารอ้างอิง

- Bebernes, J. and Eberly, D., 1989, *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Springer, New York.
- Brezis, H., Cazenave, T., Martel, Y. and Ramiandrisoa, A., 1996, Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, *Adv. Differ. Equat.* 1: 73-90.
- Chadam, J.M., Peire, A. and Yin, H.M., 1992, The blowup property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions, *J. Math. Anal. App.* 169: 313-328.
- Chan, C.Y. and Boonklurb, R., 2007, A blow-up criterion for a degenerate parabolic problem due to a concentrated nonlinear source, *Quart. Appl. Math.* 65: 781-787.
- Chan, C.Y. and Tian, H.Y., 2003, Single-point blow-up for a degenerate parabolic problem due to a concentrated nonlinear source, *Quart. Appl. Math.* 61: 363-385.
- Chan, C.Y. and Treeyaprasert, T., 2012, Blow-up criteria for a parabolic problem due to a concentrated nonlinear source on a semi-infinite interval, *Quart. Appl. Math.* 70: 159-169.
- Chipot, M. and Weissler, F.B., 1989, Some blow up results for a nonlinear parabolic problem with a gradient term, *SIAM J. Math. Anal.* 20: 886-907.
- Falconer, K.J. and Hu, J., 2001, Nonlinear diffusion equations on unbounded fractal domains, *J. Math. Anal. Appl.* 256: 606-624.
- Friedman, A. and McLeod, B., 1985, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, *Indiana Univ. Math. J.* 34: 425-447.
- Fujita, H., 1966, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\sigma}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I* 13: 109-124.
- Fujita, H., 1970, On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations, *Proc. Symp. Pure Math. XVIII, Nonlinear Functional Analysis*, Amer. Math. Soc, 28: 105-113.
- Galaktionov, V.A. and Levine, H.A., 1996, On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition on the boundary, *Israel J. Math.*, 94: 125-146.
- Hayakawa, K., 1973, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, *Proc. Japan Acad.* 49: 503-505.
- Herrero, M.A. and Velázquez, J.J.L., 1992, Blow-up profiles in one-dimensional semilinear parabolic problems, *Comm. PDEs.* 17: 205-219.
- Kaplan, S., 1963, On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 16: 305-330.
- Kirk, C.M. and Olmstead, W.E., 2000, The

- influence of two moving heat sources on blow-up in a reactive-diffusive medium, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 51: 1-16.
- Kirk, C.M. and Olmstead, W.E., 2002, Blow-up in a reactive-diffusive medium with a moving heat source, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 53: 147-159.
- Kobayashi, K., Sirao, T. and Tanaka, H., 1977, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J. Math. Soc. Japan*, 29: 407-424.
- Lacey, A.A., 1983, Mathematical analysis of thermal runaway for spatially inhomogeneous reactions, *SIAM J. Appl. Math.*, 43: 1350-1366.
- Olmstead, W.E. and Roberts, C.A., 1994, Explosion in a diffusive strip due to a concentrated nonlinear source, *Meth. Appl. Anal.* 1: 434-445.
- Olmstead, W.E., 1997, Critical speed for the avoidance of blow-up in a reactive-diffusive medium, *Z. Angew. Math. Phys.* 48: 1-10.
- Osgood, W.F., 1898, Beweis der existenz einer Lösung der differential gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzchen Bedingung, *Monatsheft Mathematik* 9: 331-345.
- Souplet, P. and Weissler, F.B., 1997, Self-similar subsolutions and blow-up for nonlinear parabolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* 212: 60-74.
- Weissler, F.B., 1984, Single point blow up of semilinear initial boundary value problems, *J. Differ. Equat.* 55: 204-224.
- Zel'dovich, Y.B., Barenblatt, G.I., Librovich, V. B. and Makhviladze, G.M., 1985, *The Mathematical Theory of Combustion and Explosions*, Consultants Bureau, New York.