

ความสวยงามวางนัยทั่วไป : รูปสามเหลี่ยมปาสกัลกับผลการยกกำลังของเลข 11

Generalized Beauty:

The Pascal's Triangle and the Power of 11

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

Aiyared lampan*

Division of Mathematics, Faculty of Science, Phayao University, Mueang, Phayao 56000

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของเลขเรียงกันของรูปสามเหลี่ยมปาสกัล โดยทฤษฎีบทที่ใช้เป็นหลักในการพิสูจน์ คือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และใช้จำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการสร้างเลขโดด ผลจากการศึกษาพบว่าเลขเรียงกันในแถวที่ $n+1$ ของรูปสามเหลี่ยมปาสกัลเท่ากับ 11^n สำหรับทุกจำนวนนับ n พร้อมทั้งเสนอแนวทางการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจโดยอาศัยจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์

คำสำคัญ : สามเหลี่ยมปาสกัล, หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์, จำนวนเศษเหลือ

Abstract

This article presents the study and finding a general form of the arranged numbers of the Pascal's triangle. The main theorem for proof is the Principle of Mathematical Induction and the remainder numbers is an important tool for creating a digit. The results of the study obtain that the arranged numbers in line $n+1^{th}$ of the Pascal's triangle is 11^n for all natural number n . The extension of this study of an interesting characterization in algebra by the remainder numbers for the proof.

Keywords: Pascal's triangle, principle of mathematical induction, remainder number

1. บทนำและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

รูปสามเหลี่ยมปาสกัล (Pascal's triangle) คือแถวลำดับรูปสามเหลี่ยม (triangular array) ของสัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient) ซึ่งจะ

กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 2 โดยได้ตั้งชื่อเพื่อเป็นเกียรติให้กับปาสกัล (Blaise Pascal, ค.ศ. 1623-1662) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส รูปสามเหลี่ยมปาสกัลนับว่าเป็นเครื่องมือที่สำคัญและมีประโยชน์อย่าง

มากสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึง
 ระดับสูง และยังพบอีกว่ารูปสามเหลี่ยมปาสกาลมี
 ความสัมพันธ์กับเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์อีก
 หลายเรื่อง อาทิ จำนวนฟีโบนัชชี (fibonacci num-
 ber) จำนวนรูปสามเหลี่ยม (triangular number)
 จำนวนทรงสี่หน้า (tetrahedral number) และ
 จำนวนทรงห้าหน้า (pentatope number) อัยเรต
 (2554) และณัฐวุฒิและอัยเรต (2555) ได้นิยาม
 จำนวนเศษเหลือ (remainder number) และศึกษา

สมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเต็มโดยใช้จำนวน
เศษเหลือเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ จึงทำให้เรา
สนใจที่จะศึกษาหาความสัมพันธ์ทางพีชคณิต
บางอย่างของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลโดยอาศัย
จำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์เช่นกัน

จากรูปสามเหลี่ยมปาสกาลเราสังเกตเห็นความสัมพันธ์ระหว่างเลขเรียงกันในแถวที่ 1 ถึง 5 ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลกับผลการยกกำลัง 0 ถึง 4 ของเลข 11 ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} R_1 : & & & & 1 & & = 11^0 \\ R_2 : & & & 1 & & 1 & = 11^1 \\ R_3 : & & & 1 & & 2 & \quad 1 & = 11^2 \\ R_4 : & & & 1 & & 3 & \quad 3 & \quad 1 & = 11^3 \\ R_5 : & & & 1 & & 4 & & 6 & \quad 4 & & 1 & = 11^4 \text{ (I)} \\ R_6 : & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & = \dots \\ R_7 : & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & = \dots \\ R_8 : & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & = \dots \\ R_n : & n^{-1}C_0 & n^{-1}C_1 & n^{-1}C_2 & \cdots & \cdots & \cdots & n^{-1}C_{n-3} & n^{-1}C_{n-2} & n^{-1}C_{n-1} & = \dots \end{array}$$

จาก (I) เราสรุปเป็นข้อสังเกตได้ดังนี้

R_1 : เลขเรียงกันในแถวที่ 1 ของรูป
สามเหลี่ยมปาสคาล เท่ากับ 11^0

R_2 : เลขเรียงกันในแถวที่ 2 ของรูป
สามเหลี่ยมปาสกาล เท่ากับ 11^1

R_3 : เลขเรียงกันในแถวที่ 3 ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล เท่ากับ 11^2

R_4 : เลขเรียงกันในแถวที่ 4 ของรูป
สามเหลี่ยมปาสกาล เท่ากับ 11^3

R_5 : เลขเรียงกันในแถวที่ 5 ของรูป
สามเหลี่ยมปาสกาล เท่ากับ 11^4

R_6 : เลขเรียงกันในแถวที่ 6 ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล เรายังไม่สามารถอธิบายได้ว่ามีค่าเท่าไร เนื่องจากพจน์ที่สามและสี่ของแถวที่ 6 นี้เป็นเลข 10 ซึ่งไม่ใช่เลขโดด ดังนั้นผู้เขียนจึงเกิดข้อ

สงสัยดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถอธิบายลักษณะของเลขเรียงกันในแถวที่ n ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล โดยที่ $n > 6$ ได้หรือไม่

(2) เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของเลขเรียงกันในแถวที่ n ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล โดยที่ $n \geq 6$ ในรูปของผลการยกกำลังของเลข 11 ได้หรือไม่

ถ้าเราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอน
ของเลขเรียงกันในแถวที่ n ของรูปสามเหลี่ยมปาส
กาล โดยที่ $n \geq 6$ ในรูปของผลการยกกำลังของเลข
11 ได้ แล้วเลขเรียงกันนั้นจะเท่ากับผลการยกกำลัง
 $n-1$ ของเลข 11 หรือไม่

เพื่อความสะดวกในการศึกษา เราจะเขียน
แทนเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ n ของรูป

สามเหลี่ยมปาสกาลด้วยสัญลักษณ์ $\bar{\Delta}_n$ และจะเขียนแทนเลขเรียงกันจากขวาไปซ้ายในแถวที่ n ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลด้วยสัญลักษณ์ $\bar{\Delta}_n$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_1 &= 11^0 \\ \bar{\Delta}_2 &= 11^1 \\ \bar{\Delta}_3 &= 11^2 \\ \bar{\Delta}_4 &= 11^3 \\ \bar{\Delta}_5 &= 11^4 \\ \bar{\Delta}_6 &= \dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{aligned}\quad (II)$$

ดังนั้นบทความนี้จะศึกษาหาความสัมพันธ์และหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของ $\bar{\Delta}_n$ กับผลการยกกำลัง $n-1$ ของเลข 11 เมื่อ n เป็นจำนวนนับ โดยใช้ทฤษฎีบทที่สำคัญในการพิสูจน์ข้อสงสัยของเราคือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

เช่น

$$\begin{array}{cccccc} 0 & = & {}_00 & 10 & = & {}_10 & 60 & = & {}_60 & 500 & = & {}_{500}0 & 2560 & = & {}_{256}0 \\ 1 & = & {}_01 & 11 & = & {}_11 & 61 & = & {}_61 & 501 & = & {}_{50}1 & 2561 & = & {}_{256}1 \\ 2 & = & {}_02 & 12 & = & {}_12 & 62 & = & {}_62 & 502 & = & {}_{50}2 & 2562 & = & {}_{256}2 \\ 3 & = & {}_03 & 13 & = & {}_13 & 63 & = & {}_63 & 503 & = & {}_{50}3 & 2563 & = & {}_{256}3 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 9 & = & {}_09 & 19 & = & {}_19 & 69 & = & {}_69 & 509 & = & {}_{50}9 & 2569 & = & {}_{256}9 \end{array}$$

เพื่อความสะดวก เราจะเขียน ${}_0r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \leq r \leq 10$

ณัฐวุฒิและอัยเรศ (2555) ได้นิยามเซตของจำนวนใน (III) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิและอัยเรศ, 2555) กำหนดให้ ${}_zR$ แทนเซตของจำนวนใน (III) ทั้งหมด นั่นคือ ${}_zR = \{{}_qr | q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\}$ และ

2. ทฤษฎีบท 1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (principle of mathematical induction) (Clark, 2002)

กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็ม n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็ม $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq n_0$

อัยเรศ (2554) และ ณัฐวุฒิและอัยเรศ (2555) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q (ผลหาร) และ r (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r \leq 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_qr \quad (III)$$

เรียกสมาชิกของ ${}_zR$ ว่าจำนวนเศษเหลือ (remainder number) พร้อมทั้งนิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) (บน ${}_zR$ โดย

$${}_qr({}_ts = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) & ; 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+b}a & ; r+s \geq 10, r+s = {}_ba \end{cases}$$

สำหรับทุก ${}_qr, {}_ts \in {}_zR$ และได้พิสูจน์ว่า

$\langle z_R, () \rangle$ เป็นกรุป (group) ซึ่งในผลการศึกษาหลักของเราจะได้นำสมบัติของการดำเนินการทวิภาค (บน z_R ไปใช้ในการพิสูจน์ด้วย

จากการแปลงเลขฐานสิบเป็นจำนวนเศษเหลือ นั้น จะเห็นว่าจำนวนเศษเหลือที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปใช้เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่าย จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

การแปลงจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบปกติทำได้โดยการบวกทดจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $457_{21}8_24_{14}708$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือให้เป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 457_{21}8_24_{14}708 &= 45(7+21)(8+2)(4+14)708 \\ &= 45_28_10_18708 \\ &= 4(5+2)(8+1)(0+1)8708 \\ &= 47918708 \end{aligned}$$

3. ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem) (Solomon, 1997)

กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n {}^nC_r x^{n-r} y^r \quad (IV)$$

เมื่อ ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ดำราบางเล่มอาจจะ

เขียนแทน nC_r ด้วย $\binom{n}{r}$

สองบทตั้งต่อไปนี้ เป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

บทตั้ง 1 เอกลักษณ์พาสกาล (Pascal's

Identity) (Shoup, 2008) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ $0 \leq r \leq n$

บทตั้ง 2 (Shoup, 2008) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และ $0 \leq r \leq n$

4. ผลการศึกษาหลัก

สำหรับหัวข้อนี้ เราจะนำเสนอผลการศึกษาหลักของบทความนี้ โดยทฤษฎีบท 3 เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญมากในการให้ความหมายของจำนวนสองหลัก ซึ่งแต่ละหลักเป็นผลการยกกำลัง n ของเลข 11 เมื่อ n เป็นจำนวนนับ และยังเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทหลักของบทความนี้ ที่จะแสดงถึงความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมพาสกาลกับผลการยกกำลังของเลข 11 อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบททั้งสอง และตรวจคำตอบที่ได้ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในบทความนี้ คือโปรแกรม Maple 11.0

เพื่อให้ง่ายต่อการอ่านการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3 และ 4 จะยกตัวอย่างการคำนวณที่ใช้ในการพิสูจน์ดังสามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่า $(11^4)(11^4) = 11^5$

วิธีทำ จากการแปลงจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (11^4)(11^4) &= (14641)(14641) \\ &= {}_{1464}1{}_{1464}1 \\ &= (1464)(1465)1 \\ &= {}_{146}4{}_{146}51 \\ &= (146)(150)51 \\ &= {}_{14}6{}_{15}051 \\ &= (14)(21)051 \\ &= {}_{14}2{}_{10}51 \\ &= 161051 \\ &= 11^5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่า $(11^4)(11^4)(11^4)(11^4) = (11^4+11^4+11^4)(11^4+11^4+11^4)$

วิธีทำ จากนิยามการดำเนินการทวิภาค (ของจำนวนเศษเหลือ และการแปลงจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(11^4)(11^4)(11^4)(11^4) &= 161051(161051(161051 \\ &= {}_{16105}1({}_{16105}1({}_{16105}1 \\ &= ({}_{16105}1+{}_{16105}1+{}_{16105}1)(1+1+1) \\ &= {}_{48315}3 \\ &= 483153\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } (11^4+11^4+11^4)(11^4+11^4+11^4) &= (14641+14641+14641)(14641+14641+14641) \\ &= (43923)(43923) \\ &= {}_{4392}3{}_{4392}3 \\ &= (4392)(4395)3 \\ &= {}_{439}2{}_{439}53 \\ &= (439)(441)53 \\ &= {}_{43}9{}_{44}153 \\ &= (43)(53)153 \\ &= {}_43{}_53153 \\ &= 483153\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (11^4)(11^4)(11^4)(11^4) = (11^4+11^4+11^4)(11^4+11^4+11^4)$$

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่า $({}^4C_0{}^4C_1{}^4C_2{}^4C_3{}^4C_4)({}^0C_0{}^4C_1{}^4C_2{}^4C_3{}^4C_4) = {}^4C_0({}^4C_1+{}^4C_0)({}^4C_2+{}^4C_1)({}^4C_3+{}^4C_2)({}^4C_4+{}^4C_3)$

วิธีทำ จากนิยามการดำเนินการทวิภาค (ของจำนวนเศษเหลือ และการแปลงจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}({}^4C_0{}^4C_1{}^4C_2{}^4C_3{}^4C_4)({}^0C_0{}^4C_1{}^4C_2{}^4C_3{}^4C_4) &= 146410(014641 \\ &= {}_{14641}0({}_{1464}1 \\ &= ({}_{14641}0+{}_{1464}1)(0+1) \\ &= {}_{16105}1 \\ &= 161051\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } {}^4C_0({}^4C_1 + {}^4C_0)({}^4C_2 + {}^4C_1)({}^4C_3 + {}^4C_2)({}^4C_4 + {}^4C_3){}^4C_4 &= 1(4+1)(6+4)(4+6)(1+4)1 \\
 &= 15(10)(10)51 \\
 &= 15_10_101 \\
 &= 161051
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } ({}^4C_0{}^4C_1{}^4C_2{}^4C_3{}^4C_4)({}^4C_0{}^4C_1{}^4C_2{}^4C_3{}^4C_4) = {}^4C_0({}^4C_1 + {}^4C_0)({}^4C_2 + {}^4C_1)({}^4C_3 + {}^4C_2)({}^4C_4 + {}^4C_3)$$

จากตัวอย่าง 1 เราได้รับทฤษฎีบท 3 ดังนี้
ทฤษฎีบท 3 สำหรับทุกจำนวนนับ n จะได้

$$\text{ว่า } (11^n)(11^n) = 11^{n+1} \quad (V)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(11^n)(11^n) = 11^{n+1}$$

$$\text{เนื่องจาก } (11^0)(11^0) = 11 = 11^{11} = 11^{0+1}$$

จะได้ว่า $P(0)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็น

จริง สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 0$

$$\text{จะได้ว่า } (11^k)(11^k) = 11^{k+1}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (11^{k+1})(11^{k+1}) &= (11^k \cdot 11)(11^k \cdot 11) \\
 &= \underbrace{(11^k + 11^k + 11^k + \dots + 11^k)}_{11\text{-times}} \underbrace{(11^k + 11^k + 11^k + \dots + 11^k)}_{11\text{-times}} \\
 &= \underbrace{(11^k)(11^k)(11^k)(11^k) \dots (11^k)(11^k)}_{11\text{-times}} \\
 &= \underbrace{11^{k+1}(11^{k+1}(11^{k+1} \dots (11^{k+1})))}_{11\text{-times}} \\
 &= (11^{k+1} \cdot 11) \\
 &= 11^{(k+1)+1}
 \end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $(11^n)(11^n) = 11^{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

จากทฤษฎีบท 3 ช่วยให้เราหาค่าของ
 จำนวนสองหลัก ซึ่งแต่ละหลักเป็นผลการยกกำลัง
 จำนวนนับของเลข 11 ได้สะดวกขึ้น

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $(11^{50})(11^{50})$

วิธีทำ พิจารณา

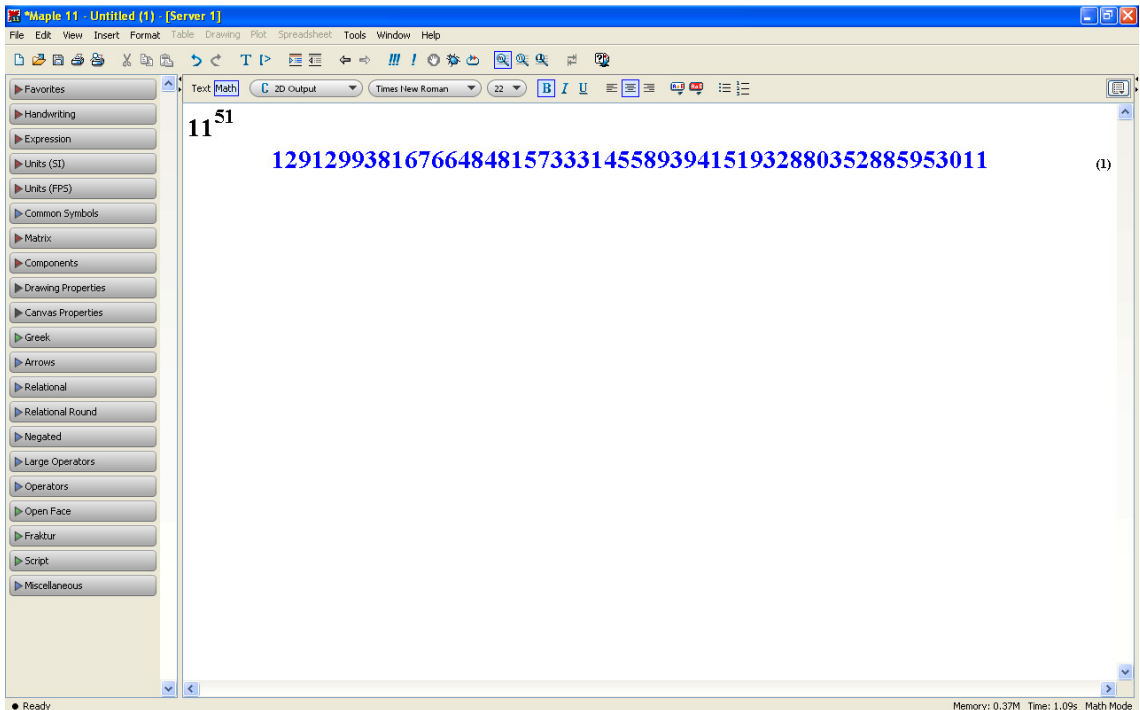
$$\begin{aligned}
 (11^{50})(11^{50}) &= (11739085287969531650666649599035831993898213898723001) \\
 &\quad (11739085287969531650666649599035831993898213898723001) \\
 &= \begin{matrix} 1 \\ 11739085287969531650666649599035831993898213898723001 \end{matrix} \\
 &\quad \begin{matrix} 1 \\ 11739085287969531650666649599035831993898213898723001 \end{matrix} \\
 &= 129129938167664848157333145589394151932880352885953011
 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(11^{50})(11^{50}) &= 11^{51} \\ &= 129129938167664848157333145589394151932880352885953011\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

(รูปที่ 1)



รูปที่ 1 11^{51}

โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3 $\bar{\Delta}_{n+1} = {}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทหลักที่จะตอบข้อสงสัยของเราที่ได้กล่าวมาข้างต้น โดยผ่านกระบวนการพิสูจน์ด้วยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนนับ n จะได้ว่าเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ $n+1$ ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาลเท่ากับ 11^n นั่นคือ

$$\bar{\Delta}_{n+1} = {}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_n = 11^n \quad (\text{VI})$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$${}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_n = 11^n$$

$$\text{เนื่องจาก } {}^1C_0 {}^1C_1 = \frac{1!}{1! \cdot 0!} \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 11 = 11^1$$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็น

จริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k และกำหนดให้ $k = {}_st$

$$\text{จะได้ว่า } {}^kC_0 {}^kC_1 {}^kC_2 \dots {}^kC_k = 11^k$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิสูจน์

$$\begin{aligned}
{}^{k+1}C_0 {}^{k+1}C_1 {}^{k+1}C_2 \dots {}^{k+1}C_k {}^{k+1}C_{k+1} &= {}^kC_0 ({}^kC_1 + {}^kC_0) ({}^kC_2 + {}^kC_1) \dots ({}^kC_k + {}^kC_{k-1}) {}^kC_k \\
&= ({}^kC_0 {}^kC_1 {}^kC_2 \dots {}^kC_k 0) (0 {}^kC_0 {}^kC_1 \dots {}^kC_{k-1} {}^kC_k) \\
&= ((11^k)0) (0(11^k)) \\
&= (11^k)(11^k) \\
&= 11^{k+1}
\end{aligned}$$

จะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$\vec{\Delta}_{n+1} = {}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_n = 11^n$ สำหรับ
ทุกจำนวนนับ n

ต่อไปจะยกตัวอย่างการหาค่าของเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล โดยใช้ทฤษฎีบท 4 และตรวจคำตอบด้วยทฤษฎีบทวินามและโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ตัวอย่าง 5 จงหาค่าของเลขเรียงกันจาก
ซ้ายไปขวาในแถวที่ 6 ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าเลขเรียงกัน
จากซ้ายไปขวาในแถวที่ 6 ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล คือ $\Delta_6 = {}^5C_0 {}^5C_1 {}^5C_2 {}^5C_3 {}^5C_4 {}^5C_5 = 11^5 = 161051$

ตรวจคำตอบด้วยทฤษฎีบททวินาม

โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่าสัมประสิทธิ์
ทวินามในแถวที่ 6 ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล
ได้แก่ ${}^5C_0 = 1, {}^5C_1 = 5, {}^5C_2 = 10, {}^5C_3 = 10, {}^5C_4 = 5$
และ ${}^5C_5 = 1$

จะนั้นเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ 6
ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล คือ

$$\begin{aligned} 15(10)(10)51 &= 15_1 0_1 051 \\ &= 161051 \\ &= 11^5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6 จงหาค่าของเลขเรียงกันจาก
ซ้ายไปขวาในแถวที่ 21 ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าเลขเรียงกัน

จากซ้ายไปขวาในแถวที่ 21 ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล คือ

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_{21} &= {}^{20}C_0 {}^{20}C_1 {}^{20}C_2 \dots {}^{20}C_{20} \\ &= 11^{20} \\ &= 672749994932560009201\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์
(รูปที่ 2)

จะนับเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ 21 ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาลเมื่อแปลงเป็น เลขฐานสิบ คือ

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{21} &= {}^{20}C_0 {}^{20}C_1 {}^{20}C_2 \dots {}^{20}C_{20} \\ &= 1 {}^0_2 {}^0_{19} {}^0_{114} {}^0_{484} {}^5_{1550} {}^4_{3876} {}^0_{7752} {}^0_{12597} {}^0_{16796} {}^0_{18475} {}^6_{16796} {}^0_{12597} {}^0_{7752} {}^0_{3876} {}^0_{1550} {}^4_{484} {}^5_{114} {}^0_{19} {}^0_2 {}^0_1 \\ &= 672749994932560009201 \\ &= 11^{20} \end{aligned}$$

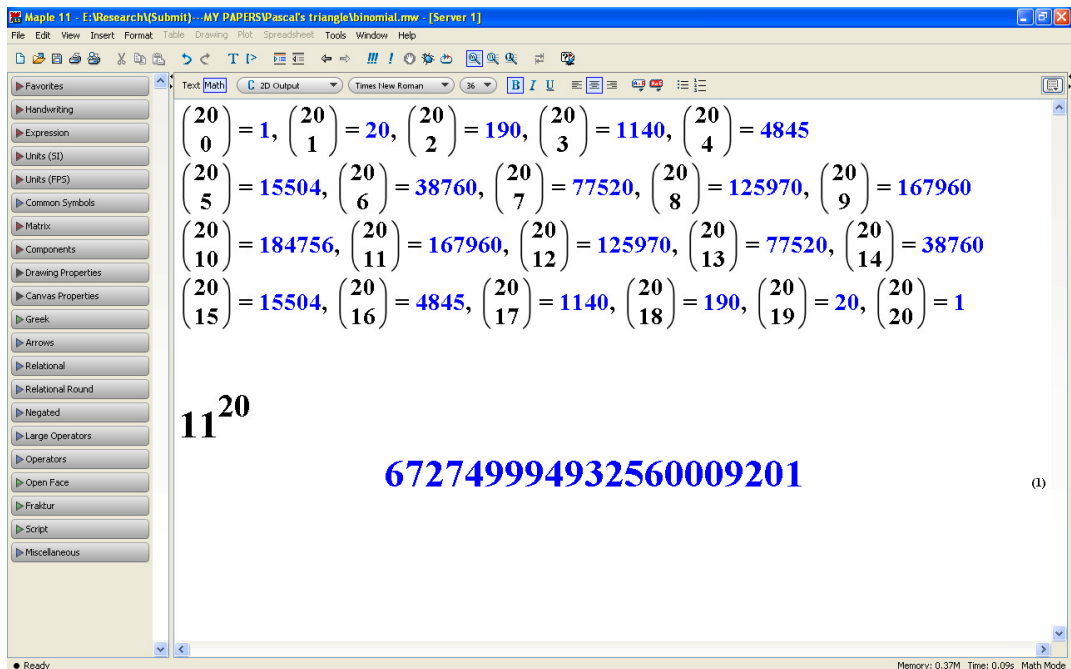
โดยบทตั้ง 2 และทฤษฎีบท 4 ทำให้เรา
ได้รับบทแทรก 1 ดังนี้

บทแทรก 1 สำหรับทุกจำนวนนับ n จะได้
ว่าเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ $n+1$ ของรูป
สามเหลี่ยมปาสคาลเท่ากับเลขเรียงกันจากขวาไป
ซ้ายในแถวที่ $n+1$ ของรูปสามเหลี่ยมปาสคาล ซึ่ง
เท่ากับ 11^n นั่นคือ $\bar{\Delta}_{n+1} = \overline{\Delta}_{n+1} = 11^n$ (VII)

ตัวอย่าง 7 จงแสดงว่า $\vec{\Delta}_{21} = \vec{\Delta}_{21}$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 2 ทฤษฎีบท 4 และ
ตัวอย่าง 6 จะได้ว่า

$$\bar{\Delta}_{21} = 11^{20} = {}^{20}C_0 {}^{20}C_1 {}^{20}C_2 \dots {}^{20}C_{20} = {}^{20}C_{20} {}^{20}C_{19} {}^{20}C_{18} \dots {}^{20}C_0 = \bar{\Delta}_{21}$$



รูปที่ 2 $\bar{\Delta}_{21}$: เลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ 21 ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล

5. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

การค้นพบและสามารถพิสูจน์เป็นรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ของความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลกับผลการยกกำลังของเลข 11 โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ทำให้เราพบารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาในแถวที่ $n+1$ ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล สำหรับทุกจำนวนนับ n หาได้จริงตามทฤษฎีบท 4 ซึ่งเท่ากับ 11^n ซึ่งเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\bar{\Delta}_{n+1} = {}^nC_0 {}^nC_1 {}^nC_2 \dots {}^nC_n = 11^n$$

และรูปแบบทั่วไปที่ได้ยังสอดคล้องกับข้อสังเกตที่เราพบอีกด้วย จากการสังเกตความสัมพันธ์ที่สวยงามของเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลเพียงห้าแถวกับผลการยกกำลัง

ของเลข 11 จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปแบบทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับอัยเรศ (2554) ได้ว่ารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของเลขเรียงกันจากซ้ายไปขวาของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลกับผลการยกกำลังของเลข 11 เป็นอีกความสวยงามวางนัยทั่วไป (generalized beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง

จากบทความนี้ ผู้อ่านจะพบความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของจำนวนเต็มที่น่าสนใจของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลเพิ่มเติมจากการสังเกต และสามารถพิสูจน์เป็นทฤษฎีบทได้ ฉะนั้นผู้อ่านสามารถสังเกตและศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของตัวเลขได้ โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือ

สำคัญในการพิสูจน์เช่นเดียวกับบทความนี้นอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

7. เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2555, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของ

กรุปของจำนวนเศษเหลือ, ว.นเรศวรพะเยา (รอการพิจารณา).

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1, ว.นเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.

Clark, W.E., 2002, Elementary Number Theory, Department of Mathematics, University of South Florida, Available Source: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf, July 25, 2012.

Shoup, V., 2009, A Computational Introduction to Number Theory and Algebra (Second Edition), Cambridge University Press, New York.

Solomon, R.C., 1997, A Level Mathematics, 4th Ed., Letts Educational, London.