

สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$

On the Diophantine Equation $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$

ศิริจันทร์ เวสารัชชาต*, อาซิดิน มะกุวิง, ณัฐฐิ วสุรักขะ และ กิตติศักดิ์ ภัทรจิตรา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์วิจัย ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Sirichan Vesarachasart*, Asidin Makuwing, Nat Wasurakka and Kittisak Phattharachittra

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,

Rangsit centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

Received: November 28, 2018; Accepted: December 13, 2018

บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อแสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ มีผลเฉลย (x, y, z, u) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบเพียง 4 ชุดเท่านั้น ได้แก่ $(1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 4)$, $(4, 2, 1, 16)$ และ $(14, 4, 1, 2188)$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์; ส่วนตกค้างกำลังสอง; สัญลักษณ์เลอจองด์; ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ

Abstract

The purpose of this research is to show that the Diophantine equation $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ has only four non-negative integer solutions (x, y, z, u) , which are $(1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 4)$, $(4, 2, 1, 16)$ and $(14, 4, 1, 2188)$.

Keywords: diophantine equation; quadratic residue; Legendre symbol; non-negative integer solution

1. คำนำ

ในทศวรรษที่ผ่านมาได้มีการให้ความสนใจศึกษาปัญหาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์เป็นอย่างมาก นักวิจัยจำนวนมากได้ศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในหลากหลายสมการ ตัวอย่าง เช่น ปี ค.ศ. 2012 Sroysang ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ ซึ่งพบว่าสมการนี้มีผล

เฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 2)$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Rabago ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์สองสมการ คือ $3^x + 19^y = z^2$ และ $3^x + 91^y = z^2$ ซึ่งพบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) ของสมการ $3^x + 19^y = z^2$ คือ $(1, 0, 2)$ และ $(4, 1, 10)$ ส่วน

สมการ $3^x + 91^y = z^2$ มีผลเฉลยเป็น $(1, 0, 2)$ และ $(2, 1, 10)$

หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2015 Xu และ Deng ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 19^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ จากการศึกษาค้นคว้าพบว่ามีผลเฉลย (x, y, z, u) ทั้งหมด 3 ชุด ได้แก่ $(1, 0, 0, 2)$, $(4, 0, 1, 10)$ และ $(2, 2, 1, 22)$

ถัดมาในปี ค.ศ. 2016 Rabago ก็ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการ $2^x + 17^y = z^2$ และพบว่าสมการนี้มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงแค่ห้าชุด คือ $(3, 1, 5)$, $(5, 1, 7)$, $(6, 1, 9)$, $(7, 3, 71)$ และ $(9, 1, 23)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Asthana และ Singh ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ ซึ่งพบว่ามีเพียง $(x, y, z) = (1, 0, 2)$, $(1, 1, 4)$, $(3, 2, 14)$ และ $(5, 1, 16)$ ที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์นี้

สำหรับในบทความวิจัยนี้เราสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และพบว่าผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการไดโอแฟนไทน์นี้มีเพียงแค่ 4 ชุดเท่านั้น คือ $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 4)$, $(4, 2, 1, 16)$ และ $(14, 4, 1, 2188)$

2. ความรู้พื้นฐาน

หัวข้อนี้กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทสำคัญที่ได้นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ โดยไม่ได้พิสูจน์ทฤษฎีบท แต่ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง

บทนิยาม 2.1 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่ และ a เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $(a, p) = 1$ จะกล่าวว่า a เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง (quadratic residue) ของ p ถ้ามีจำนวนเต็ม $x \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ ที่ทำให้

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

บทนิยาม 2.2 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่ และ a เป็นจำนวนเต็มที่ $(a, p) = 1$ สัญลักษณ์เลอจองด์ร์ (Legendre symbol) (a/p) นิยามดังนี้

$$(a/p) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a \text{ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \\ -1 & \text{ถ้า } a \text{ ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.1 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้วสัญลักษณ์เลอจองด์ร์มีสมบัติดังนี้

$$(1) \text{ ถ้า } a \equiv b \pmod{p} \text{ แล้ว } (a/p) = (b/p)$$

$$(2) (a^2/p) = 1$$

$$(3) (a/p) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

$$(4) (ab/p) = (a/p)(b/p)$$

$$(5) (1/p) = 1 \text{ และ } (-1/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

และผลจากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $(a^n/p) = (a/p)^n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.2 (Rabago, 2013) ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ (x, z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 1 = z^2$ คือ $(1, 2)$

3. ผลการศึกษา

การศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์

$$3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2 \quad (1)$$

เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ พบว่าเราสามารถหาผลเฉลยของ (1) ได้ซึ่งผลเฉลยจะมีเพียงแค่สี่ชุดเท่านั้น ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบเพียงแค่ 4 ชุด เท่านั้น คือ $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$,

(2, 0, 1, 4), (4, 2, 1, 16) และ (14, 4, 1, 2188)

พิสูจน์ แบ่งการพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $y = 0 = z$ จาก (1) จะได้ $3^x + 1 = u^2$ โดยทฤษฎีบท 2.2 ได้ว่า $x = 1$ และ $u = 2$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) สำหรับกรณีนี้ คือ $(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 2)$

กรณี 2 ถ้า $y = 0$ และ $z > 0$ จาก (1) จะได้

$$3^x + 7^z = u^2 \tag{2}$$

จาก (2) ได้ว่า $3^x - u^2 = -7^z$ จึงทำให้ $3^x \equiv u^2 \pmod{7}$ โดยอาศัยบทนิยาม 2.2 และทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $(-1)^x = (3/7)^x = (3^x/7) = (u^2/7) = 1$ ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มคู่ สมมติให้ $x = 2x_1$ เมื่อ x_1 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เมื่อแทนลงใน (2) จะได้ $3^{2x_1} + 7^z = u^2$ หรือ $u^2 - 3^{2x_1} = 7^z$ ทำให้ได้ว่า $(u - 3^{x_1})(u + 3^{x_1}) = 7^z$ เนื่องจาก 7 เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ว่าจะมีจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ a และ b ที่ทำให้ $u + 3^{x_1} = 7^a$ และ $u - 3^{x_1} = 7^b$ โดยที่ $a > b \geq 0$ และ $a + b = z$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $2 \cdot 3^{x_1} = 7^a - 7^b = 7^b(7^{a-b} - 1)$ เราจึงได้ $b = 0$ ดังนั้น $u - 3^{x_1} = 1, u + 3^{x_1} = 7^z$ และได้ว่า

$$2 \cdot 3^{x_1} = 7^z - 1 \tag{3}$$

จาก (3) ถ้า $z = 1$ แล้วจะได้ $x_1 = 1$ และ $u = 4$ ดังนั้นผลเฉลย (x, y, z, u) ของ (1) กรณีที่ $z = 1$ ก็คือ (2, 0, 1, 4) ส่วนกรณีที่ $z > 1$ โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $7^z - 1 = (7 - 1)(7^{z-1} + 7^{z-2} + \dots + 7 + 1) = (7 - 1) \sum_{i=0}^{z-1} 7^i$ เนื่องจาก $7^z \equiv 1 \pmod{3}$ ทำให้ $7^{z-1} + 7^{z-2} + \dots + 7 + 1 \equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 1 \equiv z \pmod{3}$ และจาก (3) ยังได้อีกว่า $2 \cdot 3^{x_1} = 7^z - 1 \equiv (7 - 1)z \pmod{3}$ นั่นคือ $z \equiv 0 \pmod{3}$ จึงสมมติให้ $z = 3z_1$ เมื่อ z_1 เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $2 \cdot 3^{x_1} = 7^z - 1 = 7^{3z_1} - 1 =$

$$(7^3 - 1) \sum_{i=0}^{z_1-1} (7^3)^i = 2 \cdot 3^2 \cdot 19 \sum_{i=0}^{z_1-1} (7^3)^i \text{ ซึ่งทำให้ (1)}$$

ไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีนี้ สรุปได้ว่าสำหรับกรณี $y = 0$ และ $z > 0$ ได้ผลเฉลยของ (1) คือ $(x, y, z, u) = (2, 0, 1, 4)$

กรณี 3 ถ้า $y > 0$ และ $z = 0$ จาก (1) จะได้ $3^x + 5^y = u^2 \tag{4}$

จาก (4) จะได้ $3^x \equiv u^2 \pmod{5}$ โดยอาศัยบทนิยาม 2.2 และทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $(-1)^x = (3/5)^x = (3^x/5) = (u^2/5) = 1$ สมมติให้ $x = 2x_2$ เมื่อ x_2 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แทนลงใน (4) ได้ $9^{x_2} + 5^y = u^2$ เนื่องจาก $9^{x_2} + 5^y \equiv 2 \pmod{4}$ แต่ $u^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ จึงทำให้สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีนี้

กรณี 4 ถ้า $y, z > 0$ ในทำนองเดียวกันกับกรณี 2 และ 3 จึงสมมติให้ $x = 2x_3$ เมื่อ x_3 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จาก (1) จะได้ $3^{2x_3} + 5^y \cdot 7^z = u^2$ ดังนั้น $(u - 3^{x_3})(u + 3^{x_3}) = 5^y \cdot 7^z$ แบ่งการพิจารณาออกได้ทั้งหมดอีก 4 กรณี ดังนี้

กรณี 4.1 ให้ $u - 3^{x_3} = 1$ และ $u + 3^{x_3} = 5^y \cdot 7^z$ จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} = 5^y \cdot 7^z - 1 \tag{5}$$

จาก (5) พบว่า $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 0 \pmod{3}$ และ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 2^y - 1 \pmod{3}$ ถ้า $y \equiv 1 \pmod{2}$ แล้วทำให้ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ ซึ่งทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย จึงได้ $y \equiv 0 \pmod{2}$ ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 4 และ 8 ทำให้ได้ $z \equiv 1 \pmod{2}$ และ $x_3 \equiv 1 \pmod{2}$ ตามลำดับ ดังนั้น $x_3 \equiv 1 \pmod{2}, y \equiv 0 \pmod{2}$ และ $z \equiv 1 \pmod{2}$ ซึ่งทำให้ $x_3 \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}, y \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod{8}$ และ $z \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$ จากนั้นพิจารณากรณีย่อยตามกรณีของ x_3 พบว่าถ้า $x_3 \equiv 1, 5 \pmod{8}$ แล้วเมื่อพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 5 จะทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น

$x_3 \equiv 3, 7 \pmod{8}$ ต่อมาเนื่องจาก $y \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod{8}$, $z \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$ และ $x_3 \equiv 3, 7 \pmod{8}$ ทำให้ได้ว่า

$$y \equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10 \pmod{12},$$

$$z \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 11 \pmod{12} \text{ และ}$$

$$x_3 \equiv 3, 7, 11 \pmod{12}$$

ถ้า $x_3 \equiv 3, 11 \pmod{12}$ แล้วเมื่อพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 7 จะได้ว่า $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 3, 5 \pmod{7}$ แต่ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 6 \pmod{7}$ ทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $x_3 \equiv 7 \pmod{12}$ ในทำนองเดียวกันพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 13, 9 และ 16 โดยที่ $x_3 \equiv 7 \pmod{12}$, $y \equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10 \pmod{12}$ และ $z \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 11 \pmod{12}$ จะได้ว่า $y \equiv 4 \pmod{12}$ และ $z \equiv 1 \pmod{12}$ ต่อไปจะแสดงว่า $z=1$ สมมติว่า $z > 1$ จาก $x_3 \equiv 7 \pmod{12}$, $y \equiv 4 \pmod{12}$ และ $z \equiv 1 \pmod{12}$ ทำให้ได้

$$x_3 \equiv 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37 \pmod{42},$$

$$y \equiv 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40 \pmod{42} \text{ และ}$$

$$z \equiv 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37 \pmod{42}$$

พิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 43 เมื่อ x_3 และ y เป็นตามกรณีย่อยข้างต้น พบว่า $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 6, 10, 23, 24, 40 \pmod{43}$ เมื่อ $x_3 \equiv 1, 13, 25, 31, 37 \pmod{42}$ และ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 1, 7, 21, 26, 41 \pmod{43}$ เมื่อ $y \equiv 16, 22, 28, 34, 40 \pmod{42}$ ซึ่งทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย จึงเหลือเพียงสองกรณีเท่านั้นที่สอดคล้องกับ (5) คือ $x_3 \equiv 7 \pmod{42}$, $y \equiv 4 \pmod{42}$ หรือ $x_3 \equiv 19 \pmod{42}$, $y \equiv 10 \pmod{42}$ เมื่อพิจารณา x_3 ที่เป็นไปตามสองกรณีข้างต้นจะได้ $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 13, 27 \pmod{49}$ แต่เนื่องจาก $z > 1$ ทำให้ได้ว่า $7^z \equiv 0 \pmod{49}$ ซึ่งทำให้ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 48 \pmod{49}$ ดังนั้น (5) ไม่มีผลเฉลย จึงสรุปว่า $z=1$ และเมื่อแทนลงใน (5) จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} + 1 = 7 \cdot 5^y \quad (6)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $y=4$ โดยสมมติให้ $y > 4$ จะได้ $7 \cdot 5^y \equiv 0 \pmod{3125}$ จึงทำให้ (6) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $y=4$ เมื่อแทนลงใน (6) จะได้ $x_3 = 7$ และจาก (1) จะได้ $u = 2188$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) ในกรณีนี้ คือ $(x, y, z, u) = (14, 4, 1, 2188)$

กรณี 4.2 ให้ $u - 3^{x_3} = 5^y$ และ $u + 3^{x_3} = 7^z$ จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} = 7^z - 5^y \quad (7)$$

ทำนองเดียวกันกับกรณี 4.1 เมื่อพิจารณา (7) ภายใต้การมอดุโล 3, 4 และ 8 จะได้ $y \equiv 0 \pmod{2}$, $z \equiv 1 \pmod{2}$ และ $x_3 \equiv 1 \pmod{2}$ เนื่องจาก $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 1, 4 \pmod{5}$ แต่ $7^z - 5^y \equiv 2, 3 \pmod{5}$ จึงได้ว่า (7) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ (1) จึงไม่มีผลเฉลย

กรณี 4.3 ให้ $u - 3^{x_3} = 7^z$ และ $u + 3^{x_3} = 5^y$ จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} = 5^y - 7^z \quad (8)$$

ในทำนองเดียวกันกับกรณี 4.1 และ 4.2 เมื่อพิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 3, 4 และ 8 จะได้ $y \equiv 0 \pmod{2}$, $z \equiv 1 \pmod{2}$ และ $x_3 \equiv 0 \pmod{2}$ ถ้า $x_3 = 0$ แล้วจาก (8) ได้ว่า $2 = 5^y - 7^z$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ต่อไปจะแสดงว่า $x_3 = 2$ สมมติให้ $x_3 > 2$ เนื่องจาก $y \equiv 0 \pmod{2}$, $z \equiv 1 \pmod{2}$ และ $x_3 \equiv 0 \pmod{2}$ ทำให้ได้ $y \equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \pmod{18}$, $z \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 \pmod{18}$ และ $x_3 \equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \pmod{18}$ ตามลำดับ

เมื่อพิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 76 พบว่ามีกรณีย่อยที่สอดคล้องกับ (8) ทั้งหมด 12 กรณีย่อย ดังนี้

$$x_3 \equiv 0 \pmod{18}, y \equiv 14 \pmod{18}, z \equiv 1, 7, 13 \pmod{18},$$

$$x_3 \equiv 2 \pmod{18}, y \equiv 2 \pmod{18}, z \equiv 1, 7, 13 \pmod{18},$$

$$x_3 \equiv 4 \pmod{18}, y \equiv 4 \pmod{18}, z \equiv 1, 7, 13 \pmod{18},$$

$$x_3 \equiv 4 \pmod{18}, y \equiv 12 \pmod{18}, z \equiv 3, 9, 15 \pmod{18},$$

$x_3 \equiv 6 \pmod{18}, y \equiv 2 \pmod{18}, z \equiv 5, 11, 17 \pmod{18}$,
 $x_3 \equiv 8 \pmod{18}, y \equiv 8 \pmod{18}, z \equiv 5, 11, 17 \pmod{18}$,
 $x_3 \equiv 10 \pmod{18}, y \equiv 0 \pmod{18}, z \equiv 1, 7, 13 \pmod{18}$,
 $x_3 \equiv 10 \pmod{18}, y \equiv 10 \pmod{18}, z \equiv 5, 11, 17 \pmod{18}$,
 $x_3 \equiv 12 \pmod{18}, y \equiv 8 \pmod{18}, z \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$,
 $x_3 \equiv 14 \pmod{18}, y \equiv 14 \pmod{18}, z \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$,
 $x_3 \equiv 16 \pmod{18}, y \equiv 6 \pmod{18}, z \equiv 5, 11, 17 \pmod{18}$ และ
 $x_3 \equiv 16 \pmod{18}, y \equiv 16 \pmod{18}, z \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$

พิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 7 เมื่อ x_3, y และ z เป็นไปตามกรณีข้างต้น พบว่าถ้า $x_3 \equiv 0, 6, 12 \pmod{18}$ และ $y \equiv 4, 10, 16 \pmod{18}$ แล้ว (8) ไม่มีผลเฉลย สำหรับกรณีที่เหลือซึ่งสอดคล้องกับ (8) ทำให้ได้ $x_3 \equiv 2, 20 \pmod{36}, y \equiv 2, 20 \pmod{36}, z \equiv 1, 7, 13, 19, 25, 31 \pmod{36}$; $x_3 \equiv 4, 22 \pmod{36}, y \equiv 12, 30 \pmod{36}, z \equiv 3, 9, 15, 21, 27, 33 \pmod{36}$; $x_3 \equiv 8, 26 \pmod{36}, y \equiv 8, 26 \pmod{36}, z \equiv 5, 11, 17, 23, 29, 35 \pmod{36}$; $x_3 \equiv 10, 28 \pmod{36}, y \equiv 0, 18 \pmod{36}, z \equiv 1, 7, 13, 19, 25, 31 \pmod{36}$; $x_3 \equiv 14, 32 \pmod{36}, y \equiv 14, 32 \pmod{36}, z \equiv 3, 9, 15, 21, 27, 33 \pmod{36}$ และ $x_3 \equiv 16, 34 \pmod{36}, y \equiv 6, 24 \pmod{36}, z \equiv 5, 11, 17, 23, 29, 35 \pmod{36}$

ในการทำงานเดียวกันพิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 37 เมื่อ x_3, y และ z เป็นตาม 6 กรณีนี้ พบว่าจะเหลือเพียงสองกรณีที่เท่านั้นที่สอดคล้องกับ (8) ได้แก่ $x_3 \equiv 2, 20 \pmod{36}, y \equiv 2 \pmod{36}, z \equiv 1, 19 \pmod{36}$ และ $x_3 \equiv 10, 28 \pmod{36}, y \equiv 0 \pmod{36}, z \equiv 1, 19 \pmod{36}$ พิจารณาทั้ง 2 กรณีย่อย ดังต่อไปนี้

กรณี 4.3.1 ให้ $x_3 \equiv 2, 20 \pmod{36}, y \equiv 2 \pmod{36}$ และ $z \equiv 1, 19 \pmod{36}$ เนื่องจาก $2 \cdot 3^5 \equiv 0 \pmod{27}$ แต่ $5^y - 7^z \equiv 18 \pmod{27}$ จึงทำให้ (8) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 4.3.2 ให้ $x_3 \equiv 10, 28 \pmod{36}, y \equiv 0 \pmod{36}$ และ $z \equiv 1, 19 \pmod{36}$ เนื่องจาก $2 \cdot 3^5 \equiv 0 \pmod{27}$ แต่ $5^y - 7^z \equiv 21 \pmod{27}$ จึงทำให้ (8) ไม่มีผลเฉลย

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $x_3 = 2$ เมื่อแทนลงใน (8) จะได้

$$18 = 5^y - 7^z \tag{9}$$

เนื่องจาก $y \equiv 0 \pmod{2}$ และ $z \equiv 1 \pmod{2}$ จะได้ $y \equiv 0, 2, 4, \dots, 58 \pmod{60}$ และ $z \equiv 1, 3, 5, \dots, 59 \pmod{60}$ ถ้า $y \equiv 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56 \pmod{60}$ แล้วจะได้ $5^y - 7^z \equiv 10 \pmod{16}$ ซึ่งทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $y \equiv 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58 \pmod{60}$ ถ้า $z \equiv 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 35, 39, 41, 43, 45, 47, 51, 53, 55, 57, 59 \pmod{60}$ แล้ว $5^y - 7^z \equiv 4, 6, 10, 14, 20 \pmod{26}$ ทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $z \equiv 1, 13, 25, 37, 49 \pmod{60}$ ในทำนองเดียวกันพิจารณา (9) ภายใต้การมอดุโล 61 จะได้กรณีย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมดสี่กรณีดังนี้

$$y \equiv 2 \pmod{60}, z \equiv 1 \pmod{60},$$

$$y \equiv 14 \pmod{60}, z \equiv 13 \pmod{60},$$

$$y \equiv 18 \pmod{60}, z \equiv 25 \pmod{60}$$

$$\text{และ } y \equiv 42 \pmod{60}, z \equiv 49 \pmod{60}$$

สำหรับกรณี $y \equiv 14 \pmod{60}, z \equiv 13 \pmod{60}$ และกรณี $y \equiv 18 \pmod{60}, z \equiv 25 \pmod{60}$ จะได้ว่า $5^y - 7^z \equiv 6, 38 \pmod{62}$ ซึ่งทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลย ส่วนถ้า $y \equiv 42 \pmod{60}, z \equiv 49 \pmod{60}$ แล้ว $5^y - 7^z \equiv 6 \pmod{66}$ จึงทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลยเช่นกัน ดังนั้น $y \equiv 2 \pmod{60}, z \equiv 1 \pmod{60}$

ให้ $y = 60m + 2$ และ $z = 60n + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ ศูนย์ จาก (9) ได้ว่า $5^{60m+2} - 7^{60n+1} = 18$ หรือ $25 \cdot 5^{60m} - 7 \cdot 7^{60n} = 25 - 7$ ทำให้ได้ว่า

$$25(5^{60m} - 1) = 7(7^{60n} - 1) \quad (10)$$

เนื่องจาก $7^{60n} - 1 \equiv 0 \pmod{125}$ จึงได้ $7^{60n} - 1 = 125k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k และยังได้อีกว่า $25(5^{60m} - 1) = 7(125k) = 875k$ ดังนั้น $5^{60m} - 1 = 35k$ ทำให้ได้ $m=0$ เมื่อแทนลงใน (10) จะได้ $7^{60n} = 1$ นั่นคือ $n=0$ ซึ่งทำให้ $y=2$ และ $z=1$ จาก (1) จะได้ $u=16$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) ก็คือ $(x, y, z, u) = (4, 2, 1, 16)$

กรณี 4.4 ถ้าให้ $u - 3^{x_3} = 5^y \cdot 7^z$ และ $u + 3^{x_3} = 1$ แล้ว $2 \cdot 3^{x_3} = 1 - 5^y \cdot 7^z$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง จึงทำให้ (1) ไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีนี้

จากกรณี 4.1-4.4 เราสรุปได้ว่าสำหรับกรณี 4 ถ้า $y, z > 0$ แล้ว (1) มีผลเฉลย (x, y, z, u) ทั้งหมด 2 ชุด ได้แก่ $(4, 2, 1, 16)$ และ $(14, 4, 1, 2188)$

นอกจากนี้เราสามารถนำผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1 มาพิจารณาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์บางสมการได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ คือ $(1, 0, 2)$

พิสูจน์ แทน $z=0$ และ $u=z$ ลงในทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งผลเฉลยที่ได้ยังคงสอดคล้องกับผลการศึกษาในรายการอ้างอิง (Sroysang, 2012)

บทแทรก 3.3 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 7^y = z^2$ คือ $(2, 1, 4)$

พิสูจน์ แทน $y=0$ และ $u=z$ ลงในทฤษฎีบท 3.1 จะได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (2, 1, 4)$

บทแทรก 3.4 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์

$$3^x + 7 \cdot 5^y = z^2 \text{ คือ } (4, 2, 16) \text{ และ } (14, 4, 2188)$$

พิสูจน์ แทน $z=1$ และ $u=z$ ลงในทฤษฎีบท 3.1 จะได้ผลเฉลย $(x, y, z) = (4, 2, 16)$, $(14, 4, 2188)$

4. สรุปผลการศึกษา

การศึกษานี้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ มีผลเฉลยทั้งหมด 4 ชุดเท่านั้น คือ $(1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 4)$, $(4, 2, 1, 16)$ และ $(14, 4, 1, 2188)$

5. รายการอ้างอิง

- Asthana, S. and Singh, M.M., 2017, On the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$, Int. J. Pure Appl. Math. 114: 301-304.
- Burton, D.M., 2007, Elementary Number Theory, 6th Ed., McGraw-Hill Companies, Inc., New York.
- Rabago, J.F.T., 2016, On the Diophantine equation $2^x + 17^y = z^2$, J. Indonesian Math. Soc. 22(2): 85-88.
- Rabago, J.F.T., 2013, On two Diophantine equations $3^x + 19^y = z^2$ and $3^x + 91^y = z^2$, Int. J. Math. Sci. Comput. 3(1): 28-29.
- Sroysang, B., 2012, On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$, Int. J. Pure Appl. Math. 81: 605-608.
- Xu, A.J. and Deng, M.J., 2015, On the Diophantine equation $3^x + 5^y \cdot 19^z = u^2$, J. Prog. Res. Math. 5: 578-581.