

สูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลังสำหรับเมทริกซ์จำนวนจริง กึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 5 บางรูปแบบ

Formulas of the Exponential Matrix for Some Real Semi Skew–Symmetric Matrix of Order 5

ปณชญา พัฒนางกูร*, ปัทมา บัวบุญนาค,

เปรมฤทัย คอมพุดชา และณัฐนรี ชาวเนื้อดี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Pattama Buaboonnark,

Premruthai Kompudsa and Natnaree Chaonuedee

Department of Mathematics and Statistics, Thammasat University,

Rangsit Centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

Received: July 9, 2019; Accepted: August 14, 2019

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 5 บางรูปแบบ

คำสำคัญ : เมทริกซ์เลขชี้กำลัง; เมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือน; สูตรของซิลเวสเตอร์

Abstract

In this paper, the formula of the exponential matrix e^A for some real semi skew-symmetric matrix A of order 5 is derived.

Keywords: exponential matrix; semi skew-symmetric matrix; Sylvester's formula

1. คำนำ

การคำนวณฟังก์ชันเมทริกซ์เป็นหนึ่งในปัญหาที่มีความท้าทายมากที่สุดในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข ฟังก์ชันเมทริกซ์ที่น่าสนใจศึกษาฟังก์ชันหนึ่ง คือ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์ A ที่

เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ (หรือเรียกสั้น ๆ ว่าเมทริกซ์อันดับ n) เมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A นิยามโดย

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

เมื่อ I_n คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n

ปี ค.ศ. 1978 Moler และ van Loan ได้ศึกษาวิธีประมาณค่า e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์อันดับ n ต่อมาในปี ค.ศ. 1998 Celledoni และ Iserles ได้ผลิตผลงานวิจัย 2 ชิ้น เกี่ยวกับการประมาณค่าเมทริกซ์เลขชี้กำลังในกรุปลี และเมื่อปี ค.ศ. 2000 มีการนำปัญหาดังกล่าวมาศึกษาอีกครั้ง เมื่อวิธีการประมาณค่าเมทริกซ์เลขชี้กำลังในกรุปลีถูกนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งวิธีการนี้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามารถหาผลเฉลยได้ในพีชคณิต (แต่หาผลเฉลยไม่ได้ในกรุปลี)

การศึกษาผลงานของ Murray และคณะ ในปี ค.ศ. 1994 จะเห็นได้ว่าการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลังนั้น สูตรของโรดริกซ์เป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณ e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์อันดับ 3 ดังนั้น ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน (กล่าวคือ $A^T = -A$) อันดับ 3 ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็น

จำนวนจริง นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว

สูตรของโรดริกซ์ คือ $e^A = I_3 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} A + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} A^2$

เมื่อ $\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ และ I_3 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 3

หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2001 Politi ได้ศึกษาการหาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ซึ่งพบว่าถ้า A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือน (กล่าวคือ

$A^T = -A$) อันดับ 4 นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ -a_6 & 0 & a_4 & a_2 \\ -a_5 & -a_4 & 0 & a_1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$

โดยที่ $A \neq \bar{0}$ และค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แตกต่างกันทั้งหมด แล้วจะสามารถหาสูตรของ e^A

โดยอาศัยสูตรของซิลเวสเตอร์ ซึ่งจะได้ว่า $e^A = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$ เมื่อ $a = \cos \alpha + c\alpha^2$,

$$b = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + d\alpha^2, \quad c = \frac{\cos \mu - \cos \alpha}{\alpha^2 - \mu^2} \quad \text{และ} \quad d =$$

$$\frac{\alpha \sin \mu - \mu \sin \alpha}{\alpha \mu (\alpha^2 - \mu^2)} \quad \text{เมื่อ } I_4 \text{ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ}$$

$$4, \quad \alpha = \sqrt{\frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} \quad \text{และ} \quad \mu = \sqrt{\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}}$$

$$\text{เมื่อ } b_0 = (a_1a_6 + a_3a_4 - a_2a_5)^2 \quad \text{และ} \quad b_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$$

สำหรับบทความวิจัยฉบับนี้ศึกษาการหาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือนในบางรูปแบบ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n จะเรียก A ว่าเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือน (semi skew-symmetric matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ สำหรับบางเมทริกซ์ ε เมื่อ ε เป็นเมทริกซ์เครื่องหมาย (กล่าวคือ ε เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น +1 หรือ -1 เท่านั้น ส่วนสมาชิกอื่นเป็น 0)

จะเห็นได้ว่าถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์

กึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 3 รูปแบบหนึ่ง (กล่าวคือ

$$A^T = -\varepsilon A \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \quad \text{แล้วสูตรของ}$$

$$\text{โรดริกซ์ คือ } e^A = I_3 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} A + \frac{(\cosh \alpha - 1)}{\alpha^2} A^2$$

เมื่อ $\alpha = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ และ I_3 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 3 ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 2005 Kula

และคณะ ได้ศึกษาการหาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง

$$e^A \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 0 & -a_6 & a_5 & a_3 \\ a_6 & 0 & a_4 & -a_2 \\ a_5 & a_4 & 0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ซึ่งเป็นเมทริกซ์}$$

กึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 รูปแบบหนึ่ง กล่าวคือ

$$A^T = -\varepsilon A \varepsilon \text{ เมื่อ } \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงศึกษาการหาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลังสำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 5 บางรูปแบบ

2. ผลงานวิจัย

$$\text{กำหนดให้ } A = \begin{bmatrix} 0 & a_{10} & -a_9 & a_7 & a_4 \\ -a_{10} & 0 & -a_8 & a_6 & a_3 \\ a_9 & a_8 & 0 & a_5 & -a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & 0 & -a_1 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 5

$$\text{กล่าวคือ } A^T = -\varepsilon A \varepsilon \text{ เมื่อ } \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $A \neq \bar{0}$

กำหนดให้พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A นิยามโดย $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ โดยการคำนวณโดยตรง ทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1 $p(\lambda) = -p(-\lambda)$

ในบทความวิจัยฉบับนี้ กำหนดให้ $b_1 = (a_1 a_{10} - a_3 a_7 + a_4 a_6)^2 + (a_2 a_6 - a_1 a_8 + a_3 a_5)^2 +$

$$(a_2 a_7 - a_1 a_9 + a_4 a_5)^2 - (a_2 a_{10} - a_3 a_9 + a_4 a_8)^2 - (a_5 a_{10} - a_7 a_8 + a_6 a_9)^2 \text{ และ } b_3 = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 + a_{10}^2 \quad (2.2)$$

บทตั้ง 2.2 พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

$$\text{คือ } p(\lambda) = -\lambda^5 - b_3 \lambda^3 - b_1 \lambda$$

จากบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า ถ้า $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^4 - b_3 \lambda^2 - b_1) = 0$ แล้ว λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\lambda = 0$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A และค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่เหลืออีก 4 ค่า นั่นคือ ผลเฉลยของสมการ $\lambda^4 - b_3 \lambda^2 - b_1 = 0$ ซึ่งจะอยู่ในรูปของ b_1 หรือ b_3 ดังนั้นในบทความวิจัยฉบับนี้จะกำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ และ λ_5 เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A และโดยอาศัยบทตั้ง 2.2 จึงทำให้ได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 2.3 กำหนดให้ $b_3^2 - 4b_1 > 0$ โดยที่ $b_3 \neq 0$

1. ในกรณีที่ $b_3 > 0$ จะได้ว่า

1.1 ถ้า $b_1 > 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i \sqrt{\frac{b_3 - \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}, \\ \lambda_3 &= i \sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}, \\ \lambda_4 &= -i \sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \text{ และ} \end{aligned}$$

$$\lambda_5 = 0$$

1.2 ถ้า $b_1 < 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}, \\ \lambda_2 &= -\sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}, \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \text{ และ}$$

$$\lambda_5 = 0$$

1.3 ถ้า $b_1 = 0$ แล้ว $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 =$

$$i\sqrt{b_3}, \lambda_4 = -i\sqrt{b_3} \text{ และ } \lambda_5 = 0$$

2. ในกรณีที่ $b_3 < 0$ จะได้ว่า

2.1 ถ้า $b_1 > 0$ แล้ว

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{-b_3 - \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{-b_3 - \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \text{ และ}$$

$$\lambda_5 = 0$$

2.2 ถ้า $b_1 < 0$ แล้ว

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}},$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \text{ และ}$$

$$\lambda_5 = 0$$

2.2 ถ้า $b_1 = 0$ แล้ว $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 =$

$$\sqrt{-b_3}, \lambda_4 = -\sqrt{-b_3} \text{ และ } \lambda_5 = 0$$

บทแทรก 2.4 กำหนดให้ $b_3^2 - 4b_1 < 0$ โดยที่

$$b_3 \neq 0 \text{ จะได้ว่า } \lambda_1 = \frac{w_1}{\sqrt{2}}, \lambda_2 = \frac{w_2}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = \frac{w_3}{\sqrt{2}},$$

$$\lambda_4 = \frac{w_4}{\sqrt{2}} \text{ และ } \lambda_5 = 0$$

$$\text{เมื่อ } w_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 - b_3}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 + b_3}}{2}},$$

$$w_2 = -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 - b_3}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 + b_3}}{2}}\right),$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 - b_3}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 + b_3}}{2}} \text{ และ}$$

$$w_4 = -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 - b_3}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{4b_1 + b_3}}{2}}\right)$$

บทแทรก 2.5 กำหนดให้ $b_3^2 - 4b_1 = 0$ โดยที่

$$b_3 \neq 0$$

$$1. \text{ ถ้า } b_3 > 0 \text{ แล้ว } \lambda_1 = \lambda_2 = i\sqrt{\frac{b_3}{2}}, \lambda_3 = \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{b_3}{2}}$$

$$\text{และ } \lambda_5 = 0$$

$$2. \text{ ถ้า } b_3 < 0 \text{ แล้ว } \lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\frac{-b_3}{2}}, \lambda_3 = \lambda_4 = -\sqrt{\frac{-b_3}{2}}$$

$$\text{และ } \lambda_5 = 0$$

บทแทรก 2.6 กำหนดให้ $b_3 = 0$

$$1. \text{ ถ้า } b_1 > 0 \text{ แล้ว } \lambda_1 = \sqrt[4]{b_1} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\lambda_2 = -\sqrt[4]{b_1} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \right), \lambda_3 = \sqrt[4]{b_1} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\lambda_4 = -\sqrt[4]{b_1} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \text{ และ } \lambda_5 = 0$$

2. ถ้า $b_1 < 0$ แล้ว $\lambda_1 = \sqrt[4]{-b_1}$, $\lambda_2 = -\sqrt[4]{-b_1}$,
 $\lambda_3 = i\sqrt[4]{-b_1}$, $\lambda_4 = -i\sqrt[4]{-b_1}$ และ $\lambda_5 = 0$

3. ถ้า $b_1 = 0$ แล้ว $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

การพิจารณาหาสูตรของ e^A เมื่อ A มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดนั้น สามารถใช้สูตรของซิลเวสเตอร์ โดยสูตรของซิลเวสเตอร์กล่าวไว้ว่า

$f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) A_i$ เมื่อ $f(A)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ของเมทริกซ์ A โดยที่ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ เป็นค่าเฉพาะของ A และ A_i คือ โปรเจกชันโอดิแวนต์

ของ A ที่กำหนดโดย $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (A - \lambda_j I)$

สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ดังนั้น ถ้า $f(A) = e^A$ และ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 5 ที่มีค่าเฉพาะต่างกันทั้งหมดแล้ว โดยสูตรของซิลเวสเตอร์จึงได้ว่า

$$e^A = \sum_{i=1}^5 e^{\lambda_i} A_i \quad (2.3)$$

เมื่อ A_i คือ โปรเจกชันโอดิแวนต์ของ A ที่กำหนด

โดย $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (A - \lambda_j I)$ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\text{จาก (2.3) จะได้ } e^A = e^{\lambda_1} A_1 + e^{\lambda_2} A_2 + e^{\lambda_3} A_3 + e^{\lambda_4} A_4 + e^{\lambda_5} A_5$$

$$\begin{aligned} &= e^{\lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_5} (A - \lambda_5 I) \right) \\ &+ e^{\lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_5} (A - \lambda_5 I) \right) \\ &+ e^{\lambda_3} \left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_5} (A - \lambda_5 I) \right) \\ &+ e^{\lambda_4} \left(\frac{1}{\lambda_4 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_4 - \lambda_5} (A - \lambda_5 I) \right) \\ &+ e^{\lambda_5} \left(\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I) \right) \left(\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I) \right) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า A_i อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 4 ของ A สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ซึ่งจะทำให้ e^A อยู่ในรูปของพหุนามดีกรี 4 ของ A เช่นกัน จาก (2.3) จะเห็นว่าการคำนวณ e^A นั้นต้องคำนวณสัมประสิทธิ์

A_1, A_2, A_3, A_4 และ A_5 ดังกล่าว ซึ่งจะคำนวณ e^A โดยสมมติให้ $e^A = dI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$ และ x_i เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_i สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (นั่นคือ $Ax_i = \lambda_i x_i$)

สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ว่า $e^A x_i = (aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4)x_i = \alpha x_i + b\lambda_i x_i + c\lambda_i^2 x_i + d\lambda_i^3 x_i + h\lambda_i^4 x_i$ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

เนื่องจาก $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_5 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

ดังนั้น สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ว่า $e^A x_i$

$$\begin{aligned} &= \left(I_5 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) x_i \\ &= \left(I_5 + \lambda_i + \frac{1}{2!} \lambda_i^2 + \frac{1}{3!} \lambda_i^3 + \dots \right) x_i \\ &= e^{\lambda_i} x_i \end{aligned}$$

จึงได้ว่า

$$e^{\lambda_i} x_i = e^A x_i = (a + b\lambda_i + c\lambda_i^2 + d\lambda_i^3 + h\lambda_i^4) x_i$$

สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\text{นั่นคือ } e^{\lambda_1} = a + b\lambda_1 + c\lambda_1^2 + d\lambda_1^3 + h\lambda_1^4 \quad (2.4)$$

$$e^{\lambda_2} = a + b\lambda_2 + c\lambda_2^2 + d\lambda_2^3 + h\lambda_2^4 \quad (2.5)$$

$$e^{\lambda_3} = a + b\lambda_3 + c\lambda_3^2 + d\lambda_3^3 + h\lambda_3^4 \quad (2.6)$$

$$e^{\lambda_4} = a + b\lambda_4 + c\lambda_4^2 + d\lambda_4^3 + h\lambda_4^4 \quad (2.7)$$

$$\text{และ } e^{\lambda_5} = a + b\lambda_5 + c\lambda_5^2 + d\lambda_5^3 + h\lambda_5^4 \quad (2.8)$$

จากการใช้สูตรของซิลเวสเตอร์นี้จะนำไปสู่การได้สูตร e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) และมีค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) และ $b_3^2 - 4b_1 > 0$ โดยที่ $b_3 > 0$ และ $b_1 > 0$ จ ะ ไ ต้ ว ่า

$$e^A = aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$$

$$\text{เมื่อ } a = 1, \quad b = \frac{\alpha^3 \sin \mu - \mu^3 \sin \alpha}{\alpha \mu (\alpha^2 - \mu^2)}$$

$$c = \frac{\mu^4 (\cos \alpha - 1) - \alpha^4 (\cos \mu - 1)}{\alpha^2 \mu^2 (\alpha^2 - \mu^2)},$$

$$d = \frac{\alpha \sin \mu - \mu \sin \alpha}{\alpha \mu (\alpha^2 - \mu^2)} \text{ และ}$$

$$h = \frac{\mu^2 (\cos \alpha - 1) - \alpha^2 (\cos \mu - 1)}{\alpha^2 \mu^2 (\alpha^2 - \mu^2)}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5,

$$\alpha = \sqrt{\frac{b_3 - \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \quad \text{และ} \quad \mu = \sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $b_3^2 - 4b_1 > 0$ โดยที่ $b_3 > 0$

และ $b_1 > 0$

โดยบทแทรก 2.3 จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A นั้นแตกต่างกันทั้งหมด

กำหนดให้ $\alpha = |\lambda_1|$ และ $\mu = |\lambda_2|$ จะได้ว่า

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad \lambda_3 = i\mu, \quad \lambda_4 = -i\mu \quad \text{และ}$$

$$\lambda_5 = 0$$

เมื่อแทน $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ และ λ_5 ลงในสมการ

(2.4), (2.5), (2.6), (2.7) และ (2.8) ตามลำดับ จะได้

$$\text{ว่า } e^{i\alpha} = a + ib\alpha - c\alpha^2 - id\alpha^3 + h\alpha^4$$

$$e^{-i\alpha} = a - ib\alpha - c\alpha^2 + id\alpha^3 + h\alpha^4$$

$$e^{i\mu} = a + ib\mu - c\mu^2 - id\mu^3 + h\mu^4$$

$$e^{-i\mu} = a - ib\mu - c\mu^2 + id\mu^3 + h\mu^4 \quad \text{และ}$$

$$e^0 = a = 1$$

โดยสูตรของออยเลอร์ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$,

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \text{และ} \quad a = 1 \quad \text{ทำให้ได้ว่า}$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = 1 + ib\alpha - c\alpha^2 - id\alpha^3 + h\alpha^4 \quad (2.9)$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = 1 - ib\alpha - c\alpha^2 + id\alpha^3 + h\alpha^4 \quad (2.10)$$

$$\cos \mu + i \sin \mu = 1 + ib\mu - c\mu^2 - id\mu^3 + h\mu^4 \quad (2.11)$$

$$\text{และ } \cos \mu - i \sin \mu = 1 - ib\mu - c\mu^2 + id\mu^3 + h\mu^4 \quad (2.12)$$

เมื่อนำ (2.9) บวกกับ (2.10) จะได้

$$\cos \alpha = 1 - c\alpha^2 + h\alpha^4 \quad (2.13)$$

เมื่อนำ (2.11) บวกกับ (2.12) จะได้

$$\cos \mu = 1 - c\mu^2 + h\mu^4 \quad (2.14)$$

นำ μ^2 คูณ (2.13) และ α^2 คูณ (2.14) จะได้ว่า

$$\mu^2 \cos \alpha = \mu^2 - c\mu^2 \alpha^2 + h\mu^2 \alpha^4 \quad (2.15)$$

$$\text{และ } \alpha^2 \cos \mu = \alpha^2 - c\alpha^2 \mu^2 + h\alpha^2 \mu^4 \quad (2.16)$$

เมื่อนำ (2.15) ลบกับ (2.16) จะได้

$$\mu^2 \cos \alpha - \alpha^2 \cos \mu = \mu^2 - \alpha^2 + h\mu^2 \alpha^4 - h\alpha^2 \mu^4$$

$$\text{ดังนั้น } h = \frac{\mu^2 (\cos \alpha - 1) - \alpha^2 (\cos \mu - 1)}{\mu^2 \alpha^2 (\alpha^2 - \mu^2)}$$

เมื่อนำ (2.9) ลบกับ (2.10) จะได้ $i \sin \alpha = ib\alpha - id\alpha^3$

นำ $-i$ มาคูณตลอดสมการ $i \sin \alpha = ib\alpha - id\alpha^3$

$$\text{จะได้ว่า } \sin \alpha = b\alpha - d\alpha^3 \quad (2.17)$$

เมื่อนำ (2.11) ลบกับ (2.12) จะได้ $i \sin \mu = ib\mu - id\mu^3$

นำ $-i$ คูณตลอดสมการ $i \sin \mu = ib\mu - id\mu^3$ จะได้สมการ

$$\sin \mu = b\mu - d\mu^3 \quad (2.18)$$

นำ μ คูณ (2.17) และ α คูณ (2.18) จะได้ว่า

$$\mu \sin \alpha = \mu b\alpha - d\mu \alpha^3 \quad (2.19)$$

$$\text{และ } \alpha \sin \mu = \alpha b\mu - d\alpha \mu^3 \quad (2.20)$$

เมื่อนำ (2.19) ลบกับ (2.20) จะได้

$$\mu \sin \alpha - \alpha \sin \mu = d\alpha \mu (\mu^2 - \alpha^2)$$

$$\text{ดังนั้น } d = \frac{\mu \sin \alpha - \alpha \sin \mu}{\alpha \mu (\mu^2 - \alpha^2)} = \frac{\alpha \sin \mu - \mu \sin \alpha}{\alpha \mu (\alpha^2 - \mu^2)}$$

$$\text{จาก (2.17) จะได้ } b = \frac{\sin \alpha + d\alpha^3}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3 \sin \mu - \mu^3 \sin \alpha}{\alpha \mu (\alpha^2 - \mu^2)} \quad \blacksquare$$

เมื่อคำนวณในทำนองเดียวกันกับการคำนวณที่แสดงในทฤษฎีบท 2.7 จะทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.8 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยาม

ดัง (2.1) และ $b_3^2 - 4b_1 > 0$ โดยที่ $b_3 < 0$ และ $b_1 > 0$ จะได้ว่า $e^A = aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$

$$\text{เมื่อ } a = 1, \quad b = \frac{\gamma_1^3 \sinh(\gamma_2) - \gamma_2^3 \sinh(\gamma_1)}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)},$$

$$c = \frac{\gamma_1^4 (\cosh(\gamma_2) - 1) - \gamma_2^4 (\cosh(\gamma_1) - 1)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)},$$

$$d = \frac{\gamma_2 \sinh(\gamma_1) - \gamma_1 \sinh(\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \quad \text{และ}$$

$$h = \frac{\gamma_2^2 (\cosh(\gamma_1) - 1) - \gamma_1^2 (\cosh(\gamma_2) - 1)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5,

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \quad \text{และ} \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{-b_3 - \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}$$

ทฤษฎีบท 2.9 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยาม

ดัง (2.1) และ $b_3^2 - 4b_1 > 0$ โดยที่ $b_3 \neq 0$ และ

$b_1 < 0$ จะได้ว่า $e^A = aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$

$$\text{เมื่อ } a = 1, \quad b = \frac{\beta_1^3 \sin(\beta_2) + \beta_2^3 \sinh(\beta_1)}{\beta_2 \beta_1 (\beta_1^2 + \beta_2^2)},$$

$$c = \frac{-\beta_1^4 (\cos(\beta_2) - 1) + \beta_2^4 (\cosh(\beta_1) - 1)}{\beta_1^2 \beta_2^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)},$$

$$d = \frac{\beta_2 \sinh(\beta_1) - \beta_1 \sin(\beta_2)}{\beta_2 \beta_1 (\beta_1^2 + \beta_2^2)} \quad \text{และ}$$

$$h = \frac{\beta_2^2 (\cosh(\beta_1) - 1) + \beta_1^2 (\cos(\beta_2) - 1)}{\beta_1^2 \beta_2^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5,

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}} \quad \text{และ} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1}}{2}}$$

ทฤษฎีบท 2.10 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยาม

ดัง (2.1) และ $b_3^2 - 4b_1 < 0$ โดยที่ $b_3 \neq 0$ จะได้

ว่า $e^A = aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$ เมื่อ $a=1$,

$$b = \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^3 \left[\sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - i \cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \right] \\ - \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^3 \left[\sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) + i \cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{bmatrix}}{\left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \left[\left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \right]},$$

$$c = \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^4 \left[\cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - i \sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right] \\ - \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^4 \left[\cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) + i \sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right] \end{bmatrix}}{\left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \left[\left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \right]},$$

$$d = \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \left[\sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) + i \cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \right] \\ - \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \left[\sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - i \cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{bmatrix}}{\left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right) \left[\left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \right]}$$

$$\text{และ } h = \frac{\left[\left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[\cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) + i \sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right] - \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[\cosh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - i \sinh\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) - 1 \right] \right]}{\left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[\left(\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5, $\eta_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{4b_1} - b_3}{2}}$ และ $\eta_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{4b_1} + b_3}{2}}$

ทฤษฎีบท 2.11 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) โดยที่ $b_3 = 0$ และ $b_1 > 0$ จะได้ว่า

$$e^A = aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4 \text{ เมื่อ } a = 1,$$

$$b = \frac{\sinh(\delta) \cos(\delta) ((\delta + i\delta)^3 - (\delta - i\delta)^3) - i \cosh(\delta) \sin(\delta) ((\delta + i\delta)^3 + (\delta - i\delta)^3)}{(\delta - i\delta)(\delta + i\delta)((\delta + i\delta)^2 - (\delta - i\delta)^2)},$$

$$c = \frac{(\delta + i\delta)^4 (\cosh(\delta) \cos(\delta) - i \sinh(\delta) \sin(\delta) - 1) - (\delta - i\delta)^4 (\cosh(\delta) \cos(\delta) + i \sinh(\delta) \sin(\delta) - 1)}{(\delta - i\delta)^2 (\delta + i\delta)^2 ((\delta + i\delta)^2 - (\delta - i\delta)^2)},$$

$$d = \frac{(\delta - i\delta)(\sinh(\delta) \cos(\delta) + i \cosh(\delta) \sin(\delta)) - (\delta + i\delta)(\sinh(\delta) \cos(\delta) - i \cosh(\delta) \sin(\delta))}{(\delta - i\delta)(\delta + i\delta)((\delta + i\delta)^2 - (\delta - i\delta)^2)} \text{ และ}$$

$$h = \frac{(\delta - i\delta)^2 (\cosh(\delta) \cos(\delta) + i \sinh(\delta) \sin(\delta) - 1) - (\delta + i\delta)^2 (\cosh(\delta) \cos(\delta) - i \sinh(\delta) \sin(\delta) - 1)}{(\delta - i\delta)^2 (\delta + i\delta)^2 ((\delta + i\delta)^2 - (\delta - i\delta)^2)}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5 และ $\delta = \sqrt[4]{b_1} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \right)$

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยาม

ดัง (2.1) โดยที่ $b_3 = 0$ และ $b_1 < 0$

จะได้ว่า $e^A = aI_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$

$$\text{เมื่อ } a = 1, b = \frac{\sinh(\rho) + \sin(\rho)}{2\rho},$$

$$c = \frac{\cosh(\rho) - \cos(\rho)}{2\rho^2}, d = \frac{\sinh(\rho) - \sin(\rho)}{2\rho^3}$$

$$\text{และ } h = \frac{\cosh(\rho) + \cos(\rho) - 2}{2\rho^4}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5 และ

$$\rho = \sqrt[4]{-b_1}$$

สำหรับการหาสูตรของ e^A เมื่อ A มีค่าเฉพาะที่เหมือนกันบางค่า นั้นสามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) และ $b_1 = b_3 = 0$

$$\text{จะได้ว่า } e^A = I_5 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!}$$

โดยที่ I_5 คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $b_1 = b_3 = 0$

โดยบทแทรก 2.6 จะได้ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A เป็นศูนย์ทั้งหมด จึงได้ว่าพหุนามลักษณะเฉพาะ

ของ A คือ $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5$ โดยทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน จะได้ว่า A สอดคล้องกับสมการ

ลักษณะเฉพาะของ A นั่นคือ $p(A) = (A - \lambda_1 I_5)^5 = \bar{0}$

เมื่อ $\bar{0}$ คือ เมทริกซ์ศูนย์อันดับ 5 จึงได้ว่า

$(A - \lambda_1 I_5)^k = \bar{0}$ สำหรับทุก $k \geq 5$ เนื่องจาก

$\lambda_1 = 0$ ดังนั้น $A^k = \bar{0}$ สำหรับทุก $k \geq 5$ ดังนั้น

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = I_5 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} \quad \blacksquare$$

3. รายการอ้างอิง

Celledoni, E. and Iserles, A., 1998, Approximating the Exponential from a Lie Algebra to a Lie Group, Technical Report DAMTP 1998/NA03 Numerical Analysis, Cambridge University, Cambridge.

Celledoni, E. and Iserles, A., 1998, Methods for the Approximation of the Matrix Exponential in Lie-algebraic Setting, Technical Report DAMTP 1999/NA03 Numerical Analysis, Cambridge University, Cambridge.

Kula, L., Karacan, M.K. and Yayli, Y., 2005, Formulas for the exponential of a semi skew-symmetric matrix of order 4, Math. Comput. Appl. 10: 99-104.

Moler, C. and van Loan, C., 1978, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM Rev. 20: 801-836.

Murray, R.M., Li, Z.X. and Sastry, S.S., 1994, A Mathematical Introduction to Robotics Manipulation, CRC Press, London.

Politi, T., 2001, A formula for the exponential of a real skew-symmetric matrix of order 4, BIT. 41: 842-845.