

ผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^2 = z^4$

เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ

All Solutions of the Diophantine Equation $p^x + q^2 = z^4$

Where p and q are Prime Numbers

ศิริจันทร์ เวสารัชชาต*, กวินนา สาครไทย,

ณัฐริดา ภูมิพงษ์ และ วิภากรมล เหลืองทรัพย์ทวี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Sirichan Vesarachasart*, Kawinna Sakornthai,

Nattida Phumiphong, and Wipakamon Lueangsubthawee

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,

Rangsit Centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

Received: September 8, 2019; Accepted: September 16, 2019

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่ามีผลเฉลย (x, z, p, q) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^2 = z^4$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 2, 7, 3)$ และ $(5, 3, 2, 7)$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์; ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

Abstract

This research shows that there are only two non-negative integer solutions (x, z, p, q) of the Diophantine equation $p^x + q^2 = z^4$ where p and q are prime numbers, those are $(1, 2, 7, 3)$ and $(5, 3, 2, 7)$.

Keywords: Diophantine equation; non-negative integer solution

1. คำนำ

การศึกษาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์มีผู้ให้ความสนใจศึกษากันอย่างกว้างขวาง และมี

การศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในหลากหลายรูปแบบ แต่โดยส่วนใหญ่มักศึกษาสมการไม่เชิงเส้นที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเฉพาะ โดยการหาผลเฉลยที่

เป็นไปได้ของสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็ม และ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ เช่น ในปี ค.ศ. 2012 Sroysang ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ โดยพบว่า $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการนี้ ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 Sroysang ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์อื่นเพิ่มเติม คือ สมการ $7^x + 19^y = z^2$ และ $7^x + 91^y = z^2$ ซึ่งพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ทั้ง 2 สมการข้างต้นไม่มีผลเฉลย ในปี ค.ศ. 2016 Rabago ได้หาผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ และได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการมีอยู่ 5 ผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (3, 1, 5), (5, 1, 7), (6, 1, 9), (7, 3, 71)$ และ $(9, 1, 23)$ และในปี ค.ศ. 2017 Burshtein ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^4$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งงานวิจัยของ Burshtein ศึกษาสมการนี้เฉพาะกรณี $y=1$ และพบว่าถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการข้างต้นมีเพียงสองผลเฉลย ได้แก่ $(p, q, x, z) = (2, 17, 6, 3)$ และ $(3, 7, 2, 2)$ ส่วนกรณี x เป็นจำนวนเต็มคี่ พบว่ามีผลเฉลยจำนวนมากมายที่สอดคล้องกับสมการไดโอแฟนไทน์นี้

งานวิจัยนี้สนใจสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^4$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ โดยพิจารณากรณี $y=2$ เราได้แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ กรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ x เป็นจำนวนเต็มคี่ ซึ่งพบว่าถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว ผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^4$ มีเพียงแค่ 2 ผลเฉลยเท่านั้น ส่วนกรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่ ไม่มีผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการนี้

2. ผลการศึกษา

ให้ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ พิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^x + q^y = z^4 \quad (1)$$

จากการศึกษาเราพบผลเฉลยที่สอดคล้องกับ (1) เพียงแค่ 2 ผลเฉลย โดยในการหาผลเฉลยได้แบ่งการพิจารณาดังนี้ กรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่ พบว่า (1) ไม่มีผลเฉลยซึ่งได้พิสูจน์ไว้ในทฤษฎีบท 2.1 และ 2.2 ส่วนกรณี x เป็นจำนวนเต็มคี่ ได้แสดงการหาผลเฉลยของ (1) ไว้ในทฤษฎีบท 2.3

ทฤษฎีบท 2.1 สมการไดโอแฟนไทน์ $1 + q^2 = z^4$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่มีผลเฉลย (z, q) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเฉพาะ q และจำนวนเต็ม z ที่ไม่ใช่จำนวนเต็มลบที่ทำให้ $1 + q^2 = z^4$ จะได้ $q^2 = z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$ จึงทำให้ $z^2 - 1 = 1$ และ $z^2 + 1 = q^2$ แต่จาก $z^2 - 1 = 1$ ทำให้ $z^2 = 2$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ต่อไปพิจารณา (1) เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่งได้ผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2 สำหรับจำนวนเต็มคู่ x ที่ $x \neq 0$ สมการไดโอแฟนไทน์ (1) ไม่มีผลเฉลย (x, z, p, q) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบ

พิสูจน์ สมมติ x เป็นจำนวนเต็มคู่ที่ $x \neq 0$ สมมติว่า มีจำนวนเต็ม z ที่ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ และจำนวนเฉพาะ p, q ที่ทำให้ (1) เป็นจริง เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็มคู่ที่มากกว่าศูนย์ จึงได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก n ที่ $x = 2n$ เมื่อแทนลงใน (1) จะได้

$$p^{2n} + q^2 = z^4 \quad (2)$$

จาก (2) เราได้ว่า $q^2 = z^4 - p^{2n} = (z^2 - p^n)(z^2 + p^n)$ แต่เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ $z^2 - p^n = 1$ และ $z^2 + p^n = q^2$ แต่จาก $z^2 - p^n = 1$

ทำให้ $p^n = (z-1)(z+1)$ จึงได้ว่ามีจำนวนเต็ม $c \geq 0$ ที่ $n > 2c$ ซึ่งทำให้ $p^{n-c} = z+1$ และ $p^c = z-1$ ดังนั้น $p^c(p^{n-2c}-1) = 2$

ถ้า $p^c = 2$ และ $p^{n-2c}-1=1$ แล้วเราจะได้ $p=2, c=1$ และ $n=3$ ซึ่งทำให้ได้ $x=6, z=3$ เมื่อแทนลงใน (1) จะได้ $q^2 = 17$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า $p^c = 1$ และ $p^{n-2c}-1=2$ แล้วจะได้ $c=0$ และ $p^n = 3$ จึงได้ว่า $p=3, n=1$ และ $x=2$ จาก $p^c = z-1$ ทำให้ได้ $z=2$ เมื่อแทนลงใน (1) จะได้ $q^2 = 7$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งเช่นกัน

ต่อมาพิจารณากรณีที่ x เป็นจำนวนเต็มคี่ เราพบผลเฉลยเพียง 2 ผลเฉลยเท่านั้นที่สอดคล้องกับ (1) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 สำหรับจำนวนเต็มคี่ x สมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลย (x, z, p, q) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 2, 7, 3)$ และ $(5, 3, 2, 7)$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ สมมติว่ามีจำนวนเต็ม z ที่ไม่ใช่จำนวนลบ และจำนวนเฉพาะ p, q ที่ทำให้ (1) เป็นจริง แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ถ้า $x=1$ แล้วจาก (1) จะได้ $p = z^4 - q^2 = (z^2 - q)(z^2 + q)$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z^2 - q < z^2 + q$ จึงได้ว่า $z^2 - q = 1$ และ $z^2 + q = p$ จาก $z^2 - q = 1$ ทำให้ได้ $q = (z-1)(z+1)$ เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z-1 < z+1$ จึงได้ $z+1 = q$ และ $z-1 = 1$ ทำให้ได้ $z = 2, q = 3$ เมื่อแทนลงใน $z^2 + q = p$ ได้ $p = 7$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) คือ $(x, z, p, q) = (1, 2, 7, 3)$

กรณี 2 ถ้า $x > 1$ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $x = 2n+1$ จาก (1) จะได้

$$p^{2n+1} + q^2 = z^4 \quad (3)$$

จาก (3) ได้ $p^{2n+1} = z^4 - q^2 = (z^2 - q)(z^2 + q)$ จึงได้ว่ามีจำนวนเต็ม $c \geq 0$ ที่ $2n+1 > 2c$ ซึ่งทำให้ $z^2 - q = p^c$ และ $z^2 + q = p^{2n+1-c}$ ดังนั้นจึงได้ $p^c(p^{2n+1-2c}-1) = 2q$ แบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณีย่อย ดังนี้

กรณี 2.1 ถ้า $p^c = 1$ และ $p^{2n+1-2c}-1 = 2q$ แล้วจะได้ $c=0$ เนื่องจาก $z^2 - q = p^c$ ทำให้ $q = (z-1)(z+1)$ จาก q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $z-1 < z+1$ จึงได้ $z-1 = 1$ และ $z+1 = q$ ทำให้ได้ $z = 2, q = 3$ เมื่อแทนลงใน $p^{2n+1-2c}-1 = 2q$ จะได้ $p^{2n+1} = 7$ ดังนั้น $p = 7, n = 0$ แต่จาก $n = 0$ ทำให้ $x = 1$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2.2 ถ้า $p^c = 2$ และ $p^{2n+1-2c}-1 = q$ แล้วจะได้ $p = 2, c = 1$ จาก $p^{2n+1-2c}-1 = q$ จึงได้ว่า $2^{2n-1}-1 = q$ เนื่องจาก $z^2 - q = p^c$ จะได้ $q = z^2 - 2$ เราจึงได้ $2^{2n-1} = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ ดังนั้นมีจำนวนเต็ม $m \geq 0$ ที่ $2n-1 > m$ ซึ่งทำให้ $z-1 = 2^m$ และ $z+1 = 2^{2n-1-m}$ และเราได้อีกว่า $2^m(2^{2n-1-2m}-1) = 2$ ถ้า $2^m = 2$ แล้ว $m = 1, z = 3$ จาก $z+1 = 2^{2n-1-m}$ จะได้ $n = 2$ ทำให้ได้ $x = 5$ จาก $q = z^2 - 2$ ได้ $q = 7$ เราจึงได้ว่า ผลเฉลยของ (1) สำหรับกรณีนี้ คือ $(x, z, p, q) = (5, 3, 2, 7)$

กรณี 2.3 ถ้า $p^c = q$ และ $p^{2n+1-2c}-1 = 2$ แล้วจะได้ $c = 1$ และ $p^{2n-1}-1 = 2$ เราจึงได้ $p = 3 = q$ และ $n = 1$

จึงทำให้ $x=3$ เมื่อแทนลง (1) จะได้ $z^4=36$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 2.4 ถ้า $p^c = 2q$ และ $p^{2n+1-2c} - 1 = 1$ แล้วจะทำให้เกิดข้อขัดแย้งเนื่องจาก $2q$ เป็นจำนวนเต็มคู่

จากทั้ง 4 กรณีย่อย เราพบว่า (1) มีเพียง 2 ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, z, p, q) = (1, 2, 7, 3)$ และ $(5, 3, 2, 7)$

บทแทรก 2.4 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^z = w^2$ คือ $(x, w, p, q) = (1, 4, 7, 3)$ และ $(5, 9, 2, 7)$ เท่านั้น

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 2.3 โดยให้ $w = z^2$

บทแทรก 2.5 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 49 = z^2$ คือ $(x, z) = (5, 9)$

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 2.3

บทแทรก 2.6 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 49 = z^4$ คือ $(x, z) = (5, 3)$

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 2.3

บทแทรก 2.7 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 9 = z^2$ คือ $(x, z) = (1, 4)$

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 2.3

บทแทรก 2.8 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 9 = z^4$ คือ $(x, z) = (1, 2)$

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 2.3

3. สรุปผลการศึกษา

ผลจากการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ (1) พบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนลบซึ่งสอดคล้องกับสมการนี้จะมีเฉพาะกรณี x เป็นจำนวนเต็มคี่ และมีเพียง 2 ผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, z, p, q) = (1, 2, 7, 3)$ และ $(5, 3, 2, 7)$

4. รายการอ้างอิง

- Burshtein, N., 2017, On solutions of the Diophantine equation $p^x + q^y = z^4$, Ann. Pure Appl. Math. 13: 143-149.
- Rabago, J.F.T., 2016, On the Diophantine equation $2^x + 17^y = z^2$, J. Indones. Math. Soc. 22(2): 85-88.
- Sroysang, B., 2012, On the Diophantine equation $3^x + 5^y = z^2$, Int. J. Pure Appl. Math. 81: 605-608.
- Sroysang, B., 2014, On two Diophantine equations $7^x + 19^y = z^2$ and $7^x + 91^y = z^2$, Int. J. Pure Appl. Math. 92: 113-116.