

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ อันดับสี่โดยใช้การแปลงซุมดู The general solutions of fourth order Cauchy-Euler equations using Sumudu transform

ธวิกานต์ ตริยะประเสริฐ*, กุลณัฐ ธนผาติกุล, กิตติพงษ์ ผลทวี, เวธกา เพิ่มพูนพรสิน
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Tawikan Treeyaprasert*, Kullanat Thanaphatikun, Kittipong Poltawee and
Vetaga Permpoonpornsin

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

Received: March 28, 2024 ; Revisions: June 17, 2024 ; Accepted: June 20, 2024

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เสนอวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = r(t)$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง และ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยใช้การแปลงซุมดู

คำสำคัญ : สมการโคชี – ออยเลอร์; สมการโคชี – ออยเลอร์ อันดับสี่; การแปลงซุมดู; ผลเฉลยทั่วไป

Abstract

Using the Sumudu transform technique, we investigate the general solution of the fourth order nonhomogeneous Cauchy-Euler equation

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = r(t),$$

where a, b, c, d are real numbers and $r(t)$ is a polynomial function.

Keywords: Cauchy-Euler equations; Fourth order Cauchy-Euler equations; Sumudu transform; General solution

1. บทนำ

ในปัจจุบันปัญหาประยุกต์ทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์หลายปัญหามีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเข้ามาเกี่ยวข้อง สมการโคชี – ออยเลอร์ เป็นรูปแบบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัว

แปร ซึ่งมีนักวิจัยหลายท่านนำเสนอวิธีการที่แตกต่างกันในการหาผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความวิจัยที่อ้างอิงในหัวข้อที่ 6

ในปี ค.ศ. 2015 Ghil และ Kim ได้เสนอวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์อันดับสองและอันดับสามโดยใช้การแปลงลาปลาซ ซึ่งการศึกษาผลงานวิจัยดังกล่าว ทำให้เรามีแรงบันดาลใจในการนำการแปลงซุมดู (Sumudu Transform) มาใช้สร้างสูตรในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = r(t) \text{ เมื่อ } a, b, c, d \text{ เป็นจำนวนจริง และ } r(t) \text{ เป็นฟังก์ชันพหุนาม}$$

เนื้อหาในบทความในแต่ละหัวข้อประกอบไปด้วย บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่จำเป็นในการนำการแปลงซุมดูมาช่วยหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ ซึ่งจะกล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2 ส่วนหัวข้อที่ 3 จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธ์อันดับสี่โดยใช้การแปลงซุมดู โดยเราจะนำการแปลงซุมดูมาสร้างทฤษฎีบทที่ช่วยในการหาผลเฉลยทั่วไปซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธ์อันดับสี่ พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างประกอบให้เห็นว่าทฤษฎีบทของเราสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยทั่วไปได้จริง ในหัวข้อ 4 จะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเฉพาะของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่ในกรณีที่ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างประกอบ และหัวข้อ 5 เป็นส่วนสรุปผลงานวิจัย

2. วิธีการ

หัวข้อนี้กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานสำคัญที่ควรทราบเพื่อนำไปใช้ในหาผลลัพธ์หลักในหัวข้อถัดไป

บทนิยาม 2.1 (Belgacem & Karaballi (2005)) ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับชี้กำลัง α การแปลงซุมดูของฟังก์ชัน $f(t)$ เขียนแทนด้วย $S\{f(t)\}$ หรือ $F(u)$ นิยามโดย

$$S\{f(t)\} = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-t/u} f(t) dt$$

สำหรับทุกจำนวนจริง u ที่ทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่อู่เข้า

บทนิยาม 2.2 (Belgacem & Karaballi (2005)) ผลการแปลงซุมดูผกผันของฟังก์ชัน $F(u)$ คือฟังก์ชัน $f(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงเพียงฟังก์ชันเดียวที่ทำให้ $S\{f(t)\} = F(u)$ เขียนแทนการแปลงซุมดูผกผันของฟังก์ชัน $F(u)$ ด้วย $S^{-1}\{F(u)\} = f(t)$

ทฤษฎีบท 2.3 (Belgacem & Karaballi (2005)) (สมบัติเชิงเส้นของการแปลงซุมดู)

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาผลการแปลงซุมดูได้บนโดเมนเดียวกัน จะได้ว่า

$$S\{f \pm g\} = S\{f\} \pm S\{g\}$$

$$S\{cf\} = cS\{f\}$$

เมื่อ c คือ ค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 2.4 (Belgacem & Karaballi (2005)) (สมบัติเชิงเส้นของการแปลงซุมดูผกผัน)

กำหนดให้ ให้ $S^{-1}\{F(u)\} = f(t)$ และ $S^{-1}\{G(u)\} = g(t)$ จะได้ว่า

$$S^{-1}\{F(u) \pm G(u)\} = S^{-1}\{F(u)\} \pm S^{-1}\{G(u)\} = f(t) \pm g(t)$$

$$S^{-1}\{cF(u)\} = c S^{-1}\{F(u)\} = cf(t)$$

เมื่อ c คือค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 2.5 (Belgacem & Karaballi (2005)) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, \infty)$ ซึ่งมีอันดับชี้กำลัง α และ $S\{f(t)\} = F(u)$ แล้วจะได้ว่า

$$S\{t^n f^{(n)}(t)\} = u^n F^{(n)}(u)$$

โดยที่ $u \geq \alpha$

3. ผลการวิจัยและวิจารณ์

ผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธ์อันดับสี่โดยใช้การแปลงซุมดู

กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธ์อันดับสี่ที่อยู่ในรูป

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = 0 \quad (3.1)$$

โดยใช้การแปลงซุมดูเราจะได้ทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยทั่วไปของ (3.1) ได้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $S\{y(t)\} = Y(u)$ ผลเฉลยของ (3.1) คือ $y = S^{-1}\{Y(u)\} = S^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ

m สอดคล้องกับสมการ

$$m^4 + (a-6)m^3 + (b-3a+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d = 0 \quad (3.2)$$

พิสูจน์ ทำการแปลงซุมดูทั้งสองข้างของ (3.1) และใช้สมบัติเชิงเส้นของการแปลงซุมดู จะได้

$$S\{t^4 y^{(4)}\} + a S\{t^3 y'''\} + b S\{t^2 y''\} + c S\{ty'\} + d S\{y\} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 2.5 ทำให้ได้ว่า

$$u^4 \frac{d^4 Y}{du^4} + au^3 \frac{d^3 Y}{du^3} + bu^2 \frac{d^2 Y}{du^2} + cu \frac{dY}{du} + dY = 0 \quad (3.3)$$

ให้ $Y = u^m \neq 0$ เป็นผลเฉลยทดสอบของสมการ (3.3) และแทนผลเฉลยทดสอบนี้ลงใน (3.3) จะได้

$$u^m [m^4 + (a-6)m^3 + (b-3a+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d] = 0 \quad (3.4)$$

หารตลอดด้วย u^m ทั้งสองข้างของ (3.4) ทำให้ได้

$$m^4 + (a-6)m^3 + (b-3a+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d = 0$$

ซึ่งคือสมการ (3.2) ดังนั้นถ้า $Y = u^m$ เป็นผลเฉลยของ (3.3) แล้ว $y = S^{-1}\{Y(u)\} = S^{-1}\{u^m\}$ เป็นผลเฉลยของสมการโคชี – ออยเลอร์ (3.1) เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ (3.2) จากนั้นเราจะเรียก (3.2) ว่าสมการช่วย

หมายเหตุ 3.1: เราไม่เลือก $Y = e^{mu}$ เมื่อ $u \neq 0$ เป็นผลเฉลยทดสอบของสมการ (3.3) เนื่องจาก $Y = e^{mu}$ เป็นผลเฉลยทดสอบที่ไม่เหมาะสม เราจะแสดงให้เห็นว่า $Y = e^{mu}$ เป็นผลเฉลยทดสอบที่ไม่เหมาะสมของ (3.3) โดยสมมติให้ $Y = e^{mu}$ เป็นผลเฉลยทดสอบของ (3.3) และแทนผลเฉลยทดสอบนี้ลงใน (3.3) จะทำให้ได้สมการ (3.5)

$$u^4 m^4 e^{mu} + au^3 m^3 e^{mu} + bu^2 m^2 e^{mu} + cume^{mu} + de^{mu} = 0 \quad (3.5)$$

หารด้วย $u^4 e^{mu}$ ทั้งสองข้างของ (3.5) จะได้

$$m^4 + \frac{am^3}{u} + \frac{bm^2}{u^2} + \frac{cm}{u^3} + \frac{d}{u^4} = 0 \quad (3.6)$$

จะเห็นว่าหากใช้ผลเฉลยทดสอบ $Y = e^{mu}$ จะทำได้ (3.6) ซึ่งเป็นสมการที่ไม่สามารถหาราก (m) ของสมการได้ เนื่องจากตัวแปร m จะขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ u นอกจากนี้ตารางการแปลงชูดูไม่มีผลการแปลงชูดูผกผันของ e^{mu} ดังนั้นฟังก์ชัน $Y = e^{mu}$ ไม่เหมาะที่จะนำมาใช้เป็นผลเฉลยทดสอบของสมการ (3.3)

หมายเหตุ 3.2: ถ้า $m = m_1, m_2, m_3, m_4$ เป็นรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของของสมการช่วย (3.2) แล้วเราจะได้จาก ทฤษฎีบท 3.1 ว่า

$$y_1 = S^{-1}\{u^{m_1}\}, y_2 = S^{-1}\{u^{m_2}\}, y_3 = S^{-1}\{u^{m_3}\}, y_4 = S^{-1}\{u^{m_4}\}$$

เป็นผลเฉลยของ (3.1) ซึ่งผลเฉลยทั้งสี่เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี - ออยเลอร์ (3.1) คือ

$$y(t) = c_1 S^{-1}\{u^{m_1}\} + c_2 S^{-1}\{u^{m_2}\} + c_3 S^{-1}\{u^{m_3}\} + c_4 S^{-1}\{u^{m_4}\}$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3, c_4 เป็นค่าคงตัว

หมายเหตุ 3.3: ในกรณีที่สมการช่วย (3.2) มี m เป็นรากกำลังซ้ำ k (เมื่อ k มีค่าเป็น 2, 3 หรือ 4) จะสามารถแสดงได้ว่าฟังก์ชัน

$$S^{-1}\{u^m\}, S^{-1}\{u^m\} \ln t, S^{-1}\{u^m\} \ln^2 t, \dots, S^{-1}\{u^m\} \ln^k t$$

เป็นผลเฉลยของ (3.1) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ในที่นี้จะแสดงวิธีการพิสูจน์ในกรณีที่ $k = 3$ (กรณีอื่น ๆ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

สมมติว่ารากทั้งสี่ของสมการช่วย (3.2) คือ $m = m_1, m_2, m_3, m_4$ โดยที่ $m_1 \neq m_2$ แต่ $m_2 = m_3 = m_4$

กำหนดให้ $w = \ln t$ ดังนั้น $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{t}$ และโดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2 y}{dw^2} - \frac{dy}{dw} \right)$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{1}{t^3} \left(\frac{d^3 y}{dw^3} - 3 \frac{d^2 y}{dw^2} + 2 \frac{dy}{dw} \right)$$

$$\frac{d^4 y}{dt^4} = \frac{dy}{dt} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right) = \frac{1}{t^4} \left(\frac{d^4 y}{dw^4} - 6 \frac{d^3 y}{dw^3} + 11 \frac{d^2 y}{dw^2} - 6 \frac{dy}{dw} \right)$$

แทนลงใน (3.1) จะได้

$$\frac{d^4 y}{dw^4} + (a-6) \frac{d^3 y}{dw^3} + (-3a+b+11) \frac{d^2 y}{dw^2} + (2a-b+c-6) \frac{dy}{dw} + dy = 0 \quad (3.7)$$

ให้ L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นของ (3.7) เมื่อ

$$L = D^4 + (a-6)D^3 + (-3a+b+11)D^2 + (2a-b+c-6)D + d$$

$$= \frac{d^4}{dx^4} + (a-6)\frac{d^3}{dx^3} + (-3a+b+11)\frac{d^2}{dx^2} + (2a-b+c-6)\frac{d}{dx} + d$$

แล้วจะได้ว่า $Ly = 0$ ดังนั้นในกรณีที่ $m = m_1, m_2, m_3, m_4$ เมื่อ $m_1 \neq m_2$ แต่ $m_2 = m_3 = m_4$ จึงได้ว่า

$$L = (D-m_1)(D-m_2)^3 \text{ และ } Ly = (D-m_1)(D-m_2)^3 y = 0 \text{ ส่งผลให้ผลเฉลยที่สอดคล้องกับ}$$

$$m = m_2 \text{ ต้องสอดคล้องกับสมการ } (D-m_2)^3 y = 0 \text{ ให้ } y = v(w)e^{m_2 w} \text{ ดังนั้น } (D-m_2)^3 v(w)e^{m_2 w} = 0$$

$$\text{พิจารณา } (D-m_2)ve^{m_2 w} = vm_2 e^{m_2 w} + (Dv)e^{m_2 w} - vm_2 e^{m_2 w} = (Dv)e^{m_2 w} \text{ ดังนั้น}$$

$$(D-m_2)^3 ve^{m_2 w} = (D^3 v)e^{m_2 w} = 0 \text{ เนื่องจาก } e^{m_2 w} \neq 0 \text{ จะได้ } D^3 v = v''' = 0 \text{ ดังนั้น } v(w) = c_2 + c_3 w + c_4 w^2$$

โดยที่ c_2, c_3, c_4 เป็นค่าคงตัว ส่งผลให้ได้ผลเฉลยทั่วไปของ (3.7) เป็น

$$y(w) = c_1 e^{m_1 w} + (c_2 + c_3 w + c_4 w^2) e^{m_2 w}$$

นั่นคือ $y_1 = e^{m_1 w}, y_2 = e^{m_2 w}, y_3 = e^{m_2 w} w, y_4 = e^{m_2 w} w^2$ เนื่องจาก $w = \ln t$ จึงได้ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิง

เส้นของ (3.1) คือ $y_1 = t^{m_1}, y_2 = t^{m_2}, y_3 = t^{m_2} \ln t, y_4 = t^{m_2} (\ln t)^2$ หรือ

$$y_1 = S^{-1}\{u^{m_1}\}, y_2 = S^{-1}\{u^{m_2}\}, y_3 = S^{-1}\{u^{m_2}\} \ln t, y_4 = S^{-1}\{u^{m_2}\} (\ln t)^2$$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาสมการโคชี - ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} - 18t^3 y''' + 111t^2 y'' - 231ty' = 0 \quad (3.8)$$

จะเห็นว่า $a = -18, b = 111, c = -231, d = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าผลเฉลยของสมการโคชี - ออยเลอร์ คือ $y = S^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ

$$m(m-4)(m-8)(m-12) = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $m = 0, 4, 8, 12$ ดังนั้น

$$y_1 = S^{-1}\{u^0\} = 1, \quad y_2 = S^{-1}\{u^4\} = \frac{t^4}{4!}$$

$$y_3 = S^{-1}\{u^8\} = \frac{t^8}{8!}, \quad y_4 = S^{-1}\{u^{12}\} = \frac{t^{12}}{12!}$$

เป็นผลเฉลยของสมการโคชี - ออยเลอร์ (4.1) เนื่องจาก y_1, y_2, y_3, y_4 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ (3.8)

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.8) คือ

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t) = c_1 + c_2^* t^4 + c_3^* t^8 + c_4^* t^{12}$$

$$\text{เมื่อ } c_2^* = \frac{1}{4!} c_2, c_3^* = \frac{1}{8!} c_3, c_4^* = \frac{1}{12!} c_4$$

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาสมการโคชี - ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} + (1-2\sqrt{5})t^3 y''' + (4\sqrt{5}-3)t^2 y'' + (8\sqrt{5}-24)ty' = 0 \quad (3.9)$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3.8) คือ $y = S^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ

$$m(m-5)(m-\sqrt{5})(m-\sqrt{5}) = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $m = 0, 5, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ ดังนั้น

$$y_1 = S^{-1}\{u^0\} = 1, y_2 = S^{-1}\{u^5\} = \frac{t^5}{5!}, y_3 = S^{-1}\{u^{\sqrt{5}}\} = \frac{t^{\sqrt{5}}}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}$$

โดยหมายเหตุ 3.3 จะได้ว่า $y_4 = S^{-1}\{u^{\sqrt{5}}\} \ln t = \frac{t^{\sqrt{5}} \ln t}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}$

เนื่องจาก y_1, y_2, y_3, y_4 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (3.9) จึงได้ว่า

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t) = c_1 + c_2^* t^5 + c_3^* t^{\sqrt{5}} + c_4^* t^{\sqrt{5}} \ln t$$

เมื่อ $c_2^* = \frac{c_2}{5!}, c_3^* = \frac{c_3}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}, c_4^* = \frac{c_4}{\Gamma(\sqrt{5}+1)}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี - ออยเลอร์ (3.9)

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาสมการโคชี - ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} + 6t^3 y''' + 10t^2 y'' + 4ty' = 0 \quad (3.10)$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าผลเฉลยของสมการโคชี - ออยเลอร์ (3.10) คือ $y = S^{-1}\{u^m\}$ เมื่อ m สอดคล้องกับสมการ $m^2(m^2 + 3) = 0$ ซึ่ง $m = 0, 0, \pm\sqrt{3}i$ ดังนั้น

$$y_1 = S^{-1}\{u^0\} = S^{-1}\{1\} = 1$$

โดยหมายเหตุ 3.3 ได้ว่า

$$y_2 = y_1 \ln t = \ln t$$

$$y_3 = S^{-1}\{u^{\sqrt{3}i}\}$$

$$y_4 = S^{-1}\{u^{-\sqrt{3}i}\}$$

เนื่องจาก $S\left\{\frac{t^{\sqrt{3}i}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)}\right\} = \left(\frac{1}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)}\right) \left(\frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-t/u} t^{\sqrt{3}i} dt\right) = u^{\sqrt{3}i}$ จึงได้ว่า $S^{-1}\{u^{\sqrt{3}i}\} = \frac{t^{\sqrt{3}i}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)}$

ดังนั้น $y_3 = S^{-1}\{u^{\sqrt{3}i}\} = \frac{t^{\sqrt{3}i}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)} = \frac{e^{\sqrt{3}i \ln t}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)} = \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t) + i \sin(\sqrt{3} \ln t)}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)}$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $S^{-1}\{u^{-\sqrt{3}i}\} = \frac{t^{-\sqrt{3}i}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)}$ และ

$$y_4 = S^{-1}\{u^{-\sqrt{3}i}\} = \frac{t^{-\sqrt{3}i}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)} = \frac{e^{-\sqrt{3}i \ln t}}{\Gamma(1+\sqrt{3}i)} = \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t) - i \sin(\sqrt{3} \ln t)}{\Gamma(1-\sqrt{3}i)}$$

เนื่องจาก y_1, y_2, y_3, y_4 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ (3.10) ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ (3.10) คือ

$$y(t) = c_1 + c_2 \ln t + c_3^* \cos(\sqrt{3} \ln t) + c_4^* \sin(\sqrt{3} \ln t)$$

เมื่อ $c_3^* = \frac{c_3 \Gamma(1-\sqrt{3}i) + c_4 \Gamma(1+\sqrt{3}i)}{\Gamma(1-\sqrt{3}i) \Gamma(1+\sqrt{3}i)}$ และ $c_4^* = \frac{i[c_3 \Gamma(1-\sqrt{3}i) - c_4 \Gamma(1+\sqrt{3}i)]}{\Gamma(1-\sqrt{3}i) \Gamma(1+\sqrt{3}i)}$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่โดยใช้การแปลงซุมดู

ต่อไปจะพิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = a_q t^q + a_{q-1} t^{q-1} + a_{q-2} t^{q-2} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (4.1)$$

โดยที่ $a, b, c, d, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{q-1}, a_q \in \mathbb{R}$ และ $a_q \neq 0$

ทฤษฎีบท 4.1 ผลเฉลยเฉพาะ $y_p(t)$ ของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่ (4.1) คือ

$$y_p(t) = S^{-1} \{ A_q u^q + A_{q-1} u^{q-1} + A_{q-2} u^{q-2} + \cdots + A_1 u + A_0 \}$$

$$\text{โดยที่ } A_q = \frac{q! a_q}{q(q-1)(q-2)(q-3) + aq(q-1)(q-2) + bq(q-1) + cq + d},$$

$$A_{q-1} = \frac{(q-1)! a_{q-1}}{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4) + a(q-1)(q-2)(q-3) + b(q-1)(q-2) + c(q-1) + d},$$

$\vdots$

$$A_1 = \frac{a_1}{c+d} \quad \text{เมื่อ } c+d \neq 0 \text{ ถ้า } a_1 = 0,$$

$$A_0 = \frac{a_0}{d} \quad \text{เมื่อ } d \neq 0 \text{ ถ้า } a_0 \neq 0,$$

และ $A_i = 0$ เมื่อ $a_i = 0$

พิสูจน์ ดำเนินการแปลงซุมดูทั้งสองข้างของ (4.1) และใช้สมบัติการแปลงเชิงเส้น จะได้

$$u^4 \frac{d^4 Y}{du^4} + au^3 \frac{d^3 Y}{du^3} + bu^2 \frac{d^2 Y}{du^2} + cu \frac{dY}{du} + dY = a_q (q!) u^q + a_{q-1} (q-1)! u^{q-1} + \cdots + a_1 (1!) u + a_0 \quad (4.2)$$

$$\text{กำหนดให้ } Y = A_q u^q + A_{q-1} u^{q-1} + A_{q-2} u^{q-2} + \cdots + A_1 u + A_0 \quad (4.3)$$

เป็นผลเฉลยทดสอบของ (4.2) โดย $A_q, A_{q-1}, A_{q-2}, \dots, A_1, A_0$ เป็นค่าคงตัวที่ต้องพิจารณา แทน (4.3) ลงใน (4.2) จะได้

$$\begin{aligned} & A_p (q(q-1)(q-2)(q-3) + aq(q-1)(q-2) + bq(q-1) + cq + d) u^q \\ & + A_{q-1} ((q-1)(q-2)(q-3)(q-4) + a(q-1)(q-2)(q-3) + b(q-1)(q-2) + c(q-1) + d) u^{q-1} \\ & + \cdots + A_2 (2c + d) u^2 + A_1 (c + d) u + A_0 d \\ & = q! a_q u^q + (q-1)! a_{q-1} u^{q-1} + (q-2)! a_{q-2} u^{q-2} + \cdots + 2! a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $i = 0, 1, 2, \dots, q-1, q$

ถ้า $a_i = 0$ แล้ว $A_i = 0$

ถ้า $a_i \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$A_q = \frac{q! a_q}{q(q-1)(q-2)(q-3) + aq(q-1)(q-2) + bq(q-1) + cq + d} \quad \text{เมื่อตัวส่วนไม่เป็นศูนย์}$$

$$A_{q-1} = \frac{(q-1)! a_{q-1}}{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4) + a(q-1)(q-2)(q-3) + b(q-1)(q-2) + c(q-1) + d} \quad \text{เมื่อตัวส่วนไม่เป็นศูนย์}$$

$\vdots$

$$A_2 = \frac{2!a_2}{2b+2c+d} \quad \text{เมื่อ } 2b+2c+d \neq 0$$

$$A_1 = \frac{a_1}{c+d} \quad \text{เมื่อ } c+d \neq 0$$

$$A_0 = \frac{a_0}{d} \quad \text{เมื่อ } d \neq 0$$

ดังนั้น $y_p(t) = S^{-1}\{Y(u)\} = S^{-1}\{A_q u^q + A_{q-1} u^{q-1} + A_{q-2} u^{q-2} + \dots + A_1 u + A_0\}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ (4.1)

หมายเหตุ 4.1 เนื่องจากหลักการที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1 นั้นมีส่วนของการใช้หลักการเทียบสัมประสิทธิ์ ซึ่งทฤษฎีบท 4.1 จะไม่สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ได้ หากตัวส่วนที่ปรากฏในสูตรการคำนวณค่า $A_q, A_{q-1}, \dots, A_1, A_0$ มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อกำลังของ t ที่ปรากฏทางขวามือของ (4.1) มีค่าเท่ากับรากของ (3.2) ดังนั้นในกรณีที่กำลังของ t ที่ปรากฏทางขวามือของ (4.1) มีค่าเท่ากับรากของ (3.2) อาจใช้วิธีการแปรผันพารามิเตอร์ (Variation of parameters) ในการหาผลเฉลยเฉพาะแทนการใช้ทฤษฎีบท 4.1

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} - 10t^3 y''' + 35t^2 y'' - 35t y' = 10t^3 + 5t \quad (4.4)$$

ผลเฉลยทั่วไปของ (4.4) อยู่ในรูป $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$ โดยที่ $y_c(t)$ คือ ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของ (4.4) และ $y_p(t)$ คือ ผลเฉลยเฉพาะของ (4.4) หาผลเฉลย $y_c(t)$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าสมการช่วยของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของ (4.5) คือ $m(m-2)(m-6)(m-8) = 0$ ดังนั้น $m = 0, 2, 6, 8$ เป็นรากของสมการช่วย และสรุปได้ว่า

$$y_1 = S^{-1}\{u^0\} = 1, y_2 = S^{-1}\{u^2\} = \frac{t^2}{2!}, y_3 = S^{-1}\{u^6\} = \frac{t^6}{6!}, y_4 = S^{-1}\{u^8\} = \frac{t^8}{8!}$$

เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของ (4.4) ดังนั้น

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = c_1 + c_2^* t^2 + c_3^* t^6 + c_4^* t^8$$

เมื่อ $c_2^* = \frac{1}{2} c_2, c_3^* = \frac{1}{6!} c_3, c_4^* = \frac{1}{8!} c_4$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของ (4.4)

ต่อไปจะหาผลเฉลยเฉพาะโดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของ (4.4) คือ

$$y_p(t) = S^{-1}\{A_3 u^3 + A_2 u^2 + A_1 u + A_0\}$$

$$\text{โดยที่ } A_3 = \frac{3!a_3}{6a+6b+3c+d} = \frac{4}{3}, A_2 = 0, A_1 = \frac{a_1}{c+d} = -\frac{1}{7}, A_0 = 0$$

$$\text{ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะ คือ } y_p(t) = S^{-1}\{A_3 u^3 + A_1 u\} = S^{-1}\left\{\frac{4}{3} u^3 - \frac{1}{7} u\right\} = \frac{2}{9} t^3 - \frac{1}{7} t$$

$$\text{และ } y(t) = y_c(t) + y_p(t) = c_1 + c_2^* t^2 + c_3^* t^6 + c_4^* t^8 + \frac{2t^3}{9} - \frac{t}{7} \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (4.4)}$$

ตัวอย่าง 4.2 พิจารณาสมการโคชี – ออยเลอร์

$$t^4 y^{(4)} - 2t^3 y''' + 7t^2 y'' - 15ty' + 16y = 13t^5 - 3t^4 - 2t^3 + 6 \quad (4.5)$$

หาผลเฉลย $y_c(t)$ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่าสมการช่วยของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของ (4.5) คือ $(m-2)^4 = 0$ และผลเฉลยที่ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของ (4.5) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน คือ

$$y_1 = S^{-1}\{u^2\}, y_2 = S^{-1}\{u^2\} \ln t, y_3 = S^{-1}\{u^2\} \ln^2 t, y_4 = S^{-1}\{u^2\} \ln^3 t \text{ หรือ}$$

$$y_1 = \frac{t^2}{2}, y_2 = \frac{t^2 \ln t}{2}, y_3 = \frac{t^2 \ln^2 t}{2}, y_4 = \frac{t^2 \ln^3 t}{2}$$

ดังนั้น $y_c(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = c_1^* t^2 + c_2^* t^2 \ln t + c_3^* t^2 \ln^2 t + c_4^* t^2 \ln^3 t$

เมื่อ $c_1^* = \frac{C_1}{2}, c_2^* = \frac{C_2}{2}, c_3^* = \frac{C_3}{2}, c_4^* = \frac{C_4}{2}$ ต่อไปจะหาผลเฉลยเฉพาะโดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะ

ของ (4.5) คือ $y_p(t) = S^{-1}\{A_5 u^5 + A_4 u^4 + A_3 u^3 + A_2 u^2 + A_1 u + A_0\}$ โดยที่

$$A_5 = \frac{520}{27}, A_4 = -\frac{9}{2}, A_3 = -12, A_2 = 0, A_1 = 0, A_0 = \frac{3}{8}$$

ดังนั้น $y_p(t) = S^{-1}\left\{\frac{520}{27}u^5 - \frac{9}{2}u^4 - 12u^3 + \frac{3}{8}\right\} = \frac{13}{81}t^5 - \frac{3}{16}t^4 - 2t^3 + \frac{3}{8}$ และ

$$y(t) = c_1^* t^2 + c_2^* t^2 \ln t + c_3^* t^2 (\ln t)^2 + c_4^* t^2 (\ln t)^3 + \frac{13}{81}t^5 - \frac{3}{16}t^4 - 2t^3 + \frac{3}{8}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์ (4.5)

4. สรุป

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธ์อันดับสี่

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = 0$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง โดยการใช้การแปลงซุมดู เราได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ให้สูตรในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบเอกพันธ์อันดับสี่ อีกทั้งยังได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ใช้การแปลงซุมดูหาผลเฉลยเฉพาะของสมการโคชี – ออยเลอร์แบบไม่เอกพันธ์อันดับสี่ซึ่งอยู่ในรูป

$$t^4 y^{(4)} + at^3 y''' + bt^2 y'' + cty' + dy = r(t)$$

เมื่อ $r(t) = a_q t^q + a_{q-1} t^{q-1} + a_{q-2} t^{q-2} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ โดยที่ $a_q, a_{q-1}, a_{q-2}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

เนื่องจากวัตถุประสงค์หลักของบทความนี้ คือ ใช้ตารางการแปลงซุมดูเป็นเครื่องมือช่วยในการสร้างสูตรเพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี – ออยเลอร์อันดับสี่ที่ทั้งแบบเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ ในกรณีสมการแบบไม่เอกพันธ์นั้นยังมีข้อจำกัดของการหาผลเฉลยโดยใช้การแปลงซุมดูสำหรับฟังก์ชัน $r(t)$ ใด ๆ เนื่องจากในกรณีที่ $r(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งไม่มีข้อมูลของ $S\{r(t)\}$ ปรากฏตามตารางผลการแปลงซุมดู การหาผลเฉลยด้วยการแปลงซุมดูจะมีความยุ่งยากขึ้นเนื่องจากต้องหา $S\{r(t)\}$ โดยใช้บทนิยามของการแปลงซุมดู นอกจากนี้หลังจากนำสมการโคชี – ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์ไปดำเนินการการแปลงซุมดูจนกระทั่งได้ฟังก์ชัน $Y(u)$ แล้ว จะต้องมีการแปลงซุมดูผกผันของ $Y(u)$ เพื่อให้ได้ผล

ผลของสมการโคชี – ออยเลอร์ นั่นคือ $y(t) = S^{-1}\{Y(u)\}$ หาก $S^{-1}\{Y(u)\}$ ไม่มีปรากฏในตารางการแปลงซุมดู ก็จะมีคามยุ่งยากในการทำงานมากขึ้น คือต้องหา $S^{-1}\{Y(u)\}$ โดยใช้บทนิยาม

Table 1 Sumudu conversion results for some functions.

$f(t) = S^{-1}\{F(u)\}$	$F(u) = S\{f(t)\}$
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n=1,2,\dots$	$u^{n-1}, u > 0$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, n > 0$	$u^{n-1}, u > 0$
e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n=1,2,\dots$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
$\cos at$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{(b-a)}, a \neq b$	$\frac{1}{(1-bu)(1-au)}$
$\ln t$	$-\gamma + \ln u$
$\delta(t-a)$	$\frac{e^{-a/u}}{u}$
$\frac{t}{a}, 0 \leq t \leq a, f(t+a) = f(t)$	$\frac{u}{a} - \frac{e^{-a/u}}{1-e^{-a/u}}$
$r^n, n \leq t < n+1, n=1,2,\dots$	$\frac{1-e^{-1/u}}{1-re^{-1/u}}$

5. References

- Belgacem, F. B. M., & Karaballi, A. A. (2005). Sumudu transform fundamental properties investigations and application. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 10, 1-23.
- Ghil, B., & Kim, H. (2015). The solution of Euler-Cauchy equation by using Laplace transform. *International Journal of Mathematical Analysis*, 9(53), 2611-2618.
- Jhathanam, S., Nonlaopon, K., & Orankitjaroen, S. (2019). Generalized solutions of the third-order Cauchy-Euler equation in the space of right-sided distributions via Laplace transform. *Mathematics*, 7(4), 376. <https://doi.org/10.3390/math7040376>
- Pothat, S. H. (2015). The reduction of order on Cauchy-Euler equation with a bulge function. *Applied Mathematical Sciences*, 9, 1139-1143.
- Prasertsang, P., Sattaso, S., Nonlaopon, K., & Kim, H. (2021). Analytical study for certain ordinary differential equations with variable coefficient via ω -transform. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4, 1184-1199.
- Sacorn, N., Nonlaopon, K., & Kim, H. (2018). A note on the generalized solutions of the third-order Cauchy-Euler equations. *Communications in Mathematical Analysis*, 9, 661-669.