ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลาง และจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวา

Generalized Beauty: Sum of the Multiple of 9 with the Arranged Numbers by Increasing from 1 of the Left and the Right to the Middle and the Arranged Numbers by Increasing from the Middle 1 to the Left and the Right

ประไพศรี กำแพงแก้ว, รสสุคนธ์ อินตะแสน และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

Praprisri Kumpangkeaw, Rossukon Intasan and Aiyared Iampan*

Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึง n กับจำนวน $n-1$ และผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึง n กับจำนวน $n-1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยที่ $n \geq 2$ ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลบวกดังกล่าว ดังนี้ $(1 \to n \leftarrow 1) \times 9 + (n-1) = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ และ $(n \leftarrow 1 \to n) \times 9 + (n-1) = (n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

คำสำคัญ : พหุคูณของ 9; จำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1

Abstract

This article presents a general form of the sum of the multiple of 9 with the arranged numbers by increasing from 1 of the left and the right to the middle n and $n-1$. The sum of the multiple of 9 with the arranged numbers by increasing from the middle 1 to the left and the right n

***Corresponding author:** *aiyared.ia@up.ac.th*
DOI: 10.14456/tjst.2015.15

and $n-1$ where n is any positive integer such that $n \geq 2$, is also revealed. The results show that the general form of the sum is $(1 \to n \leftarrow 1) \times 9 + (n-1) = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$ for all positive integer $n \geq 2$ and $(n \leftarrow 1 \to n) \times 9 + (n-1) = (n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$ for all positive integer $n \geq 2$.

Keywords: multiple of 9; arranged number by increasing from 1

1. คำนำ

ในชีวิตประจำวันของเราเกี่ยวข้องกับระบบพีชคณิตของจำนวนเต็มอยู่บ่อยครั้ง บางครั้งการคำนวณหาผลลัพธ์ของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ นั้นก็ไม่สะดวกนัก ซึ่งก็เป็นสาเหตุที่ทำให้หลาย ๆ คนรู้สึกไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ แต่แท้ที่จริงแล้วจำนวนเหล่านั้นไม่ได้มีความยุ่งยากมากนักสำหรับการคำนวณ หากเรารู้หลักการคิดที่เหมาะสม ซึ่งเปรียบเสมือนมีเครื่องมือในการช่วยคิดคำนวณติดตัวเราอยู่ตลอดเวลา จากการศึกษาความสวยงามของคณิตศาสตร์ตามแหล่งข้อมูลต่าง ๆ ผู้เขียนได้พบความสวยงามของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงหรือเพิ่มขึ้นจาก 1 ไปทางซ้ายหรือขวาถึงจำนวนเต็มใด ๆ เช่น 123456789×9 หรือ 987654321×9 ทั้งนี้จึงทำให้ผู้เขียนได้หาความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

สำหรับการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตของจำนวนที่เลขเรียงกันนั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ซึ่งนิยามใน (1) สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ด้วยสัญลักษณ์ $a = {}_q r$ เมื่อ r และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \leq r < 10$ ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ ดังนี้ สำหรับการศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็น 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็น 1 นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $(1_{[n]})^2 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321$

อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็น 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่าความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า $\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = 9 \times 123\ldots(n-3)(n-2)(n-1) + n$

อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ไปทางซ้ายกับ 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_q r\, {}_q(r-1)\ldots {}_1 1_1 09\ldots321) \times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_q(r-1)}9, & 1 \leq r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9, & r = 0 \end{cases}$$

สุจิตรา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้น

ไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $(2\cdot n-1)\ldots 531\times 9 = (2\cdot n-2)\underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=n-1}9$

กิตติยา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจาก 9 ไปทางขวาถึงจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่าเลขหลักแรกของจำนวนที่เลขเรียงกันข้างต้นอยู่สองค่า ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลบวกดังกล่าว ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $[(9\to(-n))\cdot 9]-(n+2) = \underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=11+n}$

รุ่งนภา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของ 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ไปทางขวาถึงจำนวนเต็มบวกใด ๆ กับจำนวนหลักแรกของจำนวนที่เลขเรียงกันข้างต้น ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลบวกดังกล่าว ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $(1\to n)\times 8+n = 9\to(10-n)$

วนิดา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3 ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณดังกล่าว ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $(3\cdot n)\ldots 963\times 9 = ((3\cdot n)-1)\underbrace{666\ldots 6}_{\#(6)=n-1}7$

ศิริกานต์ และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณนี้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $(2\cdot n)\ldots 642\times 9 = ((2\cdot n)-1)\underbrace{777\ldots 7}_{\#(7)=n-1}8$

จากบทความข้างต้น พบว่าการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการหาผลลัพธ์นั้นมีประโยชน์เป็นอย่างมาก ฉะนั้นบทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และความสัมพันธ์ของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b\neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $a=b\cdot q+r$ และ $0\le r<|b|$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k\ge n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\ge n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร (อัยเรศ, 2554) และ (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a

เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10\cdot q+r$ และ $0\le r<10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม $a := {}_{q}r$ (1) เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0={}_{0}0 & 20={}_{2}0 & 60={}_{6}0 & 180={}_{18}0 & 200={}_{20}0\\
1={}_{0}1 & 21={}_{2}1 & 61={}_{6}1 & 181={}_{18}1 & 201={}_{20}1\\
2={}_{0}2 & 22={}_{2}2 & 62={}_{6}2 & 182={}_{18}2 & 202={}_{20}2\\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\\
9={}_{0}9 & 29={}_{2}9 & 69={}_{6}9 & 189={}_{18}9 & 209={}_{20}9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
0={}_{0}0 & -20={}_{-2}0 & -60={}_{-6}0 & -180={}_{-18}0 & -200={}_{-20}0\\
-1={}_{-1}9 & -21={}_{-3}9 & -61={}_{-7}9 & -181={}_{-19}9 & -201={}_{-21}9\\
-2={}_{-1}8 & -22={}_{-3}8 & -62={}_{-7}8 & -182={}_{-19}8 & -202={}_{-21}8\\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots\\
-9={}_{-1}1 & -29={}_{-3}1 & -69={}_{-7}1 & -189={}_{-19}1 & -209={}_{-21}1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_{0}r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0\le r<10$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวน a ใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}=\{{}_{q}r \mid q,r\in\mathbb{Z}$ และ $0\le r<10\}$ (2) และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าจำนวนที่ได้จากการแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงจำนวนจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

จากอภิสิทธิ์ และ อัยเรศ (2556) จะได้ว่าการแปลงจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ ทำได้ดังนี้ ${}_{q_n}r_n\,{}_{q_{n-1}}r_{n-1}\cdots{}_{q_3}r_3\,{}_{q_2}r_2\,{}_{q_1}r_1 = q_n(r_n+q_{n-1})\ldots(r_3+q_2)(r_2+q_1)r_1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติหากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_{q}r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วย 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง ตัวอย่าง เช่น การแปลงจำนวน $24{}_{-1}58{}_{6}20{}_{11}93{}_{1}9{}_{23}13{}_{-4}57$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
24{}_{-1}58{}_{6}20{}_{11}93{}_{1}9{}_{23}13{}_{-4}57 &= 2(4-1)5(8+6)2(0+11)9(3+1)(9+23)1(3-4)57\\
&= 235(14)2(11)94(32)1(-1)57\\
&= 235{}_{1}42{}_{1}194{}_{3}21{}_{-1}957\\
&= 23(5+1)4(2+1)19(4+3)2(1-1)957\\
&= 2364319720957
\end{aligned}$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึง

ลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$

โดย $${}_{q}r \boxplus {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \;; & r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a \end{cases}$$

สำหรับทุก ${}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}$ เช่น

$125 \boxplus 214 = {}_{12}5 \boxplus {}_{21}4 = {}_{12+21}(5+4) = {}_{33}9 = 339$

และ $-301 \boxplus 29 = {}_{-31}9 \boxplus {}_{2}9 = {}_{-31+2+1}8 = {}_{-28}8 = -272$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_{q}r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; r \ne 0 \end{cases} \qquad (3)$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการหาค่าของจำนวนเศษเหลือในระบบเลขฐานสิบ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$${}_{m}s_1s_2s_3\ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1s_2s_3\ldots s_n \qquad (4)$$

ในการศึกษาหัวข้อถัดไป สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน เช่น $\#(1)$ แทนจำนวนของ 1 ที่เรียงติดกันในสมการ และจะแสดงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่พบความสัมพันธ์ของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n \ge 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n \ge 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$

บทนิยาม 2 สำหรับทุกจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวน n และจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวน n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \ge 2$ นิยาม

$$1 \to n \leftarrow 1 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321 \qquad (5)$$

เช่น

$$\begin{aligned} 1 \to 2 \leftarrow 1 &= 121 \\ 1 \to 3 \leftarrow 1 &= 12321 \\ 1 \to 4 \leftarrow 1 &= 1234321 \\ &\vdots \\ 1 \to 9 \leftarrow 1 &= 12345678987654321 \\ 1 \to 10 \leftarrow 1 &= 123456789(10)987654321 \end{aligned}$$

และ $n \leftarrow 1 \to n = n(n-1)\ldots32123\ldots(n-1)n$ (6)

เช่น

$$\begin{aligned} 2 \leftarrow 1 \to 2 &= 212 \\ 3 \leftarrow 1 \to 3 &= 32123 \\ 4 \leftarrow 1 \to 4 &= 4321234 \\ &\vdots \\ 9 \leftarrow 1 \to 9 &= 98765432123456789 \\ 10 \leftarrow 1 \to 10 &= (10)98765432123456789(10) \end{aligned}$$

2. ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตความสัมพันธ์ของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $2 \le n \le 9$ กับจำนวน $n-1$ และความสัมพันธ์ของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $2 \le n \le 9$ กับจำนวน $n-1$ เราพบความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{array}{rll} 121 & \times 9 + 1 = & 1090 \\ 12321 & \times 9 + 2 = & 110891 \\ 1234321 & \times 9 + 3 = & 11108892 \\ 123454321 & \times 9 + 4 = & 1111088893 \\ 12345654321 & \times 9 + 5 = & 111110888894 \\ 1234567654321 & \times 9 + 6 = & 11111108888895 \\ 123456787654321 & \times 9 + 7 = & 1111111088888896 \\ 12345678987654321 & \times 9 + 8 = & 111111110888888897 \end{array} \qquad (7)$$

จากความสัมพันธ์ (7) เราสังเกตเห็นว่าผลบวกนี้เป็นจำนวนหลายหลัก โดยที่ $n-1$ หลัก

แรกเป็น 1, หลักถัดไปเป็น 0, $n-2$ หลักถัดไปเป็น 8, หลักถัดไปเป็น 9 และหลักสุดท้ายเป็น $n-2$ ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้ $(1\to n\leftarrow 1)\times 9+(n-1)=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$ สำหรับทุก $n=2,3,4,\ldots,9$ และ

$$\begin{array}{rcr}
212 & \times 9+1= & 1909\\
32123 & \times 9+2= & 289109\\
4321234 & \times 9+3= & 38891109\\
543212345 & \times 9+4= & 4888911109\\
65432123456 & \times 9+5= & 588889111109\\
7654321234567 & \times 9+6= & 68888891111109\\
876543212345678 & \times 9+7= & 7888888911111109\\
98765432123456789 & \times 9+8= & 888888889111111109
\end{array} \qquad (8)$$

จากความสัมพันธ์ (8) เราสังเกตเห็นว่าผลบวกนี้เป็นจำนวนหลายหลัก โดยที่หลักแรกเป็น $n-1$, $n-2$ หลักถัดไปเป็น 8, หลักถัดไปเป็น 9, $n-2$ หลักถัดไปเป็น 1, และสองหลักสุดท้ายเป็น 0 และ 9 ตามลำดับ ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$(n\leftarrow 1\to n)\times 9+(n-1)=(n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$$

สำหรับทุก $n=2,3,4,\ldots,9$

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างเพื่อนำไปสู่การศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ ดังนี้

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ $(1\to 10\leftarrow 1)\times 9+(10-1)$ และ $(10\leftarrow 1\to 10)\times 9+(10-1)$ สามารถหาได้ถูกต้องและสอดคล้องตามความสัมพันธ์ (7) และ (8) ที่เราพบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
(1\to 10\leftarrow 1)\times 9+(10-1) &= 123456789(10)987654321\times 9+9\\
&= 123456789_{1}0987654321\times 9+9\\
&= 12345678(9+1)0987654321\times 9+9\\
&= 12345678(10)0987654321\times 9+9\\
&= 12345678_{1}00987654321\times 9+9\\
&= 1234567(8+1)00987654321\times 9+9\\
&= 1234567900987654321\times 9+9\\
&= 1111111110888888889+9\\
&= 1111111110888888898\\
&= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=9}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=8}98
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
(10\leftarrow 1\to 10)\times 9+(10-1) &= (10)98765432123456789(10)\times 9+9\\
&= {}_{1}{}^{098765432123456789}{}_{1}0\times 9+9\\
&= 109876543212345678(9+1)0\times 9+9\\
&= 109876543212345678(10)0\times 9+9\\
&= 109876543212345678_{1}00\times 9+9\\
&= 10987654321234567(8+1)00\times 9+9\\
&= 1098765432123456790 0\times 9+9\\
&= 98888888891111111100+9\\
&= 98888888891111111109\\
&= 9\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=8}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=8}09
\end{aligned}$$

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (7) และ (8) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกทั้งสองนี้ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกทั้งสองนี้ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลบวกที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (7) และ (8) ที่เราพบหรือไม่

บทตั้งทั้งสี่ต่อไปนี้เป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของเราทั้งสองทฤษฎีบท ซึ่งจะตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นของเราได้

บทตั้ง 2 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ จะได้ว่า

$$123\ldots n(n+1)n\ldots 321 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots 321 + 1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n}\underbrace{000\ldots 0}_{\#(0)=n} \tag{9}$$

นั่นคือ $1 \to n+1 \leftarrow 1 = 1 \to n \leftarrow 1 + 1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n}\underbrace{000\ldots 0}_{\#(0)=n}$

การพิสูจน์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ จะได้ว่า

$$123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots 321 + 1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n}\underbrace{000\ldots 0}_{\#(0)=n}$$

$$= 12(1+2)(2+2)(3+2)\ldots((n-2)+2)((n-1)+2)(n+0)((n-1)+0)\ldots(3+0)(2+0)(1+0)$$

$$= 12345\ldots n(n+1)n\ldots 321$$

$$= 123\ldots n(n+1)n\ldots 321$$

ดังนั้น $123\ldots n(n+1)n\ldots 321 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots 321 + 1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n}\underbrace{000\ldots 0}_{\#(0)=n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ □

บทตั้ง 3 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ จะได้ว่า $1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n} \times 9 = 10\underbrace{999\ldots 9}_{\#(9)=n-1}8$ (10)

การพิสูจน์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ จะได้ว่า

$$1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n} \times 9 = 9\underbrace{{}_1 8{}_1 8{}_1 8\ldots {}_1 8}_{\#({}_1 8)=n} = {}_1 0\underbrace{999\ldots 9}_{\#(9)=n-1}8 = 10\underbrace{999\ldots 9}_{\#(9)=n-1}8$$

ดังนั้น $1\underbrace{222\ldots 2}_{\#(2)=n} \times 9 = 10\underbrace{999\ldots 9}_{\#(9)=n-1}8$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 1$ □

บทตั้ง 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$(n+1)n\ldots 32123\ldots n(n+1) = n(n-1)\ldots 32123\ldots(n-1)n + (n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=n} \tag{11}$$

นั่นคือ $(n+1) \leftarrow 1 \to (n+1) = (n \leftarrow 1 \to n) + (n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=n}$

การพิสูจน์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$n(n-1)\ldots 32123\ldots(n-1)n + (n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=n}$$

$$= (n+1)(n-1)(n+8)((n-1)+8)\ldots(4+8)(3+8)(2+9)(1+1)(2+1)(3+1)\ldots((n-1)+1)(n+1)$$

$$= (n+1)(n-1)(10-2+n)(10-2+(n-1))\ldots(10-2+4)(10-2+3)(11)234\ldots n(n+1)$$

$$= (n+1)(n-1)(10+(n-2))(10+(n-3))\ldots(10+2)(10+1)(11)234\ldots n(n+1)$$

$$= (n+1)(n-1)_1(n-2)_1(n-3)\ldots {}_1 2{}_1 1{}_1 1234\ldots n(n+1)$$

$$= (n+1)n(n-1)(n-2)\ldots 321234\ldots n(n+1)$$

$$= (n+1)n\ldots 32123\ldots n(n+1)$$

ดังนั้น $(n+1)n\ldots 32123\ldots n(n+1) = n(n-1)\ldots 32123\ldots(n-1)n + (n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ □

บทตั้ง 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$(n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9 = n8(9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \qquad (12)$$

การพิสูจน์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9 &= (9\cdot n+9)(9\cdot n-9)\underbrace{{}_7 2\,{}_7 2\,{}_7 2\ldots{}_7 2}_{\#({}_7 2)=n-2}\,{}_8 1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= (9\cdot n+9)(9\cdot n-2)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-3}{}_1 01\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= (9\cdot n+9)(9\cdot n-2){}_1 0\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-4}01\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= (9\cdot n+9)(9\cdot n-1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= (9\cdot n+9)(10\cdot(n-1)+9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= (9\cdot n+9)_{n-1}(9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= (10\cdot n+8)(9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= {}_n 8(9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n} \\
&= n8(9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(n+1)(n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\times 9 = n8(9-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ □

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$(1 \to n \leftarrow 1)\times 9 + (n-1) = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2) \qquad (13)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(1 \to n \leftarrow 1)\times 9 + (n-1) = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ เนื่องจาก $121\times 9+1 = 1090$ ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq 2$ จะได้ว่า $(1 \to k \leftarrow 1)\times 9 + (k-1) = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9(k-2)$

พิจารณา $(1 \to (k+1) \leftarrow 1)\times 9 + ((k+1)-1)$

$$\begin{aligned}
&= [123\ldots k(k+1)k\ldots 321]\times 9 + ((k+1)-1) \\
&= [123\ldots(k-1)k(k-1)\ldots 321 + 1\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}]\times 9 + ((k-1)+1) \qquad \text{(บทตั้ง 2)} \\
&= [(1 \to k \leftarrow 1) + 1\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}]\times 9 + ((k-1)+1) \\
&= [(1 \to k \leftarrow 1)\times 9] + [1\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times 9] + ((k-1)+1) \\
&= [(1 \to k \leftarrow 1)\times 9 + ((k-1)+1)] + [1\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times 9]
\end{aligned}$$

$$= [[(1 \rightarrow k \leftarrow 1)\times 9 + (k-1)] + 1] + [1\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times 9]$$

$$= [[\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9(k-2)] + 1] + [1\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times 9] \qquad \text{(สมมติฐาน)}$$

$$= [[\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9(k-2)] + 1] + 10\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k} \qquad \text{(บทตั้ง 3)}$$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9((k+1)-2) + 10\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}$$

$$= 10\underbrace{{}_1 0\,{}_1 0\,{}_1 0\ldots{}_1 0}_{\#({}_1 0)=k-1}8\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9((k+1)-2)$$

$$= 11\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-2}08\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9((k+1)-2)$$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=(k+1)-1}\ 0\ \underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=(k+1)-2}\ 9((k+1)-2)$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $(1 \rightarrow n \leftarrow 1)\times 9 + (n-1)$ $= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ □

ทฤษฎีบท 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า $(n \leftarrow 1 \rightarrow n)\times 9 + (n-1) = (n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$ (14)

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(n \leftarrow 1 \rightarrow n)\times 9 + (n-1) = (n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

เนื่องจาก $212\times 9 + 1 = 1909$ ดังนั้น $P(2)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq 2$ จะได้ว่า $(k \leftarrow 1 \rightarrow k)\times 9 + (k-1) = (k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-2}09$

พิจารณา $((k+1) \leftarrow 1 \rightarrow (k+1))\times 9 + ((k+1)-1)$

$$= [(k+1)k\ldots32123\ldots k(k+1)]\times 9 + ((k+1)-1)$$

$$= [k(k-1)\ldots32123\ldots(k-1)k + (k+1)(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}]\times 9 + ((k-1)+1) \qquad \text{(บทตั้ง 4)}$$

$$= [(k \leftarrow 1 \rightarrow k) + (k+1)(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}]\times 9 + ((k-1)+1)$$

$$= [(k \leftarrow 1 \rightarrow k)\times 9] + [(k+1)(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}\times 9] + ((k-1)+1)$$

$$= [(k \leftarrow 1 \rightarrow k)\times 9 + ((k-1)+1)] + [(k+1)(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}\times 9]$$

$$= [[(k \leftarrow 1 \rightarrow k)\times 9 + (k-1)] + 1] + [(k+1)(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}\times 9]$$

$$= [(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-2}09 + 1] + [(k+1)(k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}\times 9] \qquad \text{(สมมติฐาน)}$$

$$= (k-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-1}0 + k8(9-k)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-2}1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k} \qquad \text{(บทตั้ง 5)}$$

$$= k88\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-2}{}_1 0\underbrace{{}_1 0\,{}_1 0\,{}_1 0\ldots{}_1 0}_{\#({}_1 0)=k-1}9$$

$$= k88\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-3}91\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-2}09$$

$$= k\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=k-1}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k-1}09$$

$$= ((k+1)-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=(k+1)-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=(k+1)-2}09$$

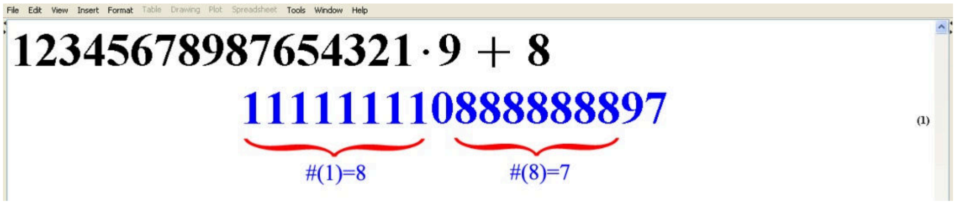
จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $(n \leftarrow 1 \rightarrow n)\times 9+(n-1)$ $= (n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ □

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 4 และ 5 ในการหาผลลัพธ์ ดังนี้

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $(1 \rightarrow 9 \leftarrow 1)\times 9+8$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $(1 \rightarrow 9 \leftarrow 1)\times 9+8 = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=8}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=7}97$

ตรวจคำตอบ



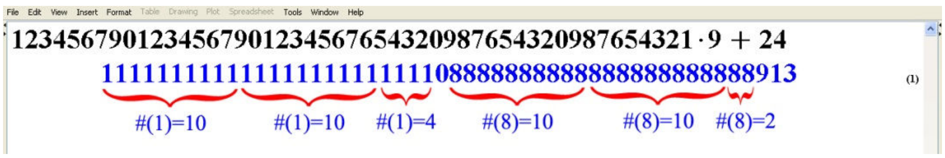
รูปที่ 1 $(1 \rightarrow 9 \leftarrow 1)\times 9+8$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $(1 \rightarrow 25 \leftarrow 1)\times 9+24$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $(1 \rightarrow 25 \leftarrow 1)\times 9+24 = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=24}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=23}9{}_2 3 = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=24}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=22}913$

ตรวจคำตอบ

$$(1 \rightarrow 25 \leftarrow 1)\times 9+24$$
$$= 123\ldots{}_2 4_2 5_2 4\ldots 321\times 9+24$$
$$=1234567901234567901234567654320987654320987654321\times 9+24$$

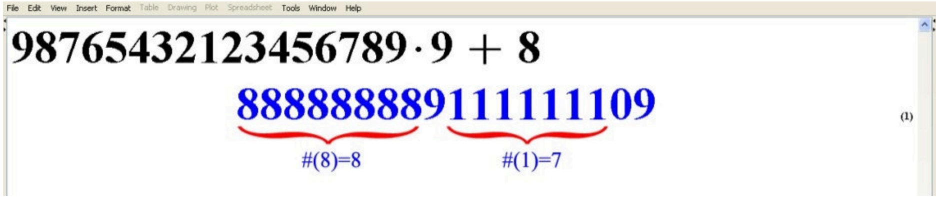


รูปที่ 2 $(1 \rightarrow 25 \leftarrow 1)\times 9+24$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $(9 \leftarrow 1 \rightarrow 9)\times 9+8$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $(9 \leftarrow 1 \rightarrow 9)\times 9+8 = 8\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=7}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}09 = \underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=8}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=7}09$

ตรวจคำตอบ



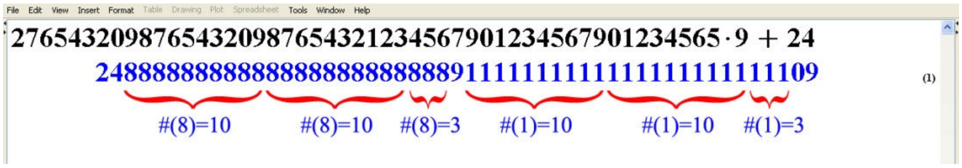
รูปที่ 3 $(9\leftarrow1\rightarrow9)\times9+8$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลลัพธ์ของ $(25\leftarrow1\rightarrow25)\times9+24$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $(25\leftarrow1\rightarrow25)\times9+24={}_24\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=23}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=23}09=24\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=23}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=23}09$

ตรวจคำตอบ

$$(25\leftarrow1\rightarrow25)\times9+24$$
$$={}_25{}_24\ldots32123\ldots{}_24{}_25\times9+24$$
$$=27654320987654320987654321234567901234567901234565\times9+24$$



รูปที่ 4 $(25\leftarrow1\rightarrow25)\times9+24$

3. บทสรุป

จากการศึกษาผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

3.1 เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกทั้งสองนี้ ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 และ 5 ดังนี้ $(1\rightarrow n\leftarrow1)\times9+(n-1)=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\ge2$ และ $(n\leftarrow1\rightarrow n)\times9+(n-1)=(n-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n-2}09$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\ge2$

3.2 รูปทั่วไปที่แน่นอนของของผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ นี้มีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (7) และ (8) ที่เราพบ

จากข้อสังเกตผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึงจำนวนเต็มบวก $n\ge2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ และผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่

กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึงจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ ใด ๆ กับจำนวน $n-1$ จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ตามทฤษฎีบท 4 และ 5 นั้น นับว่าเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เราหาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็วและสะดวกมากขึ้น จากบทความนี้และบทความอื่น ๆ ที่ได้กล่าวถึง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่าง ๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าน่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

4. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

5. รายการอ้างอิง

กิตติยา ใจเย็น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2557, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : พหุคูณของเลขโดด 9 ด้วยจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 9 ไปทางขวากับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 8, ว.วิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต 10(1): 116-129.

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ, ว.นเรศวรพะเยา 6(1): 25-30.

รุ่งนภา ศักดิ์อรุณชัย และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2557, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ความสัมพันธ์ทางพีชคณิตระหว่างจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางขวากับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 9 ไปทางขวา, ว.มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา 9(1): 43-56.

วนิดา ราตรีเสน่ห์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2557, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3, ว.วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 22(4): 474-481.

ศิริกานต์ หยดย้อย และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2557, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่, ว.วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 3(1): 42-50.

สุจิตรา เหลาแตว และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2557, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9, ว.วิจัย มสด. สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ 10(3): 241-254.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม, ว.วิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 8(2): 48-58.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9, ว.วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี 15(1): 75-83.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1, ว.นเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น, ว.วิทยาศาสตร์ มข. 41(4): 919-927.

Clark, W.E., 2002, Elementary Number Theory, Department of Mathematics, University of South Florida.