

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพความเท่ากัน
ของความแปรปรวนประชากร 3 กลุ่ม
ภายใต้การแจกแจงที่มีความโด่งมากและความเบ้มาก
An Efficiency Comparison of 3 Groups Homogeneity of
Population Variance Tests Under Highly Kurtosis
and Skewness Distributions

สายชล สิ้นสมบุญทอง*

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

Saichon Sinsomboonthong*

Department of Statistics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,

Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok 10520

บทคัดย่อ

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการเปรียบเทียบประสิทธิภาพความเท่ากันของความแปรปรวนประชากรของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3 กลุ่ม ภายใต้การแจกแจงที่มีความโด่งมากและความเบ้มาก โดยใช้สถิติทดสอบ 6 ตัว คือ สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตี สถิติทดสอบโอปรีน และสถิติทดสอบจี ใช้วิธีการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล 5,000 ครั้ง โดยพิจารณาจากความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ความแรงแ้ง และกำลังการทดสอบ ผลการศึกษาเกี่ยวกับความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ในกรณีการแจกแจงปกติที่มีความโด่งมาก (0,16) พบว่าสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี และสถิติทดสอบโอปรีน ส่วนใหญ่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ ส่วนในการแจกแจงแกมมาที่มีความเบ้มาก (16,1) สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีและสถิติทดสอบโอปรีนส่วนใหญ่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ ส่วนในการศึกษากำลังการทดสอบพบว่ากรณีการแจกแจงปกติที่มีความโด่งมาก (0,16) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 สถิติทดสอบเลห์แมนมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด ยกเว้นตัวอย่างขนาดเล็ก สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีการแจกแจงแกมมาที่มีความโด่งมาก (16,1) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 สถิติทดสอบเลวินและสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุด ส่วนการทดสอบความแรงแ้งพบว่าสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีส่วนใหญ่จะมีความแรงแ้งมากที่สุด

คำสำคัญ : ความเท่ากันของความแปรปรวนประชากร; ความโด่งมาก; ความเบ้มาก

Abstract

In this study, an efficiency comparison of 3 groups homogeneity of population variance tests under highly kurtosis and skewness distributions were determined by using six statistical tests such as Bartlett's test, Lehman's test, Levene's test, Brown-Forsythe's test, Obrien' test and G test. The simulation was used Monte Carlo technique 5,000 times. These tests were considered probability of type I error, robustness and power of a test. The results about ability of coverage a probability of type I error in case of normal distribution (0,16); high kurtosis showed that Bartlett's test, Leven's test, Brown-Forsythe's test, and Obrien' test can be coverage a probability of type I error. In Gamma distribution (16,1); high skewedness, Brown-Forsythe's test and Obrien' test can be coverage a probability of type I error. Nevertheless, the study of power of a test in Normal distribution (0,16) at significant level 0.05, Lehman's test had the highest power of a test, but the small sample size, Bartlett's test had more power of a test than the another tests. In Gamma distribution (16,1), Levene's test and Bartlett's test had the highest power of a test at 0.05 significant level. Finally, robustness test showed that Brown-Forsythe's test mostly had the best robustness.

Keywords: homogeneity of population variance; high kurtosis; high skewedness

1. บทนำ

สถิติที่ใช้ในงานวิจัยนั้นได้รับการพัฒนามาเพื่อใช้ให้เหมาะสมกับสถานการณ์ต่าง ๆ กัน เพื่อให้ผลลัพธ์ที่เชื่อถือได้ในการหาข้อสรุปไปยังประชากร ซึ่งจำเป็นที่ผู้วิจัยต้องรู้จักเลือกใช้ให้เหมาะสมกับคุณลักษณะของข้อมูลโดยเฉพาะสถิติทดสอบ (test statistics) ความแตกต่างระหว่างกลุ่มประชากรซึ่งเป็นวิธีที่ใช้กันมากในงานวิจัย โดยสถิติทดสอบที่ผู้วิจัยสนใจในการศึกษาครั้งนี้คือสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3 กลุ่ม เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติและไม่ได้มีการแจกแจงปกติ ขนาดตัวอย่างเล็กและใหญ่ ขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน ซึ่งผลสรุปจากการศึกษาสามารถประยุกต์ใช้ร่วมกับการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของประชากรในด้านอื่น ๆ เช่น ในการศึกษาเพื่อต้องการเปรียบเทียบ

ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างตั้งแต่ 3 กลุ่ม ขึ้นไป สถิติทดสอบที่ผู้วิจัยมักเลือกใช้ทดสอบสมมติฐาน คือ สถิติทดสอบเอฟ (F-test) ภายใต้การวิเคราะห์ความแปรปรวน (analysis of variance, ANOVA) มีข้อตกลงเบื้องต้นว่าตัวอย่างต้องถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ แต่ละประชากรต้องเป็นอิสระต่อกัน และมีความแปรปรวนเท่ากัน ในทางปฏิบัติเราไม่อาจแน่ใจว่าข้อมูลที่ถูกสุ่มมาจะเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนหรือไม่ และมีบ่อยครั้งพบว่าลักษณะของข้อมูลไม่ตรงกับข้อกำหนดข้อใดข้อหนึ่งหรือหลายข้อ ซึ่งจะทำให้ระดับนัยสำคัญและความไว (sensitivity) ของสถิติทดสอบเปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นก่อนที่จะวิเคราะห์ความแปรปรวน เราจำเป็นต้องทดสอบว่าแต่ละประชากรมีความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ เพื่อให้ผลทดสอบที่ได้เป็น

ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยประชากรจริง ๆ ถ้าไม่มีข้อตกลงเบื้องต้นข้อนี้ผลการทดสอบอาจเป็นผลจากความแตกต่างของความแปรปรวนของข้อมูลก็ได้ ซึ่งถ้าหากไม่เป็นไปตามข้อกำหนดเบื้องต้นเกี่ยวกับความเท่ากันของความแปรปรวน ในกรณีขนาดประชากรเท่ากันและความแปรปรวนแตกต่างกันเล็กน้อย สถิติทดสอบเอฟจะยังมีความแกร่ง (robust) ต่อลักษณะที่ไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความเท่ากันของความแปรปรวน แต่ถ้าความแปรปรวนมีความแตกต่างกันค่อนข้างมากจะมีผลกระทบต่อระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในขณะที่ความคลาดเคลื่อนของการทดสอบที่มีการแจกแจงไม่เป็นปกติ เช่น เป้ไปข้างใดข้างหนึ่งจะมีผลทำให้ความแปรปรวนไม่เท่ากัน ซึ่งส่งผลกระทบต่อการมีนัยสำคัญทางสถิติ (กุสุมา และคณะ [1])

นักสถิติหลายคนได้พยายามคิดค้นและพัฒนาสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรหลายกลุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกันสำหรับการแจกแจงปกติจะเลือกใช้สถิติทดสอบที่อิงพารามิเตอร์ เช่น สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ (Bartlett's test) สถิติทดสอบคอครัน (Cochran's test) สถิติทดสอบฮาร์ทลีย์ (Hartley's test) สถิติทดสอบเลห์แมน (Lehmann's test) ซึ่งสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์จะให้กำลังการทดสอบสูงภายใต้การแจกแจงปกติ (เยวภา [2]) สถิติทดสอบนี้มีความไวถ้าประชากรไม่มีการแจกแจงปกติ (Box [3], Manoukian *et al.* [4]) สถิติทดสอบเลห์แมนจะให้กำลังการทดสอบสูงภายใต้การแจกแจงปกติด้วยเช่นกัน (สมประสงค์ และคณะ [5]) และในกรณีเมื่อข้อมูลประชากรที่ไม่มีการแจกแจงปกติจะใช้สถิติทดสอบเลวิน (Levene's test) สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี (Brown-Forsythe's test) สถิติทดสอบโอบริน (O'Brien's test) และสถิติทดสอบเชฟเฟ (Scheffe's test) และเมื่อประชากรมีการแจก

แจงไคกำลังสอง สถิติทดสอบเลวินจะมีกำลังการทดสอบสูงสุด (ดวงพร [6]) และเมื่อประชากรมีการแจกแจงแกมมา สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตีจะมีกำลังการทดสอบสูงสุด (สมประสงค์ และคณะ [5]) ส่วนการวิเคราะห์ความแปรปรวน-ความเท่ากันของความแปรปรวนในตัวอย่างการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียว ผลการศึกษาพบว่าสถิติทดสอบเลวินที่มีเศษตกค้างกำลังสอง สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน สถิติทดสอบแรมซี (Ramsey's test) และสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี บรูทสเตรป (Bootstrap Brown-Forsythe's test) สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ สถิติทดสอบโอบรินมีกำลังการทดสอบน้อยกว่าวิธีอื่นเล็กน้อย ส่วนสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตีบรูทสเตรปมีกำลังการทดสอบมากกว่าวิธีอื่นเล็กน้อย ขนาดตัวอย่างและรูปร่างของประชากรมีอิทธิพลต่อความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 มากที่สุด โดยสรุปสถิติทดสอบโอบรินและสถิติทดสอบแรมซีมีความแกร่งมากที่สุด (Nguyen *et al.* [7]) เนื่องจากไม่มีผลสรุปที่แน่ชัดในการเลือกใช้สถิติทดสอบ ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงให้ความสนใจในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพความเท่ากันของความแปรปรวนประชากร 3 กลุ่ม โดยใช้ 6 วิธี คือ บาร์ตเลตต์ (Bartlett) เลห์แมน (Lehmann) เลวิน (Levene) บราวน์-ฟอร์ลิตี (Brown-Forsythe) โอบริน (O'Brien) และจี (G) โดยใช้วิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo) พิจารณาจากความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 (probability of type I error) ความแกร่ง (robustness) และกำลังการทดสอบ (power of a test) เพื่อหาวิธีที่มีประสิทธิภาพสูงสุดไปใช้ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนประชากร 3 กลุ่มต่อไป

2. วิธีการวิจัย

แปรปรวน ดังนี้ คือ

2.1 การวางแผนการทําวิจัย

2.1.1 กำหนดจำนวนกลุ่มประชากรเท่ากับ

การวิจัยในครั้งนี้ กำหนดสถานการณ์ต่าง ๆ 3 กลุ่ม

เพื่อต้องการศึกษาเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของสถิติทดสอบในสถานการณ์ต่าง ๆ ภายใต้ขอบเขตการแจกแจง จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ขนาดตัวอย่าง และความ

3 กลุ่ม

2.1.2 กำหนดขนาดตัวอย่างสุ่ม (n_1, n_2, n_3)

จากแต่ละประชากรเท่ากันและไม่เท่ากัน รวม 2 กรณี คือ

ลักษณะ	จำนวนกลุ่ม	รายละเอียด
ขนาดเท่ากัน	3	(10,10,10), (30,30,30), (50,50,50), (70,70,70), (100,100,100)
ขนาดไม่เท่ากัน	3	(5,10,15), (25,30,35), (45,50,55), (65,70,75), (95,100,105)

2.1.3 กำหนดความแตกต่างของความแปรปรวนโดยใช้ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง (noncentrality parameter, ϕ) เป็นเกณฑ์วัดความแตกต่างของความแปรปรวนของประชากร ดังนี้

ระดับความแตกต่างของความแปรปรวน	จำนวนกลุ่ม	ความแปรปรวนแต่ละกลุ่ม	ϕ
มีความแตกต่างกันน้อย ($0 < \phi < 1.5$)	3	16 : 18 : 20	0.4082
	3	16 : 20 : 24	0.8165
มีความแตกต่างกันปานกลาง ($1.5 \leq \phi < 3$)	3	16 : 26 : 36	2.0412
	3	16 : 28 : 40	2.4495
มีความแตกต่างกันมาก ($\phi \geq 3$)	3	16 : 34 : 52	3.6742
	3	16 : 52 : 88	7.3485

ตารางที่ 1 พารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงปกติ 3 ประชากร ที่ค่าพารามิเตอร์ (μ, σ^2) มีค่าเฉลี่ย $E(X) = \mu$ และค่าความแปรปรวน $V(X) = \sigma^2$

ประชากร 1			ประชากร 2			ประชากร 3			ϕ
(μ, σ^2)	E(X)	V(X)	(μ, σ^2)	E(X)	V(X)	(μ, σ^2)	E(X)	V(X)	
(0, 16)	0	16	(0, 18)	0	18	(0, 20)	0	20	0.4082
(0, 16)	0	16	(0, 20)	0	20	(0, 24)	0	24	0.8165
(0, 16)	0	16	(0, 26)	0	26	(0, 36)	0	36	2.0412
(0, 16)	0	16	(0, 28)	0	28	(0, 40)	0	40	2.4495
(0, 16)	0	16	(0, 34)	0	34	(0, 52)	0	52	3.6742
(0, 16)	0	16	(0, 52)	0	52	(0, 88)	0	88	7.3485

2.1.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงต่าง ๆ ดังนี้

กรณีความแปรปรวนเท่ากัน

(1) กำหนดค่าพารามิเตอร์ (μ, σ^2)

สำหรับการแจกแจงปกติ คือ $(0,16)$ โด่งมาก

(2) กำหนดค่าพารามิเตอร์ (α, β)

สำหรับการแจกแจงแกมมา คือ $(16,1)$ เบ้มาก

กรณีความแปรปรวนไม่เท่ากัน

(1) กำหนดค่าพารามิเตอร์ (μ, σ^2)

สำหรับการแจกแจงปกติ กรณี 3 ประชากร ดังตารางที่ 1

(2) กำหนดค่าพารามิเตอร์ (α, β)

สำหรับการแจกแจงแกมมา กรณี 3 ประชากร ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 พารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร ที่ค่าพารามิเตอร์ (α, β) เมื่อค่าเฉลี่ย $E(X) = \alpha\beta$ และความแปรปรวน $V(X) = \alpha\beta^2$

ประชากร 1			ประชากร 2			ประชากร 3			ϕ
(α, β)	$E(X)$	$V(X)$	(α, β)	$E(X)$	$V(X)$	(α, β)	$E(X)$	$V(X)$	
(16,1)	16	16	(18,1)	18	18	(20,1)	20	20	0.4082
(16,1)	16	16	(20,1)	20	20	(24,1)	24	24	0.8165
(16,1)	16	16	(26,1)	26	26	(36,1)	36	36	2.0412
(16,1)	16	16	(28,1)	28	28	(40,1)	40	40	2.4495
(16,1)	16	16	(34,1)	34	34	(52,1)	52	52	3.6742
(16,1)	16	16	(52,1)	52	52	(88,1)	88	88	7.3485

2.1.5 กำหนดระดับนัยสำคัญ (α) คือ 0.05

2.1.6 ตรวจสอบความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของตัวสถิติทดสอบตามเกณฑ์ของ Bradley [8] ในแต่ละสถานการณ์

2.1.7 เปรียบเทียบกำลังการทดสอบของสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ตามเกณฑ์เพื่อหาสถิติทดสอบที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์

2. การดำเนินงานวิจัย

การวิจัยนี้ได้ศึกษาการเปรียบเทียบประสิทธิภาพความเท่ากันของความแปรปรวนประชากร 3 กลุ่ม

ของสถิติทดสอบ 6 วิธี คือ บาร์ตเลตต์ (Bartlett) เลห์แมน (Lehmann) เลวิน (Levene) บราวน์-ฟอร์ลิตี (Brown-Forsythe) โอ'Brien (O'Brien) และจี (G) โดยมีสมมติฐานที่ใช้ทดสอบ คือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2$ อย่างน้อย 1 คู่; $i, i' = 1, 2, \dots, k$ โดยที่ $i \neq i'$

2.1 สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ (Bartlett's test) (Snedecor and Cochran [9]) ใช้สำหรับทดสอบความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างหลายกลุ่มเหมาะสมสำหรับกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ และจะมีการแจกแจงคล้ายการแจกแจงไคกำลังสอง

สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ คือ

$$B = \frac{(n-k) \ln S_p^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln S_i^2}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) - \frac{1}{n-k} \right]}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, k$

เมื่อ S_p^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างรวม,

S_i^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ i โดยที่

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k,$$

$j = 1, 2, 3, \dots, n_i$, X_{ij} คือ ข้อมูลลำดับที่ j ในกลุ่มตัวอย่างที่ i , $\bar{X}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i , n คือ ขนาดตัวอย่างทั้งหมด, n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i , k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ $k = 3$,

$$4, 5 \text{ และ } S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{n - k} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

เกณฑ์การตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ

$B > \chi_{\alpha; k-1}^2$ โดย α คือ ระดับนัยสำคัญ

2.2 สถิติทดสอบเลห์แมน (Lehman's test)

Lehman [10] ได้เสนอสถิติทดสอบนี้ และ Ghosh [11] ได้พัฒนาโดยเพิ่มในส่วน $(n-k)/(n-2k)$ ซึ่งจะเข้าใกล้การแจกแจงไคกำลังสอง

$$Leh = \frac{(n-k)T}{2n-4k}$$

$$\text{เมื่อ } T = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \left[P_i - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) P_i \right]^2 ;$$

$i = 1, 2, 3, \dots, k$ ซึ่ง $P_i = \ln S_i^2$, n คือ ขนาดตัวอย่างทั้งหมด, n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i , k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ $k = 3, 4, 5$

เกณฑ์การตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ

$Leh > \chi_{\alpha; k-1}^2$ โดย α คือ ระดับนัยสำคัญ

2.3 สถิติทดสอบเลวิน (Levene's test)

(Levene [12]) สถิติทดสอบเลวินเสนอโดยเลวินในปี

ค.ศ. 1960 ใช้สำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน k กลุ่ม โดยไม่กำหนดลักษณะการแจกแจงของตัวแปร

สถิติทดสอบเลวิน คือ

$$Lev = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Z}_{ij} - \bar{Z})^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, k$, $j = 1, 2, 3, \dots, n_i$

เมื่อ $\bar{Z}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i , $\bar{Z}$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง, n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i , k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ $k = 3, 4, 5$, $\bar{Z}_{ij}$ คือ ค่าของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง

โดยที่ $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$ ซึ่ง X_{ij} คือ ข้อมูลลำดับที่ j ในกลุ่มตัวอย่างที่ i , $\bar{X}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i

เกณฑ์การตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ

$Lev > F_{\alpha; k-1, n-k}$ โดย α คือ ระดับนัยสำคัญ

2.4 สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี (Brown-Forsythe' test)

Brown และ Forsythe [13] ได้เสนอตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนซึ่งเป็นสถิติทดสอบที่พัฒนาจากสถิติทดสอบเลวินโดยการใช้ค่ามัธยฐานของกลุ่มตัวอย่างแทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง เนื่องจากว่าถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบสมมาตร การใช้ค่าเฉลี่ยเป็นตัวแทนของกลุ่มตัวอย่างนั้น ๆ จะถือว่าเป็นตัวแทนที่เหมาะสม แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ ค่าที่เหมาะสมมากกว่าค่าเฉลี่ยคือค่ามัธยฐาน ซึ่งสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตีนี้เป็นตัวทดสอบที่มีความแข็งแกร่งต่อการฝ่าฝืนข้อสมมติเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของประชากรที่ไม่เป็นปกติ

สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี คือ

$$BF = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)}$$

$i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i$

เมื่อ $\bar{Z}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยที่แปลงมาของกลุ่มตัวอย่างที่ i , $\bar{Z}$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง, n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i , k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ $k = 3, 4, 5$, Z_{ij} คือ ค่าของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง

โดยที่ $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$ ซึ่ง X_{ij} คือ ข้อมูลลำดับที่ j ของกลุ่มตัวอย่างที่ i , $\bar{X}_i$ คือ ค่ามัธยฐานกลุ่มตัวอย่างที่ i

เกณฑ์ในการตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0

เมื่อ $BF > F_{\alpha; k-1, n-k}$ โดย α คือ ระดับนัยสำคัญ

2.5 สถิติทดสอบโอ'Brien (O'Brien test)

O'Brien [14,15] ศึกษาการเปรียบเทียบนี้ O'Brien [14] กล่าวว่าสถิติทดสอบของเขาเป็นวิธีที่ใช้ได้ทั่วไปซึ่งใช้ได้ดีในข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ O'Brien [15] กล่าวว่าสถิติทดสอบมีความแข็งแกร่งกับข้อมูลที่ไม่ได้มีการแจกแจงปกติ มีความง่ายกับโปรแกรมทางสถิติ เช่น SPSS สามารถใช้ได้ง่ายกับการวางแผน ANOVA ที่แตกต่างกันด้วยขนาดตัวอย่างที่เท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ O'Brien [15] กล่าวว่าไม่ได้มีงานวิจัยในทางสถิติมากนัก

การคำนวณสำหรับสถิติทดสอบนี้ตรงไปตรงมา คำนวณดับทุกค่า X_{ij} ในการศึกษา คือ การแปลง โดยใช้สูตรดังนี้

$$V_{ij} = \frac{(n_i - 1.5)n_i(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 - 0.5S_i^2(n_i - 1)}{(n_i - 1)(n_i - 2)}$$

เมื่อ $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$ คือ ค่าเฉลี่ยสำหรับแต่ละกลุ่ม

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$$

คือ ความแปรปรวนกลุ่มย่อยที่ไม่เอนเอียง

2.6 สถิติทดสอบจี (G test) Nguyen และคณะ [7] สถิติทดสอบจีเป็นอัตราส่วนของผลคูณของความแปรปรวนที่มากที่สุดและจำนวนองศาความเป็นอิสระกับผลบวกของผลคูณของความแปรปรวนแต่ละตัวและจำนวนองศาความเป็นอิสระ

$$G = \frac{v_j S_j^2}{\sum_{i=1}^k v_i S_i^2}$$

เมื่อ $v_i = n_i - 1$, n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i , S_j^2 คือ ความแปรปรวนที่มากที่สุด, v_{pool} คือ จำนวนองศาความเป็นอิสระที่นำมารวมกัน, v_j คือ จำนวนองศาความเป็นอิสระที่สอดคล้องกับความแปรปรวนที่มากที่สุด, k คือ จำนวนกลุ่ม

เกณฑ์ในการตัดสินใจ คือ จะปฏิเสธ H_0

$$\text{เมื่อ } G > \frac{1}{1 + \frac{(v_{pool}/v_j) - 1}{F_{\frac{\alpha}{k}; v_j, v_{pool} - v_j}}}$$

โดย α คือ ระดับนัยสำคัญ

ในการเปรียบเทียบสถิติทดสอบจะพิจารณาจากกำลังการทดสอบ โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

(1) การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 และความแกร่ง

(1.1) จำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลและสุ่มตัวอย่างที่ใช้ในงานวิจัยโดยโปรแกรม R เวอร์ชัน 3.2.2 ให้ข้อมูลมีความแปรปรวนเท่ากัน 3 กลุ่ม ทั้งในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงปกติที่มีการแจกแจงโด่งมาก คือ $N(0,16)$ และประชากรไม่ได้มีการแจกแจงปกติ ได้แก่ การแจกแจงแกมมาที่มีการแจก

แจกแจงแบบ $\Gamma(16,1)$ โดยมีค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างเป็นไปตามขอบเขตการวิจัย

(1.2) ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนประชากร 3 กลุ่ม โดยคำนวณค่าสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 6 วิธี คือ บาร์ตเลตต์ เลห์แมน เลวิน บราวน์-ฟอร์สตี โอปรีน และจี

(1.3) นำค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้ไปเทียบกับค่าวิกฤตเพื่อสรุปว่าจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และบันทึกจำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง ทำซ้ำจนครบ 5,000 ครั้ง จากนั้นหาความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบแต่ละตัว โดยนำจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานหลัก H_0 เมื่อสมมติฐานหลัก H_0 เป็นจริง มาหารด้วย 5,000 นั่นคือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 = จำนวนครั้งของการปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง $\div$ 5,000

(1.4) เปรียบเทียบความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบกับเกณฑ์ของ Bradley ถ้าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการทดลองอยู่ในช่วง $[0.5\alpha, 1.5\alpha]$ สำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ α นั่นคือ ถ้าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการทดลองอยู่ในช่วง $[0.025, 0.075]$ สำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะสรุปได้ว่าสถิติทดสอบนั้นควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้

(1.5) เปรียบเทียบความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบทั้ง 6 วิธี สถิติทดสอบที่มีความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 น้อยที่สุด และอยู่ในเกณฑ์ของ Bradley แสดงว่าสถิติทดสอบนั้นมีความแข็งแกร่งมากที่สุด (Abu-Shawiesh [16] Vrbaneck และ Wang [17])

(2) การคำนวณกำลังการทดสอบ

(2.1) จำลองข้อมูลของประชากรที่ใช้ในงานวิจัย โดยโปรแกรม R ให้ข้อมูลมีความแปรปรวนไม่เท่ากันกรณี 3 กลุ่ม ทั้งในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงปกติที่มีการแจกแจงโด่งมาก คือ $N(0,16)$ และประชากรไม่ได้มีการแจกแจงปกติ ได้แก่ การแจกแจงแกมมาที่มีการแจกแจงเบ้มาก คือ $\Gamma(16,1)$ โดยมีค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างเป็นไปตามขอบเขตการวิจัย

(2.2) ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนประชากร 3 กลุ่ม โดยคำนวณค่าสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 6 วิธี ตามข้อที่ 1.2

(2.3) นำค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้ไปเทียบกับค่าวิกฤตเพื่อสรุปว่าจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และบันทึกจำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อสมมติฐานหลักเป็นเท็จ ทำซ้ำจนครบ 5,000 ครั้ง จากนั้นหากำลังการทดสอบของสถิติทดสอบแต่ละตัว โดยนำจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานหลัก H_0 เมื่อสมมติฐานหลัก H_0 เป็นเท็จ มาหารด้วย 5,000 นั่นคือ กำลังการทดสอบ = จำนวนครั้งของการปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 เป็นเท็จ $\div$ 5,000

(2.4) เปรียบเทียบกำลังการทดสอบของสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เท่ากันตามข้อ 1.4 โดยสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบมากกว่าสถิติทดสอบอื่นใดจะเป็นสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบมากที่สุด ซึ่งจะเป็นสถิติทดสอบที่ดีที่สุด

3. ผลการวิจัย

3.1 ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1

ตารางที่ 3 ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงปกติ 3 ประชากร พารามิเตอร์ (0,16) ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากัน (10,10,10), (30,30,30), (50,50,50), (70,70,70), (100,100,100)

ระดับนัยสำคัญ	สถิติทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)				
		(10,10,10)	(30,30,30)	(50,50,50)	(70,70,70)	(100,100,100)
0.05	บาร์ตเลตต์	0.0496*	0.0438*	0.0488*	0.0504*	0.0536*
	เลห์แมน	0.0970	0.0562*	0.0536*	0.0560*	0.0568*
	เลวิน	0.0652*	0.0536*	0.0510*	0.0548*	0.0544*
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0316*	0.0384*	0.0438*	0.0494*	0.0486*
	โอบริน	0.0358*	0.0390*	0.0458*	0.0498*	0.0484*
	จี	0.0500*	0.0436*	0.0528*	0.0502*	0.0508*

* หมายถึง สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ ตามเกณฑ์ของ Bradley (ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ตกอยู่ในช่วง [0.025, 0.075] สำหรับระดับนัยสำคัญ 0.05)

ตารางที่ 4 ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงปกติ 3 ประชากร พารามิเตอร์ (0,16) ที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (5,10,15), (25,30,35), (45,50,55), (65,70,75), (95,100,105)

ระดับนัยสำคัญ	สถิติทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)				
		(5,10,15)	(25,30,35)	(45,50,55)	(65,70,75)	(95,100,105)
0.05	บาร์ตเลตต์	0.0520*	0.0586*	0.0468*	0.0504*	0.0540*
	เลห์แมน	0.1154	0.0706*	0.0566*	0.0554*	0.0590*
	เลวิน	0.0590*	0.0570*	0.0516*	0.0526*	0.0568*
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0220	0.0448*	0.0438*	0.0472*	0.0518*
	โอบริน	0.0354*	0.0464*	0.0446*	0.0500*	0.0534*
	จี	0.0190	0.0238	0.0192	0.0174	0.0222

3.1.1 กรณีการแจกแจงปกติ 3 ประชากร (0,16) ที่มีลักษณะโด่งมาก การพิจารณาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ตาม

เกณฑ์ของ Bradley สรุปผลได้ดังตารางที่ 3-4 จากตารางที่ 3 พบว่าสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจีสามารถควบคุม

ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุก ๆ กรณีตามเกณฑ์ของ Bradley ส่วนสถิติทดสอบเลห์แมนสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (10,10,10) และสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีมีความแข็งแกร่งมากที่สุด เนื่องจากมีความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 น้อยที่สุด

จากตารางที่ 4 พบว่าสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลวินและสถิติทดสอบโอปรีนสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุก ๆ กรณี สถิติทดสอบเลห์แมนและสถิติ

ทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (5,10,15) ส่วนสถิติทดสอบจีไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุก ๆ กรณี และสถิติทดสอบโอปรีนมีความแข็งแกร่งมากที่สุด

3.1.2 กรณีการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร (16,1) ที่มีลักษณะเบ้มาก

จากการพิจารณาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ตามเกณฑ์ของ Bradley สรุปผลได้ดังตารางที่ 5-6

ตารางที่ 5 ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี สถิติทดสอบโอปรีน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร พารามิเตอร์ (16,1) ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากัน (10,10,10), (30,30,30), (50,50,50), (70,70,70), (100,100,100)

ระดับนัยสำคัญ	สถิติทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)				
		(10,10,10)	(30,30,30)	(50,50,50)	(70,70,70)	(100,100,100)
0.05	บาร์ตเลตต์	0.0634*	0.0740*	0.0758	0.0820	0.0826
	เลห์แมน	0.1124	0.0882	0.0864	0.0862	0.0860
	เลวิน	0.0680*	0.0610*	0.0582*	0.0618*	0.0648*
	บราวน์-ฟอร์สตี	0.0296*	0.0372*	0.0414*	0.0476*	0.0502*
	โอปรีน	0.0352*	0.0444*	0.0436*	0.0482*	0.0526*
	จี	0.0686*	0.0756	0.0736*	0.0764	0.0758

จากตารางที่ 5 พบว่าสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เฉพาะกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (10,10,10) และ (30,30,30) สถิติทดสอบเลห์แมนไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุก ๆ กรณี สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีและสถิติทดสอบโอปรีนสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้

ทุก ๆ กรณี สถิติทดสอบจีสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เฉพาะกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (10,10,10) และ (50,50,50) และสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีมีความแข็งแกร่งที่สุด

จากตารางที่ 6 พบว่าสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เฉพาะกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (5,10,15) และ (25,30,35) สถิติทดสอบเลห์แมนไม่

ตารางที่ 6 ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ของสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร พารามิเตอร์ (16,1) ที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (5,10,15), (25,30,35), (45,50,55), (65,70,75), (95,100,105)

ระดับนัยสำคัญ	สถิติทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)				
		(5,10,15)	(25,30,35)	(45,50,55)	(65,70,75)	(95,100,105)
0.05	บาร์ตเลตต์	0.0556*	0.0740*	0.0794	0.0768	0.0810
	เลห์แมน	0.1260	0.0882	0.0890	0.0802	0.0854
	เลวิน	0.0682*	0.0644*	0.0694*	0.0630*	0.0628*
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0230	0.0424*	0.0482*	0.0480*	0.0476*
	โอบริน	0.0444*	0.0484*	0.0498*	0.0474*	0.0504*
	จี	0.0230	0.0298*	0.0322*	0.0378*	0.0392*

ตารางที่ 7 กำลังการทดสอบสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงปกติ 3 ประชากร พารามิเตอร์ (0,16) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากัน (10,10,10), (30,30,30), (50,50,50), (70,70,70), (100,100,100)

ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)	สถิติทดสอบ	ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง					
		0.4082	0.8165	2.0412	2.4495	3.6742	7.3485
(10,10,10)	บาร์ตเลตต์	0.0568	0.0760	0.1506	0.1862*	0.2940*	0.5718*
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.0672*	0.0886*	0.1542*	0.1802	0.2578	0.4600
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0362	0.0486	0.0896	0.1124	0.1584	0.3110
	โอบริน	0.0372	0.0468	0.0922	0.1096	0.1506	0.2516
	จี	0.0568	0.0780	0.1428	0.1622	0.2300	0.3784
(30,30,30)	บาร์ตเลตต์	0.0810	0.1458	0.4638	0.5654	0.8188	0.9922
	เลห์แมน	0.0978*	0.1710*	0.5034*	0.6074*	0.8484*	0.9954*
	เลวิน	0.0838	0.1398	0.4084	0.4966	0.7342	0.9702
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0644	0.1146	0.3564	0.4426	0.6820	0.9552
	โอบริน	0.0708	0.1236	0.3756	0.4590	0.6906	0.9426
	จี	0.0758	0.1326	0.3618	0.4356	0.6048	0.8302

- หมายถึง ไม่พิจารณา กำลังการทดสอบของสถิติทดสอบ เนื่องจากไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้; * หมายถึง สถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุด จากการพิจารณาผ่านเกณฑ์ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ในตารางที่ 3 และ 4 ตามลำดับ

ตารางที่ 7 (ต่อ)

ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)	สถิติทดสอบ	ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง					
		0.4082	0.8165	2.0412	2.4495	3.6742	7.3485
(50,50,50)	บาร์ตเลตต์	0.1022	0.2256	0.7170	0.8134	0.9724	0.9998
	เลห์แมน	0.1112*	0.2452*	0.7376*	0.8324*	0.9778*	1.0000*
	เลวิน	0.0976	0.1960	0.6410	0.7476	0.9364	0.9998
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0856	0.1734	0.6090	0.7182	0.9236	0.9996
	โอบรีน	0.0920	0.1970	0.6524	0.7568	0.9370	0.9990
	จี	0.0978	0.1950	0.5614	0.6394	0.8316	0.9742
(70,70,70)	บาร์ตเลตต์	0.1148	0.2980	0.8546	0.9354	0.9954	1.0000
	เลห์แมน	0.1254*	0.3116*	0.8696*	0.9432*	0.9958*	1.0000*
	เลวิน	0.1084	0.2582	0.7966	0.8858	0.9864	1.0000
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0986	0.2438	0.7786	0.8724	0.9834	1.0000
	โอบรีน	0.1104	0.2734	0.8170	0.9070	0.9906	1.0000
	จี	0.1098	0.2530	0.6930	0.8012	0.9354	0.9988
(100,100,100)	บาร์ตเลตต์	0.1538	0.4130	0.9562	0.9884	1.0000	1.0000
	เลห์แมน	0.1610*	0.4282*	0.9592*	0.9898*	1.0000*	1.0000*
	เลวิน	0.1422	0.3646	0.9218	0.9752	0.9994	1.0000
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.1338	0.3498	0.9158	0.9714	0.9994	1.0000
	โอบรีน	0.1504	0.3860	0.9424	0.9852	0.9996	1.0000
	จี	0.1338	0.3320	0.8516	0.9160	0.9916	0.9998

สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุก ๆ กรณี สถิติทดสอบเลวินและสถิติทดสอบโอบรีนสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุก ๆ กรณี สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์สตีและสถิติทดสอบจีสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (5,10,15) และสถิติทดสอบโอบรีนมีความแม่นยำมากที่สุด

3.2 การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบ

การสรุปผลกำลังการทดสอบของสถิติทดสอบจะแสดงในกรณีที่สถิติทดสอบสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เท่านั้น

3.2.1 กรณีการแจกแจงปกติ 3 ประชากร (0,16) ที่มีลักษณะโด่งมา

จากการพิจารณาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในตอนต้น นำมาพิจารณากำลังการทดสอบ กรณีที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 สรุปผลได้ดังตารางที่ 7-8

จากตารางที่ 7 กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (10,10,10) สถิติทดสอบเลวินมีกำลังการทดสอบสูงที่สุดเมื่อค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลางเป็น 0.4082, 0.8165 และ 2.0412 ส่วนที่ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลางเป็น 2.4495, 3.6742 และ 7.3485 สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีที่

ตารางที่ 8 กำลังการทดสอบสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์สตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงปกติ 3 ประชากร พารามิเตอร์ (0,16) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (5,10,15), (25,30,35), (45,50,55), (65,70,75), (95,100,105)

ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)	สถิติทดสอบ	ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง					
		0.4082	0.8165	2.0412	2.4495	3.6742	7.3485
(5,10,15)	บาร์ตเลตต์	0.0574	0.0684*	0.1086*	0.1350*	0.1796*	0.3264*
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.0664*	0.0662	0.1016	0.1206	0.1592	0.2526
	บรวาน์-ฟอร์สตี	-	-	-	-	-	-
	โอบริน	0.0282	0.0256	0.0338	0.0388	0.0508	0.0730
	จี	-	-	-	-	-	-
(25,30,35)	บาร์ตเลตต์	0.0732	0.1414	0.4422	0.5522	0.7754	0.9866
	เลห์แมน	0.0954*	0.1722*	0.5002*	0.6062*	0.8256*	0.9928*
	เลวิน	0.0698	0.1246	0.3818	0.4654	0.6868	0.9530
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0566	0.1000	0.3346	0.4154	0.6394	0.9376
	โอบริน	0.0552	0.0978	0.3212	0.4054	0.6058	0.8932
	จี	-	-	-	-	-	-
(45,50,55)	บาร์ตเลตต์	0.0962	0.2182	0.7066	0.8188	0.9614	1.0000
	เลห์แมน	0.1100*	0.2448*	0.7384*	0.8426*	0.9692*	1.0000*
	เลวิน	0.0910	0.1978	0.6220	0.7412	0.9182	0.9996
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0788	0.1744	0.5914	0.7158	0.9100	0.9996
	โอบริน	0.0836	0.1892	0.6170	0.7368	0.9190	0.9990
	จี	-	-	-	-	-	-
(65,70,75)	บาร์ตเลตต์	0.1160	0.2908	0.8638	0.9282	0.9942	1.0000
	เลห์แมน	0.1272*	0.3086*	0.8826*	0.9374*	0.9950*	1.0000*
	เลวิน	0.1058	0.2662	0.7934	0.8810	0.9878	1.0000
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0948	0.2454	0.7784	0.8716	0.9864	1.0000
	โอบริน	0.1012	0.2650	0.8072	0.8930	0.9890	1.0000
	จี	-	-	-	-	-	-
(95,100,105)	บาร์ตเลตต์	0.1464	0.4200	0.9578	0.9868	0.9998	1.0000
	เลห์แมน	0.1552*	0.4308*	0.9620*	0.9886*	0.9998*	1.0000*
	เลวิน	0.1332	0.3648	0.9266	0.9732	0.9994	1.0000
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.1256	0.3518	0.9198	0.9708	0.9992	1.0000
	โอบริน	0.1370	0.3904	0.9394	0.9816	0.9996	1.0000
	จี	-	-	-	-	-	-

ขนาดตัวอย่างเป็น (30,30,30), (50,50,50), (70,70,70) และ (100,100,100) สถิติทดสอบเลห์แมนมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด

จากตารางที่ 8 กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (5,10,15) สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดเกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ค่าพารามิเตอร์หางศูนย์กลางเป็น 0.4082 สถิติทดสอบเลวินมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (25,30,35), (45,50,55), (65,70,75) และ (95,100,105) สถิติทดสอบเลห์แมนมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด

3.2.2 กรณีการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร (16,1) ที่มีลักษณะเบ้มาก

จากการพิจารณาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในตอนต้น นำมาพิจารณากำลังการทดสอบ กรณีที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 สรุปผลได้ดังตารางที่ 9-10

จากตารางที่ 9 กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (10,10,10) และ (30,30,30) สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุด กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (50,50,50) สถิติทดสอบเลวินมีกำลังการทดสอบสูงที่สุดเกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลางเป็น 0.4082 และ 0.8165 สถิติทดสอบจีมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด และกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (70,70,70) และ (100,100,100) สถิติทดสอบเลวินมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด

จากตารางที่ 10 กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (5,10,15), (25,30,35) สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุด กรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (45,50,55) สถิติทดสอบเลวินมีกำลังการทดสอบสูงที่สุดเกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลางเป็น 0.4082 และ 0.8165 สถิติทดสอบจีมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด และกรณีที่ขนาดตัวอย่างเป็น (65,70,75), (95,100,105) สถิติทดสอบเลวินมีกำลัง

การทดสอบสูงที่สุดเกือบทุกกรณี ยกเว้นกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลางเป็น 0.4082 สถิติทดสอบจีมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด

4. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เราจะสรุปผลโดยแบ่งเป็น 3 ส่วน คือ ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ความแกร่ง และผลการวิเคราะห์กำลังการทดสอบของสถิติทดสอบ 6 ตัว คือ สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอปรีน และสถิติทดสอบจี จากการจำลองข้อมูลตามการแจกแจง ระดับนัยสำคัญ และขนาดตัวอย่างต่าง ๆ ตามขอบเขตการวิจัย ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

4.1.1 ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1

ในกรณีการแจกแจงปกติ (0,16) ที่มีลักษณะโด่งมาก สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลวิน และสถิติทดสอบโอปรีนสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ทุกกรณี สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตีส่วนใหญ่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ สถิติทดสอบเลห์แมนไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเล็ก และสถิติทดสอบจีไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ส่วนในกรณีการแจกแจงแกมมา (16,1) ที่มีลักษณะเบ้มาก สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ ไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างใหญ่ สถิติทดสอบเลห์แมนไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในทุกกรณี สถิติทดสอบเลวินและสถิติทดสอบ

ตารางที่ 9 กำลังการทดสอบสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์สตี สถิติทดสอบโอปรีน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร พารามิเตอร์ (16,1) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากัน (10,10,10), (30,30,30), (50,50,50), (70,70,70), (100,100,100)

ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)	สถิติทดสอบ	ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง					
		0.4082	0.8165	2.0412	2.4495	3.6742	7.3485
(10,10,10)	บาร์ตเลตต์	0.1168*	0.1320*	0.2134*	0.2500*	0.3524*	0.6002*
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1014	0.1094	0.1848	0.2130	0.2864	0.4816
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0438	0.0466	0.0900	0.1170	0.1678	0.3310
	โอปรีน	0.0520	0.0484	0.0958	0.1200	0.1564	0.2662
	จี	0.1160	0.1276	0.1880	0.2148	0.2780	0.4030
(30,30,30)	บาร์ตเลตต์	0.1762*	0.2372*	0.5242*	0.6012*	0.7972*	0.9776*
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1198	0.1750	0.4332	0.5112	0.7174	0.9586
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0662	0.1114	0.3522	0.4374	0.6572	0.9458
	โอปรีน	0.0702	0.1130	0.3294	0.3960	0.5818	0.8788
	จี	-	-	-	-	-	-
(50,50,50)	บาร์ตเลตต์	-	-	-	-	-	-
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1284	0.2422	0.6408*	0.7454*	0.9212*	0.9982*
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.0816	0.1810	0.5844	0.6982	0.9040	0.9978
	โอปรีน	0.0758	0.1668	0.5214	0.6260	0.8482	0.9910
	จี	0.1772*	0.2826*	0.5676	0.6544	0.8214	0.9690
(70,70,70)	บาร์ตเลตต์	-	-	-	-	-	-
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1526*	0.3000*	0.7884*	0.8636*	0.9790*	1.0000*
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.1030	0.2378	0.7496	0.8432	0.9764	1.0000
	โอปรีน	0.0894	0.2100	0.6880	0.7850	0.9428	0.9994
	จี	-	-	-	-	-	-
(100,100,100)	บาร์ตเลตต์	-	-	-	-	-	-
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1786*	0.3912*	0.9154*	0.9626*	0.9984*	1.0000*
	บรวาน์-ฟอร์สตี	0.1288	0.3328	0.9066	0.9590	0.9980	1.0000
	โอปรีน	0.1106	0.2688	0.8412	0.9092	0.9910	1.0000
	จี	-	-	-	-	-	-

ตารางที่ 10 กำลังการทดสอบสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบรวาน์-ฟอร์ลิตี สถิติทดสอบโอบริน และสถิติทดสอบจี กรณีการแจกแจงแกมมา 3 ประชากร พารามิเตอร์ (16,1) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน (5,10,15), (25,30,35), (45,50,55), (65,70,75), (95,100,105)

ขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3)	สถิติทดสอบ	ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง					
		0.4082	0.8165	2.0412	2.4495	3.6742	7.3485
(5,10,15)	บาร์ตเลตต์	0.1118*	0.1142*	0.1672*	0.1806*	0.2406*	0.3738*
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1012	0.0966	0.1334	0.1324	0.1818	0.2710
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	-	-	-	-	-	-
	โอบริน	0.0458	0.0324	0.0436	0.0404	0.0534	0.0760
	จี	-	-	-	-	-	-
(25,30,35)	บาร์ตเลตต์	0.1684*	0.2300*	0.4902*	0.5808*	0.7714*	0.9672*
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1070	0.1658	0.3976	0.4896	0.6866	0.9416
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0546	0.1080	0.3158	0.4102	0.6274	0.9280
	โอบริน	0.0554	0.0914	0.2572	0.3318	0.5130	0.8192
	จี	0.1028	0.1640	0.3560	0.4064	0.5488	0.7738
(45,50,55)	บาร์ตเลตต์	-	-	-	-	-	-
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1224	0.2304	0.6200*	0.7240*	0.9144*	0.9978*
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0728	0.1726	0.5660	0.6844	0.8930	0.9977
	โอบริน	0.0694	0.1494	0.4822	0.5980	0.8228	0.9858
	จี	0.1292*	0.2408*	0.5264	0.6050	0.7816	0.9392
(65,70,75)	บาร์ตเลตต์	-	-	-	-	-	-
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1438	0.3004*	0.7844*	0.8696*	0.9784*	0.9998*
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.0932	0.2360	0.7554	0.8492	0.9748	0.9998
	โอบริน	0.0822	0.1974	0.6670	0.7764	0.9424	0.9984
	จี	0.1620*	0.2972	0.6762	0.7452	0.8934	0.9860
(95,100,105)	บาร์ตเลตต์	-	-	-	-	-	-
	เลห์แมน	-	-	-	-	-	-
	เลวิน	0.1736	0.3976*	0.9088*	0.9640*	0.9982*	1.0000*
	บรวาน์-ฟอร์ลิตี	0.1232	0.3398	0.8972	0.9604	0.9965	1.0000
	โอบริน	0.1064	0.2852	0.8266	0.9128	0.9904	1.0000
	จี	0.1960*	0.3852	0.8094	0.8810	0.9698	0.9996

โอบรีนสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในทุกกรณี สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตส์ส่วนใหญ่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ และสถิติทดสอบจีส่วนใหญ่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

4.1.2 ความแกร่ง

ในกรณีการแจกแจงปกติ (0,16) ที่มีลักษณะโด่งมาก สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตส์มีความแกร่งมากที่สุดในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากัน ส่วนสถิติทดสอบโอบรีนมีความแกร่งมากที่สุดในกรณีขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน ส่วนในกรณีการแจกแจงแกมมา (16,1) ที่มีลักษณะเบ้มาก สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตส์มีความแกร่งมากที่สุดในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากัน ส่วนสถิติทดสอบโอบรีนมีความแกร่งมากที่สุดในกรณีขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

4.1.3 การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบ

ในกรณีการแจกแจงปกติ (0,16) ที่มีลักษณะโด่งมาก สถิติทดสอบเลห์แมนส่วนใหญ่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุด ยกเว้นตัวอย่างขนาดเล็ก สถิติทดสอบเลวินและบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุด ส่วนในกรณีการแจกแจงแกมมา (16,1) ที่มีลักษณะเบ้มาก สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีตัวอย่างขนาดเล็ก สถิติทดสอบเลวินส่วนใหญ่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่

4.2 ข้อเสนอแนะ

4.2.1 ด้านการนำไปใช้ประโยชน์

การวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเลือกสถิติทดสอบที่เหมาะสมสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3 กลุ่มกับประชากรที่มีการแจกแจงปกติและประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา

4.2.2 ด้านการศึกษาและวิจัยต่อไป

(1) ศึกษา กำลังการทดสอบของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร โดยใช้การแจกแจงที่มีพารามิเตอร์อื่น ๆ ที่แตกต่างจากที่ผู้วิจัยได้ศึกษาไว้ หรือใช้การแจกแจงอื่น ๆ เช่น การแจกแจงไวบูลล์ การแจกแจงเบต้า

(2) ศึกษา กำลังการทดสอบของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร โดยเพิ่มสถิติทดสอบจากที่ศึกษาไปแล้ว เพื่อขยายขอบเขตการศึกษาให้กว้างขึ้น

(3) ศึกษา กำลังการทดสอบของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร โดยศึกษาในกรณีที่ขนาดตัวอย่างอื่น ๆ นอกเหนือจากที่ได้ศึกษาในการวิจัยนี้

(4) ในงานวิจัยนี้ผลที่สรุปได้ คือ ถ้าความแปรปรวนเพิ่มขึ้น กำลังการทดสอบจะสูงขึ้น แต่ในความเป็นจริงแล้วถ้าความแปรปรวนเพิ่มขึ้น กำลังการทดสอบจะลดลง แต่อาจขึ้นอยู่กับการแจกแจงหรือขนาดตัวอย่าง

5. รายการอ้างอิง

- [1] กุสุมา อุมาริ, ชลิตา รัตนวรสุทธิ์ และรมิตา ศรีภากร, 2558, การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน และสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตส์ สำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 3 กลุ่ม โดยใช้โปรแกรมอาร์, ปัญหาพิเศษระดับปริญญาตรี, ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, กรุงเทพฯ.
- [2] ยาวภา ไชยศรี, 2542, การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวทดสอบสถิติบาร์ตเลต เลวินและบราวน์ฟอร์ลิตส์สำหรับทดสอบความเท่ากันของ

- ความแปรปรวนประชากร, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.
- [3] Box, G.E.P., 1953, Non-normality and tests on variances, *Biometrika* 40: 318-335.
- [4] Manoukian, E.B., Maurais, J. and Ouimet, R., 1986, Exact critical values of Bartlett's test of homogeneity of variances for unequal sample sizes for two populations and power of the test, *Metrika* 33: 275-289.
- [5] สมประสงค์ ลิทธิสมบัติ, วิโรจน์ มงคลเทพ และเพ็ญ สายปาระ, 2553, การเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติและการแจกแจงแบบแกมมา, น. 99-110, การประชุมวิชาการสถิติและสถิติประยุกต์ ครั้งที่ 11, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านน่าน, น่าน.
- [6] ดวงพร พัชชะวนิช, 2557, การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน, ว.วิทยาศาสตร์ลาดกระบัง 23(1): 17-28.
- [7] Nguyen, D.T., Pham, T.V., Gil, P.R., Hicks, T., Wang, Y., Li, I., Bellara, A., Romano, J.L., Kim, E.S., Holmes, H., Chen, Y.H. and Kromrey, J.D., ANOVA_HOV: A SAS Macro for homogeneity of variance in one-factor ANOVA models, *SESUG* 2014: 1-3.
- [8] Bradley, J.V., 1978, Robustness, *Br. J. Math. Stat. Psychol.* 31(2): 144-152.
- [9] Snedecor, G.W. and Cochran, W.G., 1989, *Statistical methods*, 8th Ed., Iowa State University Press, Iowa.
- [10] Lehmann, E.L., 1959, *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley and Sons, New York.
- [11] Ghosh, A., 1972, A comparative histological survey of the avian adrenocortical homologue, *Arch. Histol. Jap.* 34: 419-432.
- [12] Levene, H., 1960, Robust Testes for Equality of Variances, pp. 278-292, In Olkin, I. (Ed.), *Contributions to Probability and Statistics*, Stanford University Press, Palo Alto, C.A.
- [13] Brown, M.B. and Forsythe, A.B., 1974, Robust tests for the equality of variances, *J. Amer. Stat. Assoc.* 69(346): 364-367.
- [14] O'Brien, R.G., 1978, Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs, *Psychometrika* 43: 327-342.
- [15] O'Brien, R.G. 1981, A simple test for variance effects in experimental designs, *Psychol. Bull.* 89: 570-574.
- [16] Abu-Shawiesh, M.O.A., 2008, A simple robust control chart based on MAD, *J. Math. Stat.* 4: 102-107.
- [17] Vrbánek, Jr., J. and Wang, W., 2007, Data-driven forecasting schemes: Evaluation and applications, *J. Comput. Sci.* 3: 747-753.