การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

A Comparison on Confidence Intervals Estimation Methods for the Exponential Population Mean

รุ่งตะวัน วัฒนธร และ ชินนะพงษ์ บำรุงทรัพย์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ปทุมธานี 12121

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ด้วยวิธี 6 วิธี คือ วิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีปรับค่าของวาลด์ วิธีเบส์ วิธีบูตสแตรปสคอร์ และวิธีบูตสแตรปเบส์ โดยเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณา คือ ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 5, 10, 25, 50 และ 100 ค่าเฉลี่ยประชากร (β) มีค่าเท่ากับ 1, 5, 10, 20 และ 30 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สำหรับวิธีเบส์และวิธีบูตสแตรปเบส์ มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมาพารามิเตอร์ α_0, β_0 โดยที่ $(\alpha_0, \beta_0) = (0.5,2), (0.5,3), (1,1)$ และ $(1,2)$ ข้อมูลที่ใช้ศึกษาได้จากการสร้างแบบจำลองโดยใช้วิธีการมอนติคาร์โล เพื่อจำลองการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ของการศึกษา ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

กรณีตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 50$) วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด สามารถพิจารณาได้ดังนี้ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และวิธีบูตสแตรปเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และแกมมา(1,2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ยกเว้นกรณีที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ และวิธีบูตสแตรปเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(1,2)

กรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 50$) วิธีการประมาณค่าทุกวิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยที่วิธีวาลด์เป็นวิธีที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกค่าเฉลี่ยประชากรที่ทำการศึกษา

คำสำคัญ: การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ช่วงความเชื่อมั่น ความน่าจะเป็นครอบคลุม ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น ค่าเฉลี่ยประชากร วิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีปรับค่าของวาลด์ วิธีเบส์ การสุ่มซ้ำด้วยวิธีบูตสแตรป

Abstract

The objective of this study is to compare six interval estimation methods for the exponential population mean; the methods are Wald method, Score method, Adjusted Wald method, Bayes' method, Bootstrap Score method and Bootstrap Bayes' method. The comparison criteria are based on the coverage probability and the average length of the confidence intervals. The study is performed using sample sizes (n) equal to 5, 10, 25, 50 and 100 whereas population means (β) are 1, 5, 10, 20, and 30, 95% confidence level is used. For Bayes' method and Bootstrap Bayes' method using gamma(0.5,2) gamma(0.5,3) gamma(1,1) and gamma(1,2) as prior distributions. The data are generated through Monte Carlo simulation technique and for each case the simulation is repeated 1,000 times. Results of the research are as follows:

For small sample size $(n < 50)$, the method that has smallest average length confidence interval among the methods that have coverage probabilities not lower than the given confidence coefficient are as follows: when sample size equal to 5, the methods are Bayes' method using gamma(0.5,3) as prior distribution and Bootstrap Bayes' method using gamma(0.5,3) and gamma(1,2) as prior distributions. When sample size equal to 10, the methods are Bayes' method using gamma(0.5,3) as prior distribution and Bootstrap Bayes' method except when prior distribution is gamma(0.5,2). When sample size equal to 25, the methods are Bayes' method and Bootstrap Bayes' method using gamma(1,2) as prior distribution.

For large sample size $(n \geq 50)$, all methods have the coverage probabilities not lower than the given confidence coefficient but Wald method has the smallest average length confidence interval for all population means.

Keywords: exponential distribution, confidence interval, coverage probability, average length, population mean, wald method, score method, adjusted wald method, Bayes' method, bootstrap resampling.

1. บทนำ

ในการศึกษาลักษณะของข้อมูลใดๆนั้น ผู้วิจัยคาดหวังที่จะนำผลวิจัยที่ได้ไปใช้ในการวิเคราะห์ สรุปผล หรือหาแนวโน้มที่จะประมาณค่าต่างๆ เพื่อนำไปใช้ประโยชน์ในการศึกษา เมื่อต้องการทราบลักษณะใดๆ ของประชากรนั้น ถ้าจำนวนของประชากรที่ทำการศึกษามีจำนวนไม่มากนัก สามารถทราบลักษณะต่างๆของประชากร โดยการพิจารณาข้อมูลจากประชากรทั้งหมดได้โดยตรง แต่ถ้าประชากรที่ศึกษามีขนาดใหญ่จะเป็นการยากที่จะทราบลักษณะของประชากรนั้นได้ ดังนั้นจึงนำการอนุมานเชิงสถิติ (Statistical inference) มาใช้ในการศึกษา โดยการอนุมานเชิงสถิติเป็นวิธีการใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่าง เพื่อสรุปผลเกี่ยวกับประชากร ซึ่งสามารถแยกได้เป็น 2 ลักษณะ คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter estimation) และการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ (Statistical hypothesis testing)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในทางสถิติ มีแนวคิด โดยทั่วไปว่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า เนื่องจากจะหาค่าพารามิเตอร์ได้ต่อเมื่อทราบข้อมูลจากประชากรทั้งหมด จึงเป็นเรื่องยากที่จะรวบรวมข้อมูลทั้งหมดจากประชากร เนื่องจากโดยทั่วไปประชากรมีขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงใช้ข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งจะได้ตัวสถิติ เพื่อใช้อ้างอิงถึงพารามิเตอร์ในประชากร วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์มี 2 ชนิด คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval estimation) การประมาณค่าแบบช่วงเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรในช่วงๆหนึ่งที่เชื่อว่าจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ด้วยระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยใช้ค่าประมาณแบบจุดและการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวสถิติในการพิจารณา ช่วงความเชื่อมั่นจะบอกถึงขีดจำกัดล่าง (Lower limit) และขีดจำกัดบน (Upper limit) ของค่าพารามิเตอร์ นั่นคือ $P(L < \theta < U) = 1-\alpha$ จะได้ว่าค่าพารามิเตอร์ θ มีค่าอยู่ในช่วง (L,U) ด้วยระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง มีวิธีที่ใช้ในการพิจารณาหลากหลายวิธี โดยวิธีที่มีการนำเสนอในวิชาสถิติพื้นฐานหรือตำราเรียนทางด้านสถิติทั่วไป คือ วิธีวาลด์ (Wald method) เป็นวิธีที่มีสูตรซึ่งนำไปใช้ได้ง่ายและสะดวกต่อการอธิบาย โดยอาศัยทฤษฎีการลู่เข้าสู่ส่วนกลาง วิธีเบส์ (Bayes' method) เป็นวิธีที่นำความรู้เดิมที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์กับข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมมาใช้ประโยชน์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ให้ดียิ่งขึ้น อย่างไรก็ตาม วิธีวาลด์จะเป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสม เมื่อตัวอย่างที่ทำการศึกษามีขนาดใหญ่ เพราะจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด [1] แต่ในทางปฏิบัติอาจจะไม่สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลจำนวนมากได้ จึงมีผู้วิจัยได้พิจารณาการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงโดยวิธีการอื่น ดังนี้

Wilson [3] เสนอวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับสัดส่วนประชากร โดยช่วงความเชื่อมั่นที่สร้างขึ้น ได้จากการพิจารณาตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานแบบสองทาง โดยมีพื้นฐานจากทฤษฎีการลู่เข้าสู่ส่วนกลางและจัดให้อยู่ในรูปสมการกำลังสอง โดยเรียกวิธีการนี้ว่าวิธีสคอร์ Agresti and Coull [2] ศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าสัดส่วนประชากรในการแจกแจงทวินาม ระหว่างวิธีวาลด์ วิธีสคอร์และวิธีปรับค่าของวาลด์ ผู้ศึกษาพบว่า วิธีสคอร์และวิธีปรับค่าของวาลด์ ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด แม้ตัวอย่างที่ทำการศึกษามีขนาดเล็ก Elfessi and Reineke [4] ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ระหว่างวิธีตัวประมาณแบบเดิมกับตัวประมาณแบบเบส์ โดยตัวประมาณแบบเดิมที่ใช้ในการพิจารณามี 3 วิธี คือ ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุด ตัวประมาณไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดสม่ำเสมอ และตัวประมาณค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด ผู้ศึกษาพบว่าตัวประมาณแบบเบส์ มีความสัมพันธ์กับตัวประมาณแบบเดิม เมื่อ $\beta = 0$ นั่นคือ เมื่อ $\alpha = -2, \beta = 0$ ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ มีค่าเท่ากับตัวประมาณค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด เมื่อ $\alpha = -1, \beta = 0$ ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ มีค่าเท่ากับตัวประมาณไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดสม่ำเสมอ เมื่อ $\alpha = 0, \beta = 0$ ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์แบบเบส์ มีค่าเท่ากับตัวประมาณความ

ควรจะเป็นสูงสุด ฟองนวล วงศ์ตะวัน [5] ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสัดส่วนในการแจกแจงทวินาม และค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปัวซงด้วยวิธีประมาณ 5 วิธีคือ วิธีสคอร์ วิธีประมาณค่าต่ำที่สุด วิธีเบส์โดยใช้การแจกแจงก่อนแบบเจฟฟรีย์และคอนจูเกต และวิธีบูตสแตรปสคอร์ ผู้ศึกษาพบว่าวิธีสคอร์ วิธีประมาณค่าต่ำที่สุด วิธีเบส์โดยใช้การแจกแจงก่อนแบบเจฟเฟร์และคอนจูเกต และวิธีบูตสแตรปสคอร์ ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดเป็นส่วนใหญ่ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99%

จากแนวคิดต่างๆที่เกี่ยวกับการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าพารามิเตอร์ ดังที่ได้กล่าวในข้างต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแบบเลขชี้กำลัง ด้วยวิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีปรับค่าของวาลด์ วิธีเบส์ วิธีบูตสแตรปสคอร์และวิธีบูตสแตรปเบส์ โดยเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณา คือค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น เพื่อหาวิธีการประมาณที่เหมาะสมภายใต้ขอบเขตของการศึกษาเดียวกัน

2. ขอบเขตการวิจัย

2.1 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) ที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ 5, 10, 25, 50 และ 100 ระดับความเชื่อมั่นเท่ากับ 95%

2.2 สำหรับวิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีปรับค่าของวาลด์ และวิธีบูตสแตรปสคอร์ พิจารณาให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์ β มีค่าเท่ากับ 1, 5, 10, 20 และ 30

2.3 สำหรับวิธีเบส์และวิธีบูตสแตรปเบส์ พิจารณาให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์ β โดย β เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ ที่มีการแจกแจงแกมมาพารามิเตอร์ α_0, β_0 กำหนดให้ $\beta = 1, 5, 10, 20$ และ 30 $(\alpha_0, \beta_0) = (0.5,2), (0.5,3), (1,1), (1,2)$ โดยเลือกค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน มีค่าใกล้เคียงกับค่าพารามิเตอร์ที่ Elfessi และ Reineke ศึกษา

2.4 ข้อมูลที่ใช้ศึกษาได้จากการสร้างแบบจำลองโดยใช้วิธีการมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation technique) เพื่อจำลองการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ของการศึกษา โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ โปรแกรม R เวอร์ชัน 2.9.1

3. วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัย มีขั้นตอนดังนี้

3.1 การจำลองข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

จำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง กำหนดขนาดตัวอย่าง ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงของข้อมูล ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ระดับนัยสำคัญ และจำนวนครั้งที่ทำซ้ำ สร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยโดยใช้วิธีการมอนติคาร์โล

3.2 การคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร (β) เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

ในการคำนวณหาขีดจำกัดล่าง (β_L) และขีดจำกัดบน (β_U) ของช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธีมีสูตรดังนี้

3.2.1 วิธีวาลด์ (Wald method) ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น เป็นดังนี้

$$\beta_{LW} = \hat{\beta} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{n}}$$

$$\beta_{UW} = \hat{\beta} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{n}}$$

โดยที่ $\hat{\beta} = \overline{X}$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ คือ ควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน

3.2.2 วิธีสคอร์(Score method) ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น เป็นดังนี้

$$\beta_{LS} = \frac{n\hat{\beta} - Z_{\alpha/2}\sqrt{n\hat{\beta}^2}}{n - Z^2_{\alpha/2}}$$

$$\beta_{US} = \frac{n\hat{\beta} + Z_{\alpha/2}\sqrt{n\hat{\beta}^2}}{n - Z^2_{\alpha/2}}$$

3.2.3 วิธีปรับค่าของวาลด์ (Adjusted Wald method) ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น เป็นดังนี้

$$\beta_{LAW} = \tilde{\beta} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{n}}}$$

$$\beta_{UAW} = \tilde{\beta} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{n}}}$$

3.2.4 วิธีเบส์ (Bayes' method) ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น เป็นดังนี้

$$\beta_{LB} = \frac{2\left(\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)}{\beta_0 \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, 2(n+\alpha_0)}}$$

$$\beta_{UB} = \frac{2\left(\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)}{\beta_0 \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 2(n+\alpha_0)}}$$

โดย $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, 2(n+\alpha_0)}$ คือ ควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงไคกำลังสอง ที่มีองศาเสรีเท่ากับ $2(n+\alpha_0)$

3.2.5 วิธีบูตสแตรปสคอร์ (Bootstrap Score method) ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น เป็นดังนี้

$$\beta_{LBS} = \frac{\sum_{i=1}^{B} \beta^*_{LBS}}{B}$$

$$\beta_{UBS} = \frac{\sum_{i=1}^{B} \beta^*_{UBS}}{B}$$

โดยที่ $$\beta^*_{LBS} = \frac{n\hat{\beta} - Z_{\alpha/2}\sqrt{n\hat{\beta}^2}}{n - Z^2_{\alpha/2}}$$

$$\beta^*_{UBS} = \frac{n\hat{\beta} + Z_{\alpha/2}\sqrt{n\hat{\beta}^2}}{n - Z^2_{\alpha/2}}$$

B คือ จำนวนรอบที่สุ่มซ้ำด้วยวิธีบูตสแตรป ในที่นี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 200

3.2.6 วิธีบูตสแตรปเบส์ (Bootstrap Bayes' method) ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น เป็นดังนี้

$$\beta_{LBB} = \frac{\sum_{i=1}^{B} \beta^*_{LBB}}{B}$$

$$\beta_{UBB} = \frac{\sum_{i=1}^{B} \beta^*_{UBB}}{B}$$

โดยที่ $$\beta^*_{LBB} = \frac{2\left(\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)}{\beta_0 \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, 2(n+\alpha_0)}}$$

$$\beta^*_{UBB} = \frac{2\left(\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)}{\beta_0 \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 2(n+\alpha_0)}}$$

3.3 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น

การคำนวณค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม (Coverage Probability: CP) มีขั้นตอนในการดำเนินการดังนี้

เมื่อทำการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธีแล้ว จะทำการพิจารณาต่อว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการทดลองนั้นครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร (β) หรือไม่ ถ้าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการทดลองครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร จะนับจำนวนครั้งและบวกสะสมค่าไว้ โดยจะทำซ้ำเช่นนี้จำนวน $M = 1{,}000$ ครั้ง ดังนั้นจะได้ว่าค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากรหารด้วยจำนวนครั้งที่ทำซ้ำ ($M = 1{,}000$)

$$\text{CP} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร}}{1{,}000}$$

การคำนวณค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น (Average length: AL) มีขั้นตอนในการดำเนินการดังนี้

พิจารณาจากผลต่างระหว่างขีดจำกัดบน (β_U) และขีดจำกัดล่าง (β_L) ของช่วงความเชื่อมั่น จากการทำซ้ำ 1,000 ครั้ง และนำผลต่างที่ได้แต่ละครั้งมาบวกกัน หารด้วยจำนวนครั้งที่ทำซ้ำ ($M = 1{,}000$)

ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น คือ

$$\frac{\sum_{i=1}^{1{,}000}\left(\beta_{U_i} - \beta_{L_i}\right)}{1{,}000}$$

โดยที่ β_{U_i} และ β_{L_i} แทน ขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น ในการทำซ้ำครั้งที่ i ตามลำดับ

3.4 การเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร โดยพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมว่าวิธีใดบ้างที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ ได้จากการพิจารณาการทดสอบสมมติฐาน โดยใช้ตัวสถิติทดสอบ Z ดังนี้

H_0 : ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมมีค่าไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด $(c \geq c_0)$

H_1 : ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมมีค่าต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด $(c < c_0)$

กำหนดระดับนัยสำคัญ α

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$$Z = \frac{\hat{c} - c_0}{\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{M}}}$$

ขอบเขตวิกฤติ ในการทดสอบ คือ $Z < -Z_\alpha$

ดังนั้น จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก H_0 เมื่อ $Z < -Z_\alpha$

นั่นคือ จะยอมรับสมมติฐานหลัก H_0 เมื่อ $Z \geq -Z_\alpha$

จะได้ว่า $$\frac{\hat{c} - c_0}{\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{M}}} \geq -Z_\alpha$$

$$\hat{c} \geq c_0 - Z_\alpha\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{M}}$$

เพราะฉะนั้น จะยอมรับสมมติฐานหลัก H_0

เมื่อ $\hat{c} \geq c_0 - Z_\alpha\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{M}}$

โดยที่ c คือ ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม
$\hat{c}$ คือ ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลอง
c_0 คือ ค่าสัมประสิทธ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด
α คือ ระดับนัยสำคัญหรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดความผิดพลาดแบบที่ 1
M คือ จำนวนครั้งที่ทำการทดลองซ้ำ

พิจารณาการสร้างเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

นั่นคือ วิธีการประมาณค่าให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมมีค่าไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

$$\text{ถ้า } \hat{c} \geq 0.95 - 1.645\sqrt{\frac{0.95(1-0.95)}{1000}}$$
$$= 0.9387$$

ดังนั้น ถ้าวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรวิธีใด ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลองมีค่าไม่ต่ำกว่า 0.9387 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% จะถือว่าวิธีนั้น ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จากนั้นนำวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าสัมประสิทธ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ไปทำการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น วิธีใดที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด จะถือว่าเป็นวิธีนั้นเป็นวิธีประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ดีที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น

4. ผลการวิจัย

การนำเสนอผลการวิจัย ในที่นี้จะแบ่งการนำเสนอออกเป็นสองส่วน คือ

ส่วนที่ 1 การเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลอง

ส่วนที่ 2 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี

โดยจะนำเสนอในรูปแบบของตาราง และใช้สัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

β คือ ค่าเฉลี่ยประชากรในการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง

n คือ ขนาดตัวอย่าง

W คือ วิธีวาลด์

S คือ วิธีสคอร์

AW คือ วิธีปรับค่าของวาลด์

BS คือ วิธีบูตสแตรปสคอร์

$B1, B2, B3$ และ $B4$ คือ วิธีเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,2) แกมมา(0.5,3) แกมมา(1,1) และแกมมา(1,2) ตามลำดับ

$BB1, BB2, BB3, BB4$ คือ วิธีบูตสแตรปเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,2) แกมมา(0.5,3) แกมมา(1,1) และแกมมา(1,2) ตามลำดับ

4.1 การเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลองของแต่ละวิธี

สำหรับการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลองในแต่ละวิธีกับเกณฑ์ที่กำหนด ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ถ้า $\hat{c} \geq 0.9387$ จะถือว่าวิธีนั้นให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

วิธีการประมาณทั้ง 6 วิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลอง แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 แสดงค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ได้จากการทดลอง ในแต่ละขนาดตัวอย่างและค่าเฉลี่ยประชากร β ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

n	β	**วิธีการประมาณค่า**											
		W	S	AW	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	BS	$BB1$	$BB2$	$BB3$	$BB4$
5	1	0.872	***0.953***	***1.000***	***0.961***	***0.957***	***0.965***	***0.956***	***0.955***	***0.959***	***0.956***	***0.963***	***0.954***
	5	0.860	***0.954***	***1.000***	***0.941***	***0.940***	0.934	0.925	***0.954***	***0.941***	***0.940***	0.926	0.921
	10	0.877	***0.966***	***1.000***	***0.943***	***0.941***	0.923	0.920	***0.966***	***0.947***	***0.945***	0.923	0.919
	20	0.872	***0.955***	***1.000***	***0.940***	***0.940***	0.928	0.927	***0.954***	***0.941***	***0.939***	0.927	0.924
	30	0.866	***0.950***	***1.000***	***0.941***	***0.942***	0.921	0.919	***0.949***	***0.943***	***0.942***	0.919	0.917
10	1	0.899	***0.953***	***0.997***	***0.953***	***0.952***	***0.956***	***0.950***	***0.954***	***0.954***	***0.954***	***0.958***	***0.949***
	5	0.919	***0.955***	***0.999***	***0.946***	***0.945***	***0.947***	***0.946***	***0.954***	***0.944***	***0.943***	***0.946***	***0.943***
	10	0.901	***0.954***	***0.999***	***0.950***	***0.949***	0.934	0.932	***0.954***	***0.948***	***0.948***	***0.939***	0.935
	20	0.919	***0.960***	***0.997***	***0.942***	***0.942***	***0.939***	***0.939***	***0.958***	***0.944***	***0.944***	0.938	0.937
	30	0.905	***0.946***	***0.996***	***0.941***	***0.940***	0.929	0.927	***0.946***	***0.942***	***0.942***	0.928	0.927
25	1	0.928	***0.964***	***0.974***	***0.960***	***0.958***	***0.963***	***0.956***	***0.964***	***0.961***	***0.956***	***0.964***	***0.954***
	5	0.925	***0.949***	***0.976***	***0.950***	***0.949***	***0.945***	***0.942***	***0.944***	***0.950***	***0.950***	***0.946***	***0.944***
	10	0.927	***0.942***	***0.971***	***0.946***	***0.945***	***0.940***	0.938	***0.942***	***0.940***	***0.940***	***0.941***	***0.941***
	20	0.926	***0.956***	***0.981***	***0.950***	***0.949***	***0.944***	***0.944***	***0.955***	***0.946***	***0.946***	***0.946***	***0.945***
	30	0.937	***0.948***	***0.967***	***0.947***	***0.947***	***0.942***	***0.941***	***0.948***	***0.947***	***0.947***	***0.940***	***0.939***
50	1	***0.939***	***0.950***	***0.960***	***0.948***	***0.946***	***0.948***	***0.945***	***0.946***	***0.946***	***0.947***	***0.949***	***0.946***
	5	***0.947***	***0.954***	***0.967***	***0.955***	***0.955***	***0.953***	***0.954***	***0.957***	***0.958***	***0.956***	***0.953***	***0.953***
	10	***0.944***	***0.957***	***0.965***	***0.950***	***0.950***	***0.948***	***0.948***	***0.948***	***0.945***	***0.946***	***0.950***	***0.951***
	20	***0.946***	***0.952***	***0.964***	***0.951***	***0.951***	***0.952***	***0.952***	***0.950***	***0.949***	***0.949***	***0.953***	***0.953***
	30	***0.943***	***0.956***	***0.963***	***0.951***	***0.951***	***0.946***	***0.947***	***0.958***	***0.949***	***0.949***	***0.948***	***0.947***
100	1	***0.945***	***0.950***	***0.956***	***0.948***	***0.946***	***0.948***	***0.946***	***0.951***	***0.946***	***0.945***	***0.946***	***0.947***
	5	***0.945***	***0.954***	***0.958***	***0.950***	***0.950***	***0.948***	***0.948***	***0.951***	***0.950***	***0.950***	***0.949***	***0.949***
	10	***0.943***	***0.947***	***0.952***	***0.947***	***0.947***	***0.947***	***0.947***	***0.945***	***0.948***	***0.948***	***0.947***	***0.947***
	20	***0.941***	***0.949***	***0.952***	***0.949***	***0.949***	***0.947***	***0.947***	***0.947***	***0.948***	***0.948***	***0.948***	***0.948***
	30	***0.946***	***0.954***	***0.957***	***0.957***	***0.957***	***0.955***	***0.955***	***0.957***	***0.954***	***0.954***	***0.951***	***0.952***

ตัวเอียงหนา หมายถึง ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากตารางที่ 1 จะได้ว่าวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด สามารถพิจารณาได้ดังนี้ กรณีตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 50$) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และ 10 วิธีที่ได้คือ วิธีสคอร์ (S) วิธีปรับค่าของวาลด์ (AW) วิธีบูตสแตรปสคอร์ (BS) วิธีเบส์ ($B1, B2$) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ($BB1, BB2$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,2) และแกมมา(0.5,3) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 วิธีที่ได้ คือ ทุกวิธีการประมาณยกเว้นวิธีวาลด์ (W)

กรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 50$) วิธีการประมาณค่าทุกวิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

4.2 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี

การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี พิจารณาเฉพาะวิธีการประมาณที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยวิธีใดที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดจะถือว่าวิธีนั้นเป็นวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ดีที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น

วิธีการประมาณทั้ง 6 วิธี ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2 แสดงค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในแต่ละขนาดตัวอย่างและค่าเฉลี่ยประชากร β ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

n	β	**วิธีการประมาณค่า**											
		W	S	AW	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	BS	$BB1$	$BB2$	$BB3$	$BB4$
5	1	-	7.7386	16.0766	2.4304	2.3583	2.2528	2.0686	7.7352	2.4295	2.3573	2.2520	***2.0678***
	5	-	37.7723	78.4699	11.0229	***10.9507***	-	-	37.8101	11.0337	10.9615	-	-
	10	-	74.7744	155.3396	21.6090	21.5368	-	-	74.6897	21.5847	***21.5126***	-	-
	20	-	153.9247	319.7698	44.2534	***44.1812***	-	-	153.9680	44.2658	44.1937	-	-
	30	-	233.6863	485.4700	67.0727	67.0006	-	-	233.5330	67.0289	***66.9567***	-	-
10	1	-	2.0028	2.5521	1.4435	1.4204	1.3987	1.3349	2.0022	1.4430	1.4200	1.3983	***1.3345***
	5	-	10.1955	12.9919	7.0656	7.0426	6.5979	6.5341	10.1880	7.0605	7.0375	6.5932	***6.5293***
	10	-	20.1996	25.7398	13.9309	13.9078	-	-	20.1919	13.9255	13.9025	***12.9417***	-
	20	-	40.7412	51.9152	28.0272	28.0042	25.9826	25.9187	40.7365	28.0241	***28.0010***	-	-
	30	-	60.2835	76.8174	41.4380	***41.4149***	-	-	60.3310	41.4706	41.4475	-	-
25	1	-	0.9206	1.0007	0.8306	0.8251	0.8215	0.8056	0.9204	0.8304	0.8249	0.8213	***0.8054***
	5	-	4.6694	5.0756	4.1458	4.1403	4.0369	***4.0210***	4.6695	4.1460	4.1405	4.0371	4.0212
	10	-	9.3396	10.1520	8.2759	8.2705	8.0428	-	9.3442	8.2801	8.2746	8.0468	***8.0309***
	20	-	18.6235	20.2436	16.4863	16.4809	16.0061	***15.9902***	18.6347	16.4962	16.4908	16.0157	15.9998
	30	-	27.9717	30.4050	24.7535	24.7480	24.0244	***24.0085***	27.9856	24.7658	24.7604	24.0364	24.0205

ตารางที่ 2 แสดงค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในแต่ละขนาดตัวอย่างและค่าเฉลี่ยประชากร β ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% (ต่อ)

n	β	วิธีการประมาณค่า											
		W	S	AW	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	BS	$BB1$	$BB2$	$BB3$	$BB4$
50	1	***0.5531***	0.5992	0.6236	0.5711	0.5693	0.5681	0.5626	0.5991	0.5711	0.5692	0.5681	0.5625
	5	***2.7955***	3.0281	3.1516	2.8636	2.8617	2.8261	2.8205	3.0268	2.8623	2.8604	2.8248	2.8193
	10	***5.5199***	5.9793	6.2232	5.6488	5.6469	5.5695	5.5639	5.9791	5.6486	5.6467	5.5693	5.5637
	20	***11.1054***	12.0297	12.5202	11.3591	11.3572	11.1939	11.1883	12.0338	11.3630	11.3611	11.1978	11.1922
	30	***16.6560***	18.0422	18.7779	17.0335	17.0316	16.7831	16.7775	18.0440	17.0353	17.0334	16.7848	16.7793
100	1	***0.3905***	0.4061	0.4141	0.3968	0.3962	0.3958	0.3938	0.4062	0.3969	0.3963	0.3959	0.3940
	5	***1.9707***	2.0494	2.0900	1.9946	1.9940	1.9816	1.9796	2.0496	1.9948	1.9942	1.9818	1.9798
	10	***3.9283***	4.0852	4.1661	3.9740	3.9734	3.9461	3.9442	4.0850	3.9738	3.9731	3.9459	3.9439
	20	***7.8367***	8.1497	8.3109	7.9259	7.9252	7.8683	7.8663	8.1511	7.9272	7.9265	7.8696	7.8676
	30	***11.7617***	12.2315	12.4735	11.8945	11.8939	11.8072	11.8052	12.2298	11.8929	11.8922	11.8056	11.8036

หมายเหตุ ตัวเอียงหนา หมายถึง ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด
หมายถึง ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากตารางที่ 2 แสดงค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% จำแนกตามขนาดตัวอย่างและค่าเฉลี่ยประชากร จะได้ว่าวิธีที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด สามารถพิจารณาได้ดังนี้

กรณีตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 50$) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ($B2$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ($BB2, BB4$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และแกมมา(1,2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ($B2$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และวิธีบูตสแตรปเบส์ยกเว้นกรณีที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ($B4$) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ($BB4$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(1,2)

กรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 50$) วิธีวาลด์เป็นวิธีที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ในทุกค่าเฉลี่ยประชากรที่ทำการศึกษา

จากตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น จะแปรผันโดยตรงกับค่าเฉลี่ยประชากรและแปรผกผันกับขนาดตัวอย่าง

5. สรุปผล

งานวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วง สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ด้วยวิธีการประมาณ 6 วิธี สรุปผลได้ดังนี้

กรณีตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 50$) วิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของ

ช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด สามารถพิจารณาได้ดังนี้ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ($B2$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ($BB2, BB4$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และแกมมา(1,2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ($B2$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,3) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ยกเว้นกรณีที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(0.5,2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 วิธีที่ได้ คือ วิธีเบส์ ($B4$) และวิธีบูตสแตรปเบส์ ($BB4$) ที่มีการแจกแจงก่อนแบบแกมมา(1,2)

กรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 50$) วิธีการประมาณค่าทุกวิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยที่วิธีวาลด์เป็นวิธีที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ในทุกค่าเฉลี่ยประชากรที่ทำการศึกษา แสดงดังตารางที่ 3

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ผลงานวิจัยซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Agresti and Coull [2] และบทความอิเล็กทรอนิกส์ [6] ที่ว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กวิธีวาลด์ จะให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

ตารางที่ 3 แสดงวิธีการประมาณที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละ n และ β

ขนาดตัวอย่าง (n)	ค่าเฉลี่ยประชากร (β)				
	1	5	10	20	30
5	$BB4$	$B2$	$BB2$	$B2$	$BB2$
10	$BB4$	$BB4$	$BB3$	$BB2$	$B2$
25	$BB4$	$B4$	$BB4$	$B4$	$B4$
50	W	W	W	W	W
100	W	W	W	W	W

6. เอกสารอ้างอิง

[1] สาริณีย์ คงกัน, การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ในการแจกแจงทวินาม, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2546.

[2] Agresti, A., & Coull, B. A., Approximate is Better than 'Exact' for Interval Estimation of Binomial Proportions, The American Statistician, Vol. 52, pp.199-126, 1998.

[3] Wilson, E. B., Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference, Journal of the American Statistical Association, Vol. 22 , pp. 209-212, 1927.

[4] Elfessi, A., & Reineke, D. M., A Bayesian Look at Classical Estimations:The Exponential Distribution, Journal of Statistics Education, Vol. 9(1), 2001.

[5] ฟองนวล วงศ์ตะวัน, การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าตัวประมาณสัดส่วนในการแจกแจงทวินามและตัวประมาณค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบปัวส์ซง. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยนเรศวร, คณะวิทยาศาสตร์, สาขาวิชาสถิติประยุกต์, 2549.

[6] Binomial proportion confidence interval. Wikipedia, the free encyclopedia. Retrieved February 5, 2009, from http://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_proportion_confidence_interval