

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์

3 วิธี สำหรับแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล

Efficiency Comparisons of the Three Nonparametric Statistical Tests for 2^3 Factorial Experimental Design

ศรียรรณ เมืองลอย*, บุญอ้อม โฉมทิ,

จุฑาภรณ์ สินสมบุญทอง และจันทร์ธา วงษ์อุทอง

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10900

Sriwan Muangloy*, Boonorm Chomtee,

Juthaphorn Sinsomboonthong and Chantha Wongoutong

Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University, Ladyao, Chatuchak, Bangkok 10900

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ 3 วิธี สำหรับแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล คือ ตัวสถิติทดสอบผลรวมลำดับที่ การแปลงลำดับที่ และการแปลงลำดับที่อะโลน ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้เป็นข้อมูลจำลองตามสถานการณ์ต่าง ๆ ด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลทำซ้ำ จำนวน 1,000 ครั้ง สำหรับข้อมูลในแต่ละสถานการณ์ที่ถูกสร้างจากตัวแบบของแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล จะมีขนาดการทำซ้ำในแต่ละคอมบินชันของทรีตเมนต์เป็น 2, 3, 4, 5 และ 6 ซ้ำ ส่วนเกณฑ์การเปรียบเทียบประสิทธิภาพจะพิจารณาจากความสามารถของการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ของแบรดลีย์และกำลังการทดสอบ ผลการวิจัยพบว่าที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ตัวสถิติทดสอบผลรวมลำดับที่ไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ในทุกสถานการณ์ ส่วนตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่อะโลนสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ในเกือบทุกสถานการณ์ และจากการเปรียบเทียบกำลังการทดสอบพบว่าตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะโลนมีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบสูงกว่าหรือเท่ากับตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ในทุกสถานการณ์

คำสำคัญ : ตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์; แผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล; ความผิดพลาดแบบที่ 1; กำลังการทดสอบ

Abstract

The objective of this research is to compare the efficiency of the three nonparametric statistical tests for 2^3 factorial experimental design: rank sums test, rank transform test and aligned rank transform test. The data in this research is simulated by the Monte Carlo technique and each case is replicated 1,000 times. The data is generated from the linear model of 2^3 factorial experimental design. In each treatment combination, it is repeated 2, 3, 4, 5 and 6 times. The criteria for comparison are Bradley's control ability of type I error and power of a test. For the results, it is found that at the significant level 0.05, rank sums test cannot control the probability of type I error in all cases. However, rank transform test and aligned rank transform test can control the probability of type I error in almost every situation. When considering the power of a test, it is found that power of a test of aligned rank transform test is greater or equal to that of rank transform test for all situations.

Keywords: nonparametric statistic; 2^3 factorial experimental design; type I error; power of a test

1. บทนำ

แผนแบบการทดลอง (experimental design) มีการนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ในหลาย ๆ ด้าน เช่น ด้านวิทยาศาสตร์ ด้านเกษตรกรรม ซึ่งแผนแบบการทดลองทางสถิติมีหลายแบบ เช่น แผนแบบการทดลองแฟกทอเรียล เป็นแผนการทดลองที่สนใจศึกษาปัจจัย 2 ปัจจัยขึ้นไป ที่มีผลต่อตัวแปรตอบสนอง และแต่ละปัจจัยแบ่งออกเป็นระดับ ตัวอย่าง เช่น แผนแบบการทดลอง 2^k แฟกทอเรียล (2^k factorial experimental design) เป็นแผนแบบการทดลองที่สนใจศึกษาปัจจัยหลัก k ปัจจัยที่มีผลต่อตัวแปรตอบสนอง โดยแต่ละปัจจัยมี 2 ระดับ เช่น แผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล (2^3 factorial experimental design) เป็นแผนแบบการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย โดยที่แต่ละปัจจัยมี 2 ระดับ หรืออาจเขียนเป็นแผนแบบการทดลอง $2 \times 2 \times 2$ แฟกทอเรียล ($2 \times 2 \times 2$ factorial experimental design) ซึ่งการวิเคราะห์ข้อมูลของแผนแบบการทดลองแฟกทอเรียลชนิดนี้จะเป็นการ

วิเคราะห์ข้อมูลแบบสามทาง (three-way analysis) นั่นคือ จะสามารถสรุปผลจากการทดสอบสมมุติฐานของปัจจัยหลายปัจจัยที่ศึกษาพร้อมกัน นอกจากนี้ ปัจจัยที่ศึกษาจากแผนแบบการทดลองแฟกทอเรียลนั้นสามารถศึกษาการมีอิทธิพลร่วมกันระหว่างปัจจัย

โดยจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ที่ใช้ในแผนแบบการทดลองมีใช้อยู่ไม่มาก โดยในปี พ.ศ. 2552 ขวัญ [1] ได้ศึกษาประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบสำหรับแผนแบบแฟกทอเรียลกรณีที่มีตัวแปรร่วม ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Leys และ Schumann [2] ได้ศึกษาตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์โดยการแปลงเป็นลำดับที่ถูกปรับ (adjusted rank transform test) สำหรับข้อมูลการทดลองแบบ 2×2 แฟกทอเรียล โดยการนำข้อมูลมาปรับแล้วจัดลำดับ จากนั้นนำค่าอันดับไปวิเคราะห์ความแปรปรวน และต่อมาในปี พ.ศ. 2556 พรนภา [3] ได้ศึกษาเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบสำหรับแผนการทดลองแบบ 2×2

แฟกทอเรียลของตัวสถิติ 3 แบบ คือ ตัวสถิติทดสอบเอฟ (F) การแปลงลำดับที่ (rank transform, RT) และการแปลงลำดับที่อะไลน์ (aligned rank transform, ART) ผลการทดลองพบว่าสำหรับการทดสอบอิทธิพลหลักของปัจจัย A และ B โดยส่วนใหญ่ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ มีค่ากำลังการทดสอบสูงสุดในกรณีที่มีความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงโคกำลังสองและมีการทำซ้ำตั้งแต่ 5 ซ้ำขึ้นไป ส่วนการทดสอบอิทธิพลร่วม AB ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์ มีค่ากำลังการทดสอบสูงสุด

การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าตัวสถิติทดสอบผลรวมลำดับที่ (rank sums, RS) การแปลงลำดับที่ (rank transform, RT) และการแปลงลำดับที่อะไลน์ (aligned rank transform, ART) เป็นตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับการศึกษาแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล ดังนั้นงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ 3 วิธี สำหรับแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล ได้แก่ ตัวสถิติทดสอบผลรวมลำดับที่ การแปลงลำดับที่ และการแปลงลำดับที่อะไลน์ โดยเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ตามเกณฑ์ของแบรดลีย์ [4] และกำลังการทดสอบ เปรียบเทียบเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เท่านั้น เพื่อศึกษาว่าตัวสถิติทดสอบใดที่เหมาะสมสำหรับข้อมูลในแต่ละสถานการณ์ ซึ่งข้อมูลที่ใช้ในการศึกษาเป็นข้อมูลที่ได้จากการจำลองโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation technique)

2. ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในงานวิจัย

งานวิจัยนี้ศึกษาตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล

หรือแผนแบบการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย โดยที่แต่ละปัจจัยมี 2 ระดับ และอิทธิพลของปัจจัยทั้ง 3 ปัจจัยเป็นแบบคงที่ (fixed effect) ซึ่งมีตัวแบบเชิงเส้นดังนี้

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}; i, j, k = 1, 2; l = 1, 2, \dots, 6$$

โดยที่ y_{ijkl} คือ ค่าสังเกตของปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่ k และการทำซ้ำที่ l ; μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมดของข้อมูล (grand mean);

τ_i คือ อิทธิพลของปัจจัย A ระดับที่ i โดยที่ $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$

β_j คือ อิทธิพลของปัจจัย B ระดับที่ j โดยที่

$$\sum_{j=1}^b \beta_j = 0; \gamma_k \text{ คือ อิทธิพลของปัจจัย C ระดับที่ } k$$

โดยที่ $\sum_{k=1}^c \gamma_k = 0$; $(\tau\beta)_{ij}$ คือ อิทธิพลร่วมระหว่าง

ปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j โดยที่

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0; (\tau\gamma)_{ik} \text{ คือ อิทธิพลร่วมระหว่าง}$$

ปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย C ระดับที่ k โดยที่

$$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c (\tau\gamma)_{ik} = 0; (\beta\gamma)_{jk} \text{ คือ อิทธิพลร่วมระหว่าง}$$

ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่ k โดยที่

$$\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} = 0; (\tau\beta\gamma)_{ijk} \text{ คือ อิทธิพลร่วมระหว่าง}$$

ปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่

k โดยที่ $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$; ε_{ijkl} คือ ความคลาด

เคลื่อนเชิงสุ่ม (random error) โดยที่ $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

และมีสมมุติฐานว่าง (H_0) และสมมุติฐานทางเลือก (H_a) ดังนี้

(1) ทดสอบอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย A, B

และ C

$$H_0 : (\tau\beta\gamma)_{111} = (\tau\beta\gamma)_{112} = (\tau\beta\gamma)_{121} = \dots = (\tau\beta\gamma)_{221} = (\tau\beta\gamma)_{222} = 0$$

$$H_a : (\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0; \exists i, j, k; i, j, k = 1, 2$$

(2) ทดสอบอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย A

และ B

$$H_0 : (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = (\tau\beta)_{21} = (\tau\beta)_{22} = 0$$

$$H_a : (\tau\beta)_{ij} \neq 0 ; \exists i, j ; i, j = 1, 2$$

(3) ทดสอบอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย A

และ C

$$H_0 : (\tau\gamma)_{11} = (\tau\gamma)_{12} = (\tau\gamma)_{21} = (\tau\gamma)_{22} = 0$$

$$H_a : (\tau\gamma)_{ik} \neq 0 ; \exists i, k ; i, k = 1, 2$$

(4) ทดสอบอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัย B

และ C

$$H_0 : (\beta\gamma)_{11} = (\beta\gamma)_{12} = (\beta\gamma)_{21} = (\beta\gamma)_{22} = 0$$

$$H_a : (\beta\gamma)_{jk} \neq 0 ; \exists j, k ; j, k = 1, 2$$

(5) ทดสอบอิทธิพลหลักของปัจจัย A

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = 0$$

$$H_a : \tau_i \neq 0 ; \exists i ; i = 1, 2$$

(6) ทดสอบอิทธิพลหลักของปัจจัย B

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_a : \beta_j \neq 0 ; \exists j ; j = 1, 2$$

(7) ทดสอบอิทธิพลหลักของปัจจัย C

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

$$H_a : \gamma_k \neq 0 ; \exists k ; k = 1, 2$$

ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ประกอบด้วย

2.1 ตัวสถิติทดสอบผลรวมลำดับที่ (rank

sums, RS)

เสนอโดย Dunn [5] ซึ่งต่อมา Kao [6] ได้ศึกษาตัวสถิติทดสอบ RS ซึ่งเป็นตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน สำหรับแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียล โดยการแปลงข้อมูลตัวแปรตอบสนองเป็นข้อมูลอันดับที่ (ordinal data) ซึ่งในกรณีที่ค่าของตัวแปรตอบสนองเท่ากันให้ใช้อันดับเฉลี่ยแทน คำนวณได้ ดังนี้

$$\text{ตัวสถิติทดสอบ } p_m = \frac{y_m}{\sqrt{\sigma_m^2}}$$

โดยที่ m คือ อิทธิพลของปัจจัย ABC, AB, AC, BC, A, B

$$\text{และ C; } y_{ABC} = \frac{1}{4n} [T_{121.} + T_{211.} + T_{112.} + T_{222.} - T_{111.} - T_{221.} - T_{122.} - T_{212.}];$$

$$y_{AB} = \frac{1}{4n} [T_{12k.} + T_{21k.} - T_{11k.} - T_{22k.}]; y_{BC} = \frac{1}{4n} [T_{1i2.} + T_{2i2.} - T_{1i1.} - T_{2i2.}];$$

$$y_{AC} = \frac{1}{4n} [T_{1i2.} + T_{2i1.} - T_{1i1.} - T_{2i2.}]; y_A = \frac{1}{4n} [T_{ijk.} - T_{2jk.}];$$

$$y_B = \frac{1}{4n} [T_{1ik.} - T_{2ik.}]; y_C = \frac{1}{4n} [T_{ij1.} - T_{ij2.}];$$

$T_{ijk.}$ คือ ผลรวมข้อมูลอันดับของตัวแปรตอบสนอง

ปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C

ระดับที่ k เมื่อ $i, j, k = 1, 2$

$$\sigma_m^2 = \left[\frac{N(N+1)}{12} - \frac{\sum_{s=1}^r (t_s^3 - t_s)}{12(N-1)} \right] \left[\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} \right];$$

$N = 2^3 n$; $n = 2, 3, 4, 5$ และ 6; r คือ จำนวนของ

ปัจจัย; t_s คือ ระดับที่ของแต่ละปัจจัย

โดยปฏิเสธสมมติฐานว่า เมื่อตัวสถิติทดสอบ

p_m ไม่อยู่ในช่วง $\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2(q)}}; Z_{1-\frac{\alpha}{2(q)}} \right]$ โดยที่ q คือ จำนวน

อิทธิพลต่าง ๆ ทั้งหมดของ 3 ปัจจัย จำนวน 7 อิทธิพล

ได้แก่ ABC, AB, AC, BC, A, B และ C นั่นคือ จะ

ปฏิเสธ H_0 ถ้า p_m ไม่อยู่ในช่วง $\left[-Z_{1-\frac{0.05}{2(7)}}; Z_{1-\frac{0.05}{2(7)}} \right]$

$$= [-Z_{0.9964}, Z_{0.9964}] = [-2.69, 2.69]$$

2.2 ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ (rank

transform, RT)

เสนอโดย Akritas และคณะ [7] เป็นตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน โดยการแปลงข้อมูลตัวแปรตอบสนองเป็นข้อมูลอันดับที่ ซึ่งในกรณีที่ค่าของตัวแปรตอบสนองเท่ากันให้ใช้อันดับที่เฉลี่ยแทน สามารถคำนวณตัวสถิติทดสอบกรณีทั่วไปดังนี้

$$\text{ตัวสถิติทดสอบ } Q(C_m) = N\hat{T}'_{C_m} (C_m \hat{V}C_m)^{-1} \hat{T}_{C_m}$$

โดยที่ m คือ อิทธิพลของปัจจัย ABC, AB, AC, BC, A, B

และ C ; $N = 2^3 n$; $\hat{T}_{C_m} = \frac{1}{N} C_m (\bar{R}_{111}, \dots, \bar{R}_{abc})'$;

$$C_{ABC} = M_a \otimes M_b \otimes M_c; C_{AB} = M_a \otimes M_b \otimes c^{-1}1'_c;$$

$$C_{AC} = M_a \otimes b^{-1}1'_b \otimes M_c; C_{BC} = a^{-1}1'_a \otimes M_b \otimes M_c;$$

$$C_A = M_a \otimes b^{-1}1'_b \otimes c^{-1}1'_c; C_B = a^{-1}1'_a \otimes M_b \otimes c^{-1}1'_c;$$

$$C_C = a^{-1}1'_a \otimes b^{-1}1'_b \otimes M_c; M_d = [1_{d-1} \quad -I_{d-1}];$$

$$1_{d-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{(d-1) \times 1}; \quad I_{d-1} \text{ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด}$$

$(d-1) \times (d-1)$; d คือ จำนวนระดับของปัจจัยหลัก

A, B และ C ; ซึ่งในที่นี้ ระดับของแต่ละปัจจัย A, B

และ C เท่ากับ 2 ดังนั้น $d=2$ และ $1_{d-1}=1$;

$I_{d-1}=1$ จึงทำให้ $M_d = [1 \quad -1]$ ในทำนองเดียวกัน

M_a, M_b และ M_c เท่ากับ $[1 \quad -1]$ ด้วย

$$\hat{V} = \text{diag} \left(\frac{\sigma_{111}^2}{\hat{\lambda}_{111}}, \dots, \frac{\sigma_{abc}^2}{\hat{\lambda}_{abc}} \right); \quad \hat{\sigma}_{ijk}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n_{ijk}} (R_{ijkl} - \bar{R}_{ijk})^2}{N^2 (n_{ijk} - 1)};$$

$\hat{\lambda}_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{N}$; $\bar{R}_{ijk}$ คือ ค่าเฉลี่ยข้อมูลอันดับของตัว

แปรตอบสนองปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่

j ปัจจัย C ระดับที่ k เมื่อ $i, j, k = 1, 2$

เมื่อ $Q(C_m)$ มีการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ r เมื่อ r คือ $\text{rank}(C_m)$

ดังนั้น จะปฏิเสธสมมุติฐานว่า เมื่อตัวสถิติทดสอบ $Q(C_m)$ มากกว่า χ_r^2 ซึ่งในที่นี้คือ $Q(C_m)$ มากกว่า $\chi_1^2 = 3.84$

2.3 ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์ (aligned rank transform, ART)

เสนอโดย Wobbrock และคณะ [8] เป็นตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณค่าส่วนเหลือ (residual) ดังนี้

ค่าส่วนเหลือ = $y_{ijkl} - \text{cell mean}$

โดยที่ y_{ijkl} คือ ตัวแปรตอบสนองจากปัจจัยปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่ k และ ทำซ้ำที่ 1; cell mean คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตอบสนองในแต่ละระดับของปัจจัย

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าอิทธิพลของปัจจัย ดังนี้ กำหนดให้ $\bar{A}_i = \bar{y}_{i..}$; $\bar{B}_j = \bar{y}_{.j.}$; $\bar{C}_k = \bar{y}_{...k}$; $\bar{A}_i \bar{B}_j = \bar{y}_{ij.}$; $\bar{A}_i \bar{C}_k = \bar{y}_{i.k.}$; $\bar{B}_j \bar{C}_k = \bar{y}_{.jk.}$; $\bar{A}_i \bar{B}_j \bar{C}_k = \bar{y}_{ijk.}$

(1) คำนวณค่าอิทธิพลหลักของปัจจัย

คือ ปัจจัย A, B และ C ดังนี้ $\bar{A}_i - \bar{y}_{i..} = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i..}$; $\bar{B}_j - \bar{y}_{.j.} = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{.j.}$; $\bar{C}_k - \bar{y}_{...k} = \bar{y}_{...k} - \bar{y}_{...k}$

(2) คำนวณค่าอิทธิพลร่วมของ 2 ปัจจัย

คือ AB, AC และ BC ดังนี้ $\bar{A}_i \bar{B}_j - \bar{A}_i - \bar{B}_j + \bar{y}_{...} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$; $\bar{A}_i \bar{C}_k - \bar{A}_i - \bar{C}_k + \bar{y}_{...} = \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...k} + \bar{y}_{...}$; $\bar{B}_j \bar{C}_k - \bar{B}_j - \bar{C}_k + \bar{y}_{...} = \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...k} + \bar{y}_{...}$

(3) คำนวณค่าอิทธิพลร่วมของ 3

ปัจจัย คือ ABC ดังนี้ $\bar{A}_i \bar{B}_j \bar{C}_k - \bar{A}_i \bar{B}_j - \bar{A}_i \bar{C}_k - \bar{B}_j \bar{C}_k + \bar{A}_i + \bar{B}_j + \bar{C}_k - \bar{y}_{...} = \bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...k} - \bar{y}_{...}$ โดยที่ $\bar{y}_{...}$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรตอบสนองทั้งหมด โดยที่แต่ละปัจจัยของ A, B และ C มี 2 ระดับ; $\bar{y}_{ijk.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่ k เมื่อ $i, j, k = 1, 2$; $\bar{y}_{ij.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย B ระดับที่ j เมื่อ $i, j = 1, 2$; $\bar{y}_{i.k.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย A ระดับที่ i ปัจจัย C ระดับที่ k เมื่อ $i, k = 1, 2$; $\bar{y}_{.jk.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย B ระดับที่ j ปัจจัย C ระดับที่ k เมื่อ $j, k = 1, 2$; $\bar{y}_{i..}$

คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย A ระดับที่ i เมื่อ $i = 1, 2$; $\bar{y}_{.j.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย B ระดับที่ j เมื่อ $j = 1, 2$; $\bar{y}_{..k}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลของตัวแปรตอบสนองปัจจัย C ระดับที่ k เมื่อ $k = 1, 2$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณค่าตัวแปรตอบสนองอะไลน์ (aligned response) หรือ y'_{ijk} โดยที่ $y'_{ijk} =$ ค่าส่วนเหลือ + ค่าอิทธิพลของปัจจัย

ขั้นตอนที่ 4 นำ y'_{ijk} มาจัดอันดับที่ข้อมูล ถ้าข้อมูลมีค่าซ้ำกัน ให้ใช้อันดับที่เฉลี่ย

ขั้นตอนที่ 5 นำอันดับที่จากขั้นตอนที่ 4 มาวิเคราะห์ความแปรปรวนของอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วมของ A, B และ C

3. วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1 จำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่าง ๆ ด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลโดยทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ด้วยโปรแกรม SAS เวอร์ชัน 9.4 ภายใต้สถานการณ์ ดังนี้

3.1.1 การแจกแจงของความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่มทั้งหมด 2 ลักษณะ คือ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง $[0, 99]$ เมื่อสมมุติฐานว่างเป็นจริง และช่วง $[40, 49]$ เมื่อสมมุติฐานว่างไม่เป็นจริง

3.1.2 กำหนดขนาดตัวอย่างจากจำนวนครั้งของการทำซ้ำในแต่ละคอมบินชันของทรีตเมนต์ของปัจจัย A, B และ C สำหรับแผนแบบการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย โดยที่แต่ละปัจจัยมี 2 ระดับ มีการทำซ้ำเป็น 2, 3, 4, 5 และ 6 ซ้ำ รวม 5 ลักษณะ

3.1.3 ในแต่ละการแจกแจงและขนาดตัวอย่าง กำหนดให้ค่าเฉลี่ยทั้งหมดของข้อมูลเท่ากับ 1

และอิทธิพลของปัจจัยเป็นแบบคงที่ โดยที่ $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$, $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$, $\sum_{k=1}^c \gamma_k = 0$, $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0$, $\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c (\tau\gamma)_{ik} = 0$, $\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\beta\gamma)_{jk} = 0$ และ $\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{i=1}^a (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$ ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

(1) เมื่อสมมุติฐานว่างเป็นจริง กำหนดค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลของปัจจัย A, B และ C ดังนี้ กำหนดให้ $\tau_i = 0$, $\beta_j = 0$ และ $\gamma_k = 0$ โดยที่ $i, j, k = 1, 2$

(2) เมื่อสมมุติฐานว่างไม่เป็นจริง กำหนดค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลของปัจจัย A, B และ C แบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

$$(2.1) \quad \tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \quad \beta_1 = -2, \beta_2 = 2$$

และ $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -3$

$$(2.2) \quad \tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \quad \beta_1 = -2, \beta_2 = 2$$

และ $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = -5$

$$(2.3) \quad \tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \quad \beta_1 = 3, \beta_2 = -3$$

และ $\gamma_1 = -5, \gamma_2 = 5$

3.1.4 จำลองข้อมูลให้เป็นไปตามแผนแบบการทดลองแฟกทอเรียล 3 ปัจจัย โดยที่แต่ละปัจจัยมี 2 ระดับ ซึ่งมีตัวแบบเชิงเส้น [9] ดังนี้ $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$; $i, j, k = 1, 2$; $l = 1, 2, \dots, 6$

3.2 นำข้อมูลที่ได้จากการจำลองไปคำนวณค่าตัวสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี

3.3 คำนวณค่าประมาณความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 โดย ค่าประมาณความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 = (จำนวนครั้งที่ปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 เป็นจริง) $\div$ 1,000; ร้อยละของ

ค่าประมาณกำลังการทดสอบ = [(จำนวนครั้งที่ปฏิเสธ
เมื่อ เป็นจริง) ÷ 1,000] × 100

การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบ จะพิจารณา
จากร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบของตัว
สถิติทดสอบ ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่
สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เท่านั้น โดยที่
ตัวสถิติทดสอบใดที่มีค่ากำลังการทดสอบสูงกว่า แสดง
ว่าตัวสถิติทดสอบนั้นมีประสิทธิภาพที่ดีกว่า และจะ
สรุปผลการศึกษา

4. ผลการวิจัย

4.1 ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ ที่ 1

โดยเกณฑ์ของแบรดลีย์ ตัวสถิติทดสอบ
ใด ๆ จะสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ถ้าตัว
สถิติทดสอบนั้นมีค่าประมาณความน่าจะเป็นของความ
ผิดพลาดแบบที่ 1 อยู่ในช่วง [0.025, 0.075] และ
ผลการวิจัยจากตารางที่ 1 แสดงให้เห็นว่าตัวสถิติ
ทดสอบผลรวมลำดับที่ ไม่สามารถควบคุมความ
ผิดพลาดแบบที่ 1 ในทุกสถานการณ์

ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ สามารถ
ควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เกือบทุกสถานการณ์
ยกเว้นการทดสอบอิทธิพลของปัจจัยต่าง ๆ ที่ N = 16
และการทดสอบอิทธิพลร่วม BC ที่ N = 24

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นของความ
ผิดพลาดแบบที่ 1 ของตัวสถิติทดสอบ
RS, RT และ ART

อิทธิพล	N	ตัวสถิติทดสอบ		
		RS	RT	ART
A	16	0.003	0.099	0.071*
	24	0.006	0.067*	0.047*
	32	0.006	0.069*	0.059*

	40	0.009	0.049*	0.044*
	48	0.007	0.049*	0.055*
B	16	0.006	0.108	0.079
	24	0.008	0.059*	0.043*
	32	0.004	0.057*	0.042*
	40	0.005	0.065*	0.052*
	48	0.008	0.065*	0.055*
C	16	0.004	0.082	0.061*
	24	0.007	0.074*	0.062*
	32	0.008	0.064*	0.057*
	40	0.005	0.061*	0.047*
	48	0.004	0.061*	0.052*
AB	16	0.006	0.087	0.060*
	24	0.009	0.071*	0.054*
	32	0.006	0.069*	0.059*
	40	0.004	0.069*	0.051*
	48	0.002	0.069*	0.035*
AC	16	0.007	0.098	0.060*
	24	0.003	0.059*	0.078
	32	0.004	0.076	0.054*
	40	0.010	0.065*	0.057*
	48	0.008	0.065*	0.099
BC	16	0.004	0.090	0.060*
	24	0.007	0.080	0.059*
	32	0.005	0.053*	0.048*
	40	0.004	0.052*	0.046*
	48	0.016	0.052*	0.062*
ABC	16	0.002	0.092	0.060*
	24	0.006	0.075*	0.078
	32	0.008	0.065*	0.054*
	40	0.004	0.046*	0.057*
	48	0.011	0.046*	0.099

*ตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

และตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์ สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เกือบทุกสถานการณ์เช่นเดียวกับตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ ยกเว้นการทดสอบอทิพิลหลักของปัจจัย B ที่ $N=16$ และการทดสอบอทิพิลร่วม AC และ ABC ที่ $N=24$ และ 48

4.2 กำลังการทดสอบ

การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบนี้จะเปรียบเทียบระหว่างตัวสถิติทดสอบ 2 วิธี คือ การแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่อะไลน์ ที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ซึ่งผลการเปรียบเทียบพบว่าเมื่อทดสอบอทิพิลหลักทั้ง 3 กรณี คือ กรณีที่ 1;

$$\tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \quad \beta_1 = -2, \beta_2 = 2 \quad \text{และ}$$

$$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -3 \quad \text{กรณี ที่ } 2; \quad \tau_1 = -1, \tau_2 = 1;$$

$$\beta_1 = -2, \beta_2 = 2 \quad \text{และ } \gamma_1 = 5, \gamma_2 = -5 \quad \text{และกรณีที่ } 3;$$

$$\tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \quad \beta_1 = 3, \beta_2 = -3 \quad \text{และ } \gamma_1 = -5, \gamma_2 = 5$$

พบว่าสำหรับการทดสอบอทิพิลหลัก A, B และ C ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์ มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบสูงกว่าตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ ซึ่งตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่อะไลน์ มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบของการทดสอบอทิพิลหลักของปัจจัย C มากที่สุด รองลงมา คือ การทดสอบอทิพิลหลักของปัจจัย B และการทดสอบอทิพิลหลักของปัจจัย A มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบน้อยที่สุด ดังแสดงในตารางที่ 2 และรูปที่ 1 ถึง 3

กรณีการทดสอบอทิพิลร่วม 2 ปัจจัยทั้ง 3 กรณี พบว่าการทดสอบอทิพิลร่วม AB, AC และ BC ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์ มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบมากกว่าหรือเท่ากับตัว

สถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ โดยที่ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบของการทดสอบอทิพิลร่วม BC มากที่สุดและสูงสุดร้อยละ 100 ในทุกสถานการณ์ ยกเว้นกรณีที่ 1 สำหรับ $N=16$ รองลงมาคือ การทดสอบอทิพิลร่วม AC และการทดสอบอทิพิลร่วม AB มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบน้อยที่สุด ส่วนตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์ มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบสูงสุดร้อยละ 100 ในเกือบทุกสถานการณ์ ยกเว้นการทดสอบของอทิพิลร่วม AB กรณีที่ 1 และ 2 สำหรับทุกขนาดตัวอย่าง และกรณีที่ 3 สำหรับ $N=16$ และ 24

และกรณีการทดสอบอทิพิลร่วม 3 ปัจจัย ทั้ง 3 กรณี พบว่าตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่อะไลน์ มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบอทิพิลร่วม ABC สูงสุดร้อยละ 100 ในทุกสถานการณ์

5. สรุป

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวสถิติทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์สำหรับแผนแบบการทดลอง 2^3 แฟกทอเรียลในงานวิจัยนี้ พบว่าตัวสถิติทดสอบผลรวมลำดับที่ไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ในทุกสถานการณ์ จึงไม่นำมาเปรียบเทียบกับร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบกับตัวสถิติทดสอบ

การแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่อะไลน์ ส่วนตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่อะไลน์ สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ค่อนข้างดีในเกือบทุกสถานการณ์ จึงนำมาเปรียบเทียบกับร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบ และพบว่ากรณีการทดสอบอทิพิลหลัก A, B และ C ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่อะไลน์มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบสูงกว่าตัวสถิติทดสอบการ

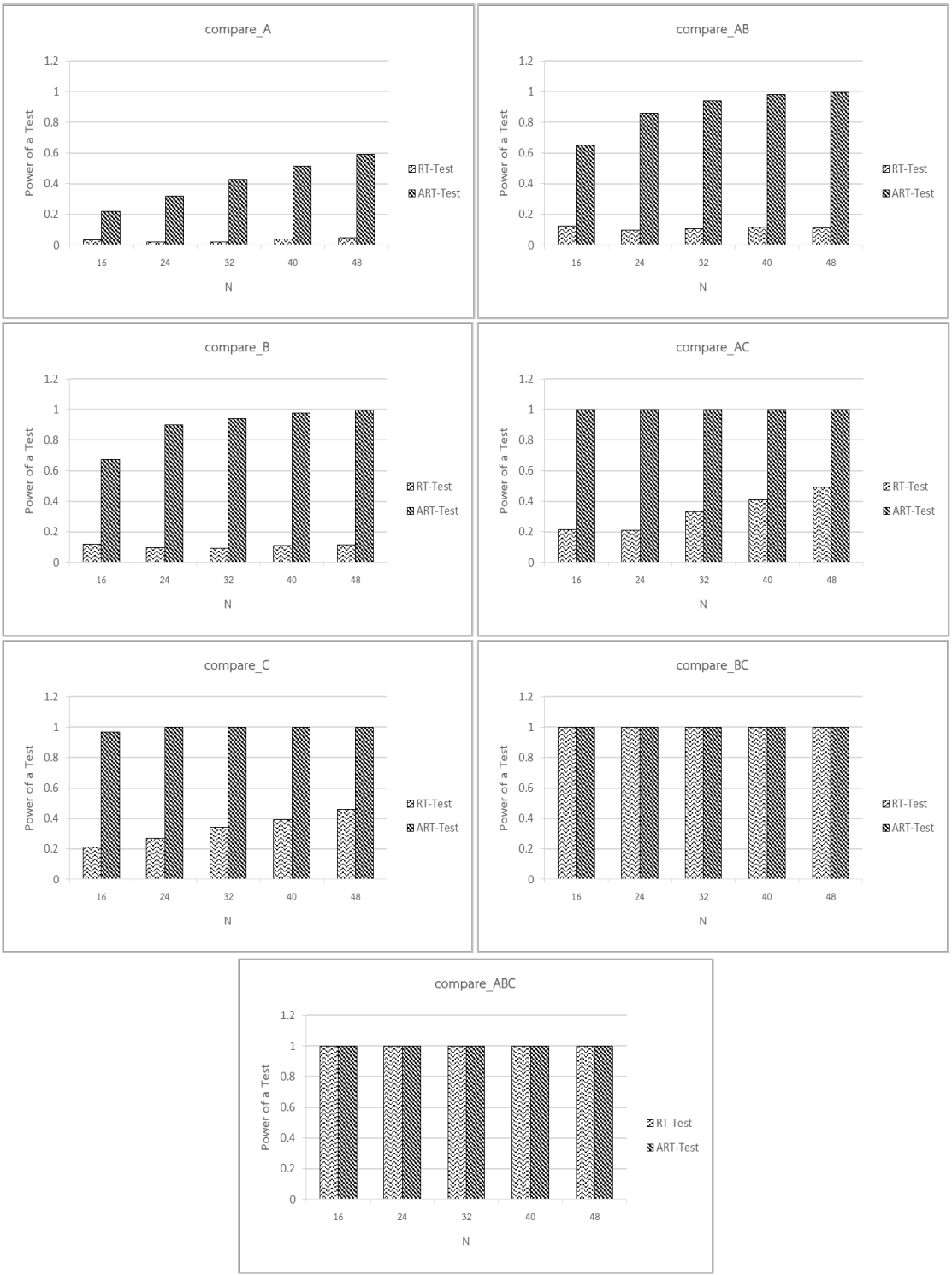
แปลงลำดับที่ในทุกสถานการณ์ และเนื่องจากทั้ง 3

กรณีมีการกำหนดอิทธิพลของปัจจัย C สูงที่สุด รองลง

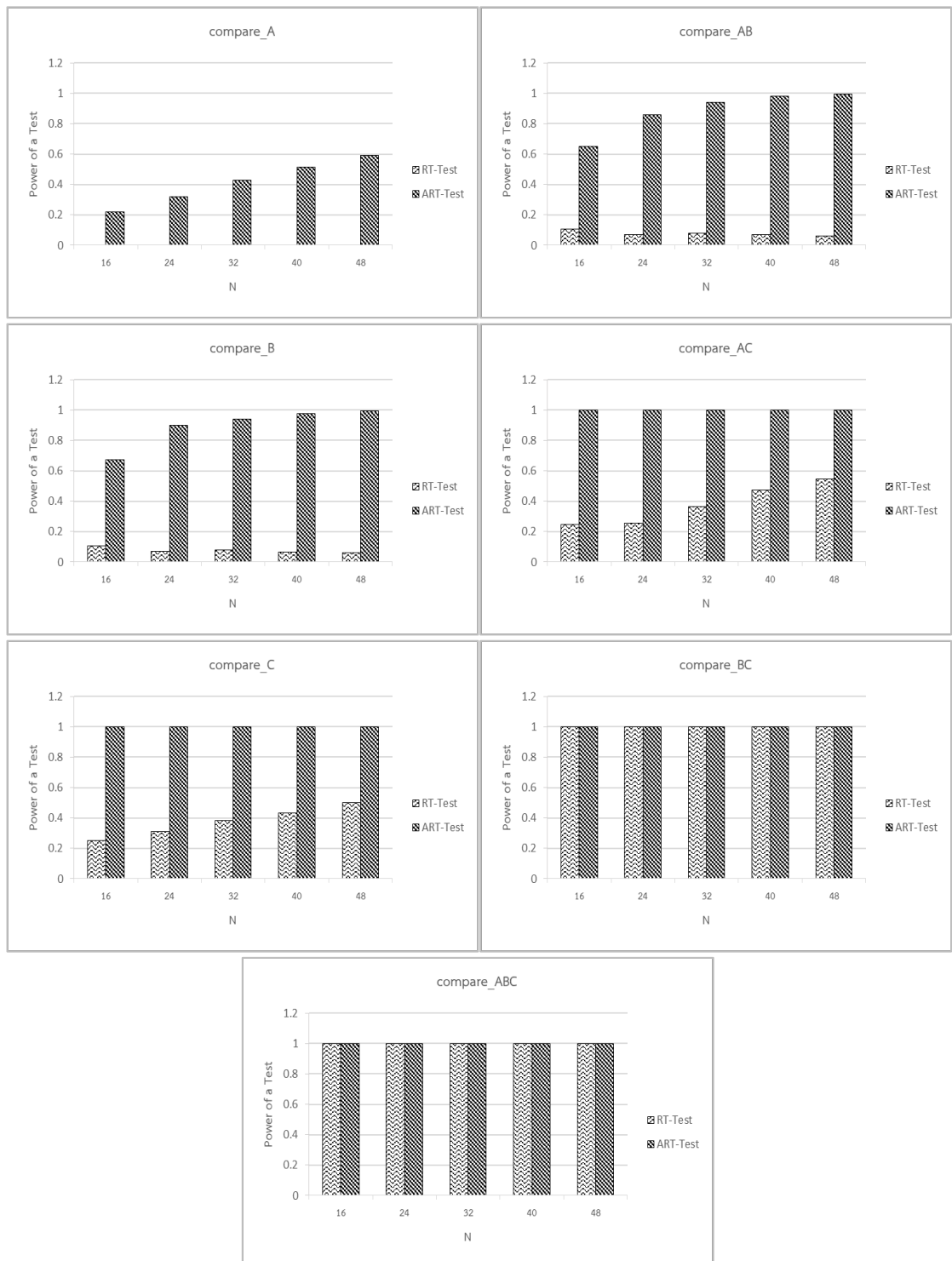
ตารางที่ 2 ค่าร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ RT และ ART

อิทธิพล	N	กรณีที่ 1		กรณีที่ 2		กรณีที่ 3	
		RT	ART	RT	ART	RT	ART
A	16	3.60	22.00	0.00	22.00	0.00	22.00
	24	2.00	31.90	0.00	31.90	0.00	31.90
	32	2.20	42.90	0.00	42.90	0.00	42.90
	40	3.70	51.50	0.00	51.50	0.00	51.50
	48	4.60	59.30	0.00	59.30	0.00	59.30
B	16	12.10	67.10	10.50	67.10	10.70	95.50
	24	9.70	90.10	6.90	90.10	6.70	99.90
	32	9.30	94.20	7.70	94.20	7.90	100.00
	40	11.10	97.80	6.50	97.80	6.90	100.00
	48	11.40	99.30	6.20	99.30	5.50	100.00
C	16	21.00	96.80	25.20	100.00	23.90	100.00
	24	27.00	99.90	31.10	100.00	24.20	100.00
	32	34.40	100.00	38.10	100.00	34.70	100.00
	40	39.30	100.00	43.10	100.00	44.30	100.00
	48	46.10	100.00	50.00	100.00	51.30	100.00
AB	16	12.30	64.90	10.80	64.90	10.50	95.70
	24	9.80	85.70	7.00	85.70	6.60	99.70
	32	10.70	94.00	7.70	94.00	7.70	100.00
	40	11.40	98.00	6.90	98.00	7.00	100.00
	48	11.20	99.50	6.10	99.50	6.00	100.00
AC	16	21.70	100.00	24.50	100.00	23.90	100.00
	24	21.10	100.00	25.80	100.00	30.00	100.00
	32	33.20	100.00	36.40	100.00	35.80	100.00
	40	40.90	100.00	47.20	100.00	41.10	100.00
	48	49.30	100.00	54.40	100.00	48.50	100.00
BC	16	99.90	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	24	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	32	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	40	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	48	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
ABC	16	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	24	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

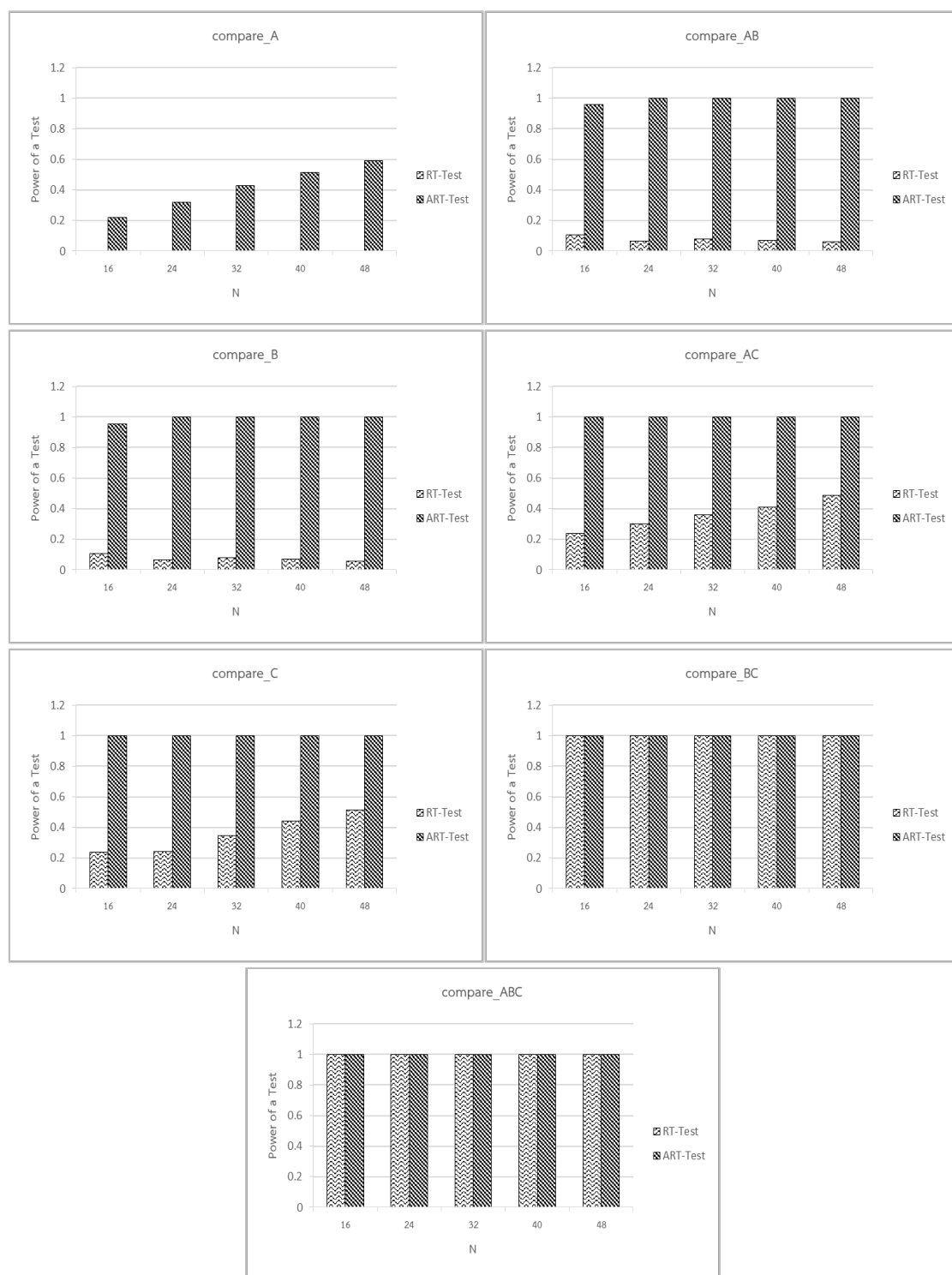
	32	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	40	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	48	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00



รูปที่ 1 การเปรียบเทียบค่าประมาณกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ RT และ ART เมื่อค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลของปัจจัย A, B และ C คือ $\tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \beta_1 = -2, \beta_2 = 2$ และ $\gamma_1 = 3, \gamma_2 = -3$



รูปที่ 2 การเปรียบเทียบค่าประมาณกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ RT และ ART เมื่อค่าพารามิเตอร์สำหรับอิทธิพลของปัจจัย A, B และ C คือ $\tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \beta_1 = -2, \beta_2 = 2$ และ $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = -5$



รูปที่ 3 การเปรียบเทียบค่าประมาณกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ RT และ ART เมื่อค่าพารามิเตอร์สำหรับ

อิทธิพลของปัจจัย A, B และ C คือ $\tau_1 = -1, \tau_2 = 1; \beta_1 = 3, \beta_2 = -3$ และ $\gamma_1 = -5, \gamma_2 = 5$

รองลงมา คือ B และ A ตามลำดับ ดังนั้นจึงทำให้ร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบของการทดสอบอิทธิพลหลักของปัจจัย C มีค่าสูงที่สุด รองลงมาคือ B และ A ตามลำดับ

กรณีทดสอบอิทธิพลร่วม 2 ปัจจัย ทั้ง 3 กรณี พบว่าในการทดสอบอิทธิพลร่วม AB, AC และ BC ตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่เอชโลนั้น มีร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบสูงกว่าหรือเท่ากับตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่ในทุกสถานการณ์ และส่วนใหญ่พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่าร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบมีแนวโน้มสูงขึ้น

และกรณีทดสอบอิทธิพลร่วม 3 ปัจจัย ทั้ง 3 กรณี พบว่าตัวสถิติทดสอบการแปลงลำดับที่และการแปลงลำดับที่เอชโลให้ค่าร้อยละของค่าประมาณกำลังการทดสอบสำหรับอิทธิพลร่วม ABC เท่ากันและมีค่าสูงสุดร้อยละ 100 ในทุกสถานการณ์

6. รายการอ้างอิง

- [1] ขวัญ สุภีรัตน์, 2552, ประสิทธิภาพของสถิติทดสอบสำหรับแผนแบบแฟคทอเรียล กรณีที่มีตัวแปรร่วม, ว.วิทยาศาสตร์ มข. 37: 102-111.
- [2] Leys, C. and Schumann, S., 2010, A nonparametric method to analyze interactions: The adjusted rank transform test, J. Exp. Soc. Psychol. 46: 684-688.
- [3] พรนภา ด่านไทยวัฒนา, 2556, การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของสถิติทดสอบสำหรับแผนการทดลองแบบ 2×2 แฟคทอเรียล, ว.วิทยาศาสตร์ มข. 41: 781-788.
- [4] Bradley, J.V., 1978, Robustness?, Br. J. Math. Stat. Psychol. 31: 144-152.
- [5] Dunn, O.J., 1964, Multiple comparisons using rank sums, Technometrics 6: 241-252.
- [6] Kao, E.P.C., 1969, A non-parametric approach to the 2^3 factorial design, Technometrics 11: 193- 196.
- [7] Akritas, M.G., Arnold, S.F. and Brunner, E., 1997, Nonparametric hypotheses and rank statistics for unbalanced factorial designs, J. Am. Stat. Assoc. 92: 258-265.
- [8] Wobbrock, J.O., Findlater, L., Gergle, D., Higgins, J.J., 2011, The aligned rank transform for nonparametric factorial analyses using only ANOVA procedures, pp. 143-146, 29th Annual CHI Conference on Human Factors in Computing Systems (CHI 2011), Vancouver.
- [9] Montgomery, D.C., 1976, Design and Analysis of Experiments, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 418 p.