

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพตัวสถิติทดสอบ สำหรับการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร Efficiency Comparison of the Statistical Tests for Multivariate Normal Distribution

มัทนา สีโน*, จุฑาภรณ์ สิ้นสมบุญทอง และธิดาพร ศุภภากร

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10900

Mantana Seeno*, Juthaphorn Sinsomboonthong and Thidaporn Supapakorn

Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University,

Ladyao, Chatuchak, Bangkok 10900

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี สำหรับการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร คือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska เมื่อกำหนดให้จำนวนตัวแปร (p) สำหรับการแจกแจงหลายตัวแปรเท่ากับ 3 และกำหนดเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม 3 ระดับ โดยขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษา คือ 20, 30, 50, 70, 100, 150 และ 200 ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ได้มาจากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลจำนวน 126 สถานการณ์ และมีการทำซ้ำ 2,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ เกณฑ์การเปรียบเทียบประสิทธิภาพจะพิจารณาจากกำลังการทดสอบเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้เท่านั้น ผลการวิจัยพบว่าที่ระดับนัยสำคัญ 5 % ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ส่วนใหญ่มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ในกรณีขนาดตัวอย่างใหญ่ ส่วนตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ทุกสถานการณ์ นอกจากนี้เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกำลังการทดสอบ พบว่าตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในการแจกแจงที่หลายตัวแปร $df = 2$ และ 4 การแจกแจงล็อกปรกติหลายตัวแปรและการแจกแจงโคชีหลายตัวแปรทุกสถานการณ์

คำสำคัญ : ตัวสถิติทดสอบ; การแจกแจงปรกติหลายตัวแปร; ความผิดพลาดแบบที่ 1; กำลังการทดสอบ

Abstract

The objective of this research is to compare the efficiency of four statistical tests–Mardia’s, Mardia and Kent’s, Koizumi *et al.*’s and Hanusz and Tarasinska’s statistical tests–for multivariate normal distribution. Three variables (p) and three levels of covariance matrix for multivariate distribution are defined. The sample size (n) for this study equals 20, 30, 50, 70, 100, 150 and 200. The simulation data are conducted 126 situations by Monte Carlo technique and replicated 2,000 times for each situation. The criterion for efficiency comparison is power of the test which the statistical tests can only control type I error. The conclusions of this research are as follows: Mardia’s statistical test and Mardia and Kent’s statistical test tend to control the probability of type I error at the significant level 5 % for a large sample size. However, Koizumi *et al.*’s statistical test and Hanusz and Tarasinska’s statistical test tend to control the probability of type I error for all situations. When considering power of the test, it is found that Koizumi *et al.*’s statistical test tends to have the highest power of the test for multivariate t distribution with 2 and 4 degrees of freedom, multivariate lognormal and multivariate cauchy distributions for all situations.

Keywords: statistical test; multivariate normal distribution; type I error; power of the test

1. บทนำ

ปัจจุบันงานวิจัยในสาขาต่าง ๆ เช่น ทาง การ แพทย์ การเกษตร วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี มีการนำเทคนิคการวิเคราะห์หลายตัวแปร (multivariate analysis) มาใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งวิธีการที่ใช้วิเคราะห์หลายตัวแปรมีหลายวิธี ได้แก่ การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร (multivariate analysis of variance) การวิเคราะห์องค์ประกอบหลัก (principal component analysis) การวิเคราะห์ปัจจัย (factor analysis) และการวิเคราะห์การถดถอยลอจิสติก (logistic regression analysis) เป็นต้น โดยการวิเคราะห์หลายตัวแปรเหล่านี้มีข้อดกกลเบื้องต้น คือ ข้อมูลประชากรจะต้องมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร [1] ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องตรวจสอบข้อดกกลเบื้องต้นก่อนที่จะนำเทคนิคดังกล่าวมาใช้ในการวิเคราะห์ หากพบว่าข้อมูลที่น่ามาศึกษานั้นไม่

เป็นไปตามข้อดกกลเบื้องต้น จะส่งผลทำให้การวิเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลในงานวิจัยเกิดความผิดพลาดได้ ซึ่งการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร มีหลายวิธี [2] เช่น การพิจารณาจากกราฟ (graph) การทดสอบภาวะสารูปดี (goodness-of-fit test) การทดสอบความเบ้ (skewness) และความโด่ง (kurtosis) และการทดสอบความคงเส้นคงวา (consistent) และความยืนยง (invariant) ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกศึกษาการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรจาก 1 ใน 4 วิธี คือ วิธีทดสอบที่ใช้การวัดความเบ้และความโด่ง โดยมีหลักการทดสอบ คือ การหาสัมประสิทธิ์ความเบ้ของหลายตัวแปรและสัมประสิทธิ์ความโด่งของหลายตัวแปรของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะเชิงประจักษ์ แล้วเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตของสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของฟังก์ชันการแจกแจงปกติหลายตัวแปร วิธีนี้มี

ข้อดี คือ มีกำลังการทดสอบสูง ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบการแจกแจงเมื่อมีการแปลงรูปข้อมูลและบางวิธีมีความคงเส้นคงวา เช่น ตัวสถิติทดสอบของ Mardia [3] ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent [8]

ตัวสถิติทดสอบที่ใช้สำหรับทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรได้มีการพัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ. 1970 Mardia [3] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ A และ B โดยใช้สัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของประชากรหลายตัวแปรตามลำดับ ซึ่งแยกการทดสอบความเบ้และความโด่งของการแจกแจง โดยที่ตัวสถิติทดสอบ A และ B นี้ใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยต่าง ๆ ต่อมาในปี ค.ศ. 1974 Mardia [4] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ A' และ B' โดยการเพิ่มความแม่นยำให้กับโมเมนต์ของสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของตัวอย่างหลายตัวแปร ตามลำดับ และแยกการทดสอบความเบ้และความโด่งของการแจกแจง ซึ่งพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ A และ B ของ Mardia [3] จากนั้นในปี ค.ศ. 1980 Small [5] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ Q_3 โดยมีหลักการ คือ จะพิจารณาโมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 ไปพร้อมกัน ต่อมาในปี ค.ศ. 1984 Srivastava [6] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ S_1 และ S_2 โดยใช้สัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของประชากรหลายตัวแปร ตามลำดับ หลักการของวิธีนี้ คือ แยกการทดสอบความเบ้และความโด่งของการแจกแจง หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1987 Jarque และ Bera [7] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ LM_N (lagrange multiplier) ซึ่งเกิดจากการรวมกันของตัวสถิติทดสอบ A และ B ของ Mardia [3] ต่อมาในปี ค.ศ. 1991 Mardia และ Kent [8] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ T โดยมีหลักการ คือ พิจารณาโมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 ไปพร้อมกัน ซึ่งพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ Rao score [9] และในปี ค.ศ. 2009 Koizumi และคณะ

[10] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ MJB_M^* โดยพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ LM_N ของ Jarque และ Bera [7] ซึ่งประกอบด้วยตัวสถิติทดสอบ A' และ B' ของ Mardia [4] พบว่าตัวสถิติทดสอบนี้ให้กำลังการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงปกติเบ้หลายตัวแปรและการแจกแจงที่หลายตัวแปร หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2014 Hanusz และ Tarasinska [11] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ T_M ซึ่งพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ A' และ B' ของ Mardia [4] เช่นเดียวกันกับตัวสถิติทดสอบ MJB_M^* ของ Koizumi และคณะ [10] ผลการวิจัยพบว่าตัวสถิติทดสอบนี้ให้กำลังการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงเอกรูปหลายตัวแปร

เนื่องจากตัวสถิติทดสอบแต่ละวิธีที่กล่าวถึงในข้างต้นได้มีการพัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่อง และตัวสถิติทดสอบแต่ละวิธีอาจไม่ได้มีประสิทธิภาพดีที่สุดในทุกสถานการณ์หรือตัวสถิติทดสอบบางตัวยังไม่เคยนำมาศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพ เช่น ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent กับตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska ดังนั้นเพื่อให้เห็นประสิทธิภาพและความแตกต่างจากตัวสถิติทดสอบตัวเดิมที่ถูกพัฒนา งานวิจัยนี้จึงศึกษาเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี สำหรับการแจกแจงปกติหลายตัวแปร คือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska เนื่องจากตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี พบว่ามีประสิทธิภาพดีที่สุดในการศึกษาที่ผ่านมาของงานวิจัยต่าง ๆ ในสถานการณ์ที่แตกต่างกันไป โดยเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพจะพิจารณาจากความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 และกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี ดังกล่าวข้างต้น

2. ตัวสถิติทดสอบ

ตัวสถิติทดสอบสำหรับการแจกแจงปรกติหลายตัวแปรที่ศึกษามีดังนี้

2.1 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia

Mardia [3] ได้นำเสนอตัวสถิติทดสอบ A และ B ที่ใช้โมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 มาทดสอบข้อมูลที่มีการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร โดยจำนวนตัวแปรที่ศึกษา (p) ในงานวิจัยนี้เท่ากับ 3 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia มีหลักการ คือ แยกการทดสอบสัมประสิทธิ์ความเบ้ ($\beta_{1,p}$) และสัมประสิทธิ์ความโด่ง ($\beta_{2,p}$) ของการแจกแจงหลายตัวแปรของข้อมูลประชากร ภายใต้สมมุติฐานว่าง $H_0: \beta_{1,p} = 0$ และ $H_0: \beta_{2,p} = p(p+2)$ ตามลำดับ ถ้าหากยอมรับสมมุติฐานว่าง (H_0) ทั้งสองนี้ แสดงว่าข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร

ตัวสถิติทดสอบ A ใช้สำหรับทดสอบการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร โดยการทดสอบภายใต้สมมุติฐานว่าง คือ $\beta_{1,p} = 0$ โดยที่ $\beta_{1,p}$ คือสัมประสิทธิ์ความเบ้ของประชากรหลายตัวแปร ถ้าหากปฏิเสธสมมุติฐานว่างสามารถอธิบายได้ว่าประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ และการแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ A ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ โดยตัวสถิติทดสอบ มีรูปแบบดังนี้

$$A = \frac{n}{6} b_{1,p}$$

เมื่อ $b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}) \right\}^3$ คือสัมประสิทธิ์ความเบ้ของตัวอย่างหลายตัวแปร, n คือขนาดตัวอย่าง, $\mathbf{X}_i' = [\mathbf{X}_{i1} \mathbf{X}_{i2} \dots \mathbf{X}_{ip}]_{1 \times p}$; $i=1,2,\dots,n$, $\bar{\mathbf{X}}' = [\bar{\mathbf{X}}_1 \bar{\mathbf{X}}_2 \dots \bar{\mathbf{X}}_p]_{1 \times p}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง โดยที่ $\bar{\mathbf{X}}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{mi}$; $m=1,2,\dots,p$,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{คือ เมทริกซ์ความ}$$

แปรปรวนร่วมของตัวอย่าง โดยที่ $S_{mk} =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{mi} - \bar{\mathbf{X}}_m)(\mathbf{X}_{ki} - \bar{\mathbf{X}}_k); m,k=1,2,\dots,p \text{ และ}$$

$\mathbf{S}^{-1}$ คือ เมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{S}$ ขนาด $p \times p$

ตัวสถิติทดสอบ B ใช้สำหรับทดสอบการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร โดยการทดสอบภายใต้สมมุติฐานว่าง คือ $\beta_{2,p} = p(p+2)$ โดยที่ $\beta_{2,p}$ คือสัมประสิทธิ์ความโด่งของประชากรหลายตัวแปร ถ้าหากปฏิเสธสมมุติฐานว่างสามารถอธิบายได้ว่าประชากรมีการแจกแจงแบบโด่ง และการแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ B ประมาณได้ด้วยการแจกแจงปรกติมาตรฐาน โดยตัวสถิติทดสอบ มีรูปแบบดังนี้

$$B = \frac{b_{2,p} - p(p+2)}{\sqrt{8p(p+2)/n}}$$

เมื่อ $b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \right\}^2$ คือ สัมประสิทธิ์

ความโด่งของตัวอย่างหลายตัวแปร, n คือ ขนาด

ตัวอย่าง, p คือ จำนวนตัวแปร, $\mathbf{X}_i' = [\mathbf{X}_{i1} \mathbf{X}_{i2} \dots \mathbf{X}_{ip}]_{1 \times p}$

; $i=1,2,\dots,n$, $\bar{\mathbf{X}}' = [\bar{\mathbf{X}}_1 \bar{\mathbf{X}}_2 \dots \bar{\mathbf{X}}_p]_{1 \times p}$ คือ เวกเตอร์

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง โดยที่ $\bar{\mathbf{X}}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{mi}$;

$$m=1,2,\dots,p, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{คือ เมทริกซ์}$$

ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง โดยที่ $S_{mk} =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{mi} - \bar{\mathbf{X}}_m)(\mathbf{X}_{ki} - \bar{\mathbf{X}}_k); m,k=1,2,\dots,p \text{ และ}$$

$\mathbf{S}^{-1}$ คือ เมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{S}$ ขนาด $p \times p$

2.2 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent

Mardia และ Kent [8] ได้นำเสนอตัวสถิติ

ทดสอบ T สำหรับทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร โดยมีหลักการ คือ พิจารณาโมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 ไปพร้อมกัน และสามารถทดสอบความเป็นอิสระกันระหว่างตัวแปร ซึ่งตัวสถิติทดสอบ T นี้ได้พัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ Rao score [9]

การแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ T ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ $\frac{p(p+1)(p+2)(p+7)}{24}$ โดยตัวสถิติทดสอบ มีรูปแบบดังนี้

$$T = T_3 + T_4$$

เมื่อ $T_3 = A$ ซึ่งได้มาจากตัวสถิติทดสอบของ Mardia [3]

กล่าวคือ $T_3 = A = \frac{1}{6}nb_{1,p}$, $T_4 = \frac{1}{24}n\{b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2)\}$,

$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \right\}^3$ คือ สัมประสิทธิ์

ความเบ้ของตัวอย่างหลายตัวแปร, $b_{2,p} =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right\}^2$ คือ สัมประสิทธิ์

ความโด่งของตัวอย่างหลายตัวแปร, $b_{2,p}^* =$

$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \right\}^4$, n คือ ขนาดตัวอย่าง,

p คือ จำนวนตัวแปร, $\mathbf{X}'_i = [\mathbf{x}_{i1} \mathbf{x}_{i2} \dots \mathbf{x}_{ip}]_{1 \times p}$;

$i=1,2,\dots,n$, $\bar{\mathbf{x}}' = [\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p]_{1 \times p}$ คือ เวกเตอร์

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง โดยที่ $\bar{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{mi}$;

$m=1,2,\dots,p$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p}$ คือ เมทริกซ์

ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง โดยที่ $S_{mk} =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_{mi} - \bar{\mathbf{x}}_m)(\mathbf{x}_{ki} - \bar{\mathbf{x}}_k)$; $m,k=1,2,\dots,p$ และ

$\mathbf{S}^{-1}$ คือ เมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{S}$ ขนาด $p \times p$

2.3 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ

Koizumi และคณะ [10] ได้เสนอตัวสถิติ

ทดสอบ $\mathbf{MJB}_M^*$ สำหรับทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร โดยพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ $\mathbf{LM}_N$ ของ Jarque และ Bera [7] ซึ่งตัวสถิติทดสอบ $\mathbf{MJB}_M^*$ ประกอบด้วยตัวสถิติทดสอบ A' และ B' ของ Mardia [4]

การแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ $\mathbf{MJB}_M^*$ สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ $\frac{p(p+1)(p+2)}{6} + 1$ โดยตัวสถิติทดสอบ มีรูปแบบดังนี้

$$\mathbf{MJB}_M^* = A' + (B')^2$$

เมื่อ $A' = \frac{nK}{6} b_{1,p}$, $K = \frac{(p+1)(n+1)(n+3)}{n\{(n+1)(p+1) - 6\}}$,

$B' = \frac{(n+1)b_{2,p} - p(n+2)(n-1)}{\sqrt{8p(p+2)(n-3)(n-p-1)(n-p+1)/\{(n+3)(n+5)\}}}$

$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \right\}^3$ คือ

สัมประสิทธิ์ความเบ้ของตัวอย่างหลายตัวแปร, $b_{2,p} =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right\}^2$ คือ สัมประสิทธิ์

ความโด่งของตัวอย่างหลายตัวแปร, n คือ ขนาด

ตัวอย่าง, p คือ จำนวนตัวแปร, $\mathbf{X}'_i = [\mathbf{x}_{i1} \mathbf{x}_{i2} \dots \mathbf{x}_{ip}]_{1 \times p}$;

$i=1,2,\dots,n$, $\bar{\mathbf{x}}' = [\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p]_{1 \times p}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย

ของตัวอย่าง โดยที่ $\bar{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{mi}$;

$m=1,2,\dots,p$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p}$ คือ เมทริกซ์

ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง โดยที่ $S_{mk} =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_{mi} - \bar{\mathbf{x}}_m)(\mathbf{x}_{ki} - \bar{\mathbf{x}}_k)$; $m,k=1,2,\dots,p$ และ

$\mathbf{S}^{-1}$ คือ เมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{S}$ ขนาด $p \times p$

2.4 ตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ

Tarasinska

Hanusz และ Tarasinska [11] ได้นำเสนอ

ตัวสถิติทดสอบ T_M สำหรับทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ซึ่งพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบ A' และ B' ของ Mardia [4] โดยการเพิ่มความแม่นยำให้กับโมเมนต์ของสัมประสิทธิ์ความเบ้ของตัวอย่างหลายตัวแปรและสัมประสิทธิ์ความโด่งของตัวอย่างหลายตัวแปร

การแจกแจงของตัวสถิติทดสอบ T_M ประมาณได้ด้วยการแจกแจงที่มีองศาเสรี (f) เท่ากับ $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ โดยตัวสถิติทดสอบ มีรูปแบบดังนี้

$$T_M = \frac{B'}{\sqrt{A'/f}}$$

เมื่อ $A' = \frac{nK}{6} b_{1,p}$, $K = \frac{(p+1)(n+1)(n+3)}{n\{(n+1)(p+1)-6\}}$,

$$B' = \frac{(n+1)b_{2,p} - p(n+2)(n-1)}{\sqrt{8p(p+2)(n-3)(n-p-1)(n-p+1)/\{(n+3)(n+5)\}}}$$

$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}) \right\}^3$ คือ

สัมประสิทธิ์ความเบ้ของตัวอย่างหลายตัวแปร, $b_{2,p} =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \right\}^2$$
 คือ สัมประสิทธิ์ความ

โด่งของตัวอย่างหลายตัวแปร, n คือ ขนาดตัวอย่าง,

p คือ จำนวนตัวแปร, $\mathbf{X}'_i = [\mathbf{X}_{i1} \mathbf{X}_{i2} \dots \mathbf{X}_{ip}]_{1 \times p}$;

$i=1,2,\dots,n$, $\bar{\mathbf{X}}' = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \dots \bar{X}_p]_{1 \times p}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย

ของตัวอย่าง โดยที่ $\bar{\mathbf{X}}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{mi}$; $m=1,2,\dots,p$,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{bmatrix}_{p \times p}$$
 คือ เมทริกซ์

ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง โดยที่ $S_{mk} =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{mi} - \bar{\mathbf{X}}_m)(\mathbf{X}_{ki} - \bar{\mathbf{X}}_k) ; m,k=1,2,\dots,p$$

และ $\mathbf{S}^{-1}$ คือ เมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{S}$ ขนาด $p \times p$

3. วิธีการวิจัย

3.1 ตั้งสมมติฐานสำหรับการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่ระดับนัยสำคัญ 5 % ดังนี้

H_0 : ประชากรมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร แยกกัน

H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

3.2 ใช้โปรแกรม SAS เวอร์ชัน 9.4 ในการจำลองข้อมูลโดยเทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation technique) มีการทำซ้ำ 2,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ รวมสถานการณ์ที่ศึกษาทั้งหมด 126 สถานการณ์ ดังนี้

3.2.1 กำหนดจำนวนตัวแปรที่ศึกษา (p) คือ 3 ตัวแปร โดยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยประชากรที่ศึกษาสำหรับทุกการแจกแจง คือ $\boldsymbol{\mu} = [0 \ 0 \ 0]'_{1 \times 3}$ และกำหนดเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรที่ศึกษาสำหรับทุกการแจกแจงมี 3 แบบ คือ Σ_1 , Σ_2 และ Σ_3 โดยกำหนดให้สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ m และ k คือ $\rho_{mk} = \frac{\sigma_{mk}}{\sqrt{\sigma_m^2} \sqrt{\sigma_k^2}}$; $\sigma_{mk} = 0.3, 0.6, 0.9$

ซึ่ง σ_{mk} คือ ความแปรปรวนร่วมระหว่าง X_m และ X_k , $\sigma_m^2 = \sigma_k^2 = 1$ ซึ่ง σ_m^2 และ σ_k^2 คือ ความแปรปรวนของ X_m และ X_k ตามลำดับ เมื่อ $m,k=1,2,\dots,p$ จะได้สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ศึกษาแบบที่ 1 คือ $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.3$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรแบบที่ 1 คือ

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$
 , สหสัมพันธ์ระหว่างตัว

แปรที่ศึกษาแบบที่ 2 คือ $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.6$ จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรแบบที่ 2

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$
 และสหสัมพันธ์

ระหว่างตัวแปรที่ศึกษาแบบที่ 3 คือ $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.9$ จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ

$$\text{ประชากรแบบที่ 3 คือ } \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

3.2.2 จำลองข้อมูลที่มีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20, 30, 50, 70, 100, 150 และ 200 จากประชากร 4 การแจกแจง 6 แบบ คือ การแจกแจงปกติหลายตัวแปร, การแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มีองศาเสรี (df) เท่ากับ 2, 4 และ 8, การแจกแจงล็อกปกติหลายตัวแปร และการแจกแจงโคชีหลายตัวแปร

3.3 นำข้อมูลที่ได้จากการจำลองในข้อ 3.2 มาคำนวณตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี

3.4 คำนวณค่าพี (p-value) ของตัวสถิติทดสอบแต่ละตัว

3.5 เปรียบเทียบค่าพีกับระดับนัยสำคัญ 5 % เพื่อตัดสินใจยอมรับสมมติฐานว่างหรือปฏิเสธสมมติฐานว่าง

3.6 คำนวณค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการจำลอง ($\hat{\alpha}$) ของตัวสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี โดยความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการจำลอง คำนวณจากจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อสมมติฐานว่างเป็นจริงหารด้วยจำนวนครั้งของการทำซ้ำในที่นี่เท่ากับ 2,000 ครั้ง

3.7 เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ของตัวสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี โดยใช้เกณฑ์ของ Dale [12] ในการทดสอบสมมติฐานดังนี้

H'_0 : ตัวสถิติทดสอบมีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 แย่กับ

H'_1 : ตัวสถิติทดสอบไม่มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

ถ้าค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการจำลองอยู่ในช่วง $[0.02547, 0.09583]$ แสดงว่ายอมรับสมมติฐานว่าง (H'_0) ดังนั้นตัวสถิติทดสอบมีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 จะเปรียบเทียบกำลังการทดสอบต่อไป โดยพิจารณาเปรียบเทียบกำลังการทดสอบเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เท่านั้น

3.8 คำนวณกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี

กำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ คำนวณจากจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อสมมติฐานทางเลือก (H_1) เป็นจริงหารด้วยจำนวนครั้งของการทำซ้ำในที่นี่เท่ากับ 2,000 ครั้ง

3.9 เปรียบเทียบกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี

4. ผลการวิจัย

กำหนดให้ M คือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia; MK คือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent; K คือ ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ; HT คือ ตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska; ALL คือ ตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี โดยผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

4.1 การตรวจสอบความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ของตัวสถิติทดสอบ

งานวิจัยนี้ใช้เกณฑ์ของ Dale [12] ในการตรวจสอบความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ของตัวสถิติทดสอบ กล่าวคือ ถ้าค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการจำลองอยู่ในช่วง $[0.02547, 0.09583]$ แสดงว่าตัวสถิติทดสอบมีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 และจากตารางที่ 1 พบว่าตัวสถิติทดสอบของ Mardia ไม่มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่

1 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 30 ในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร (Σ) และตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ไม่มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และเมทริกซ์ความ

แปรปรวนร่วมของประชากรเป็นแบบที่ 1 และ 2 ส่วนตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 1 ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 จากการจำลอง ($\hat{\alpha}$) สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของประชากร (Σ)	ตัวสถิติ ทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$	M	0.0110*	0.0170*	0.0395	0.0375	0.0415	0.0490	0.0565
	MK	0.0195*	0.0335	0.0520	0.0545	0.0510	0.0535	0.0555
	K	0.0590	0.0500	0.0560	0.0430	0.0375	0.0380	0.0350
	HT	0.0400	0.0350	0.0430	0.0305	0.0410	0.0385	0.0425
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$	M	0.0115*	0.0195*	0.0405	0.0375	0.0425	0.0575	0.0640
	MK	0.0205*	0.0345	0.0495	0.0530	0.0550	0.0540	0.0575
	K	0.0590	0.0465	0.0580	0.0420	0.0415	0.0425	0.0420
	HT	0.0415	0.0370	0.0440	0.0300	0.0420	0.0390	0.0455
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$	M	0.0170*	0.0215*	0.0450	0.0430	0.0485	0.0595	0.0730
	MK	0.0290	0.0450	0.0595	0.0600	0.0545	0.0630	0.0620
	K	0.0680	0.0605	0.0665	0.0495	0.0450	0.0460	0.0490
	HT	0.0430	0.0345	0.0430	0.0305	0.0420	0.0400	0.0440

*ตัวสถิติทดสอบที่ไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

4.2 การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ

พิจารณากำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี คือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska โดยจะพิจารณาเปรียบเทียบกำลังการทดสอบเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุม

ความผิดพลาดแบบที่ 1 ในหัวข้อ 4.1 เท่านั้น โดยผลการเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี ปรากฏในตารางที่ 2 ถึง 7

ตารางที่ 2 สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงทวิคูณที่มี $df = 2$ พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 30 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร และเมื่อเมท

ริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีค่านอกเส้นทแยงมุมเพิ่มขึ้นแล้ว กำลังการทดสอบมีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent และตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและมีค่าเท่ากันในทุกแบบของ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร และเมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 70 ขึ้นไป ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีกำลังการทดสอบเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

ตารางที่ 3 สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df = 4$ พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 30 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในทุกแบบของ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เมื่อขนาด

ตัวอย่างเท่ากับ 50 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent และตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและมีค่าเท่ากันในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรเป็นแบบที่ 1 และ 2 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent และตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและมีค่าเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent และตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและมีค่าเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 150 ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีกำลังการทดสอบเท่ากันในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชา-

ตารางที่ 2 กำลังการทดสอบสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงที่หลายตัวแปร $df = 2$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของประชากร (Σ)	ตัวสถิติ ทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	-	0.9995	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9995*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.9825	0.9970	0.9990	1*	1*	1*	1*
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	-	0.9995	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9985*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.9645	0.9940	0.9995	1*	1*	1*	1*
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	0.9735	0.9955	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9895*	0.9990*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.9130	0.9855	0.9995	1*	1*	1*	1*

*ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในแต่ละสถานการณ์; - คือ ไม่ศึกษา เนื่องจากตัวสถิติทดสอบไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

ตารางที่ 3 กำลังการทดสอบสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงที่หลายตัวแปร $df = 4$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของประชากร (Σ)	ตัวสถิติ ทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	0.9995	1*	1*	1*	1*
	MK	-	0.9975	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9970*	0.9990*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.8825	0.9690	0.9955	0.9980	0.9995	1*	1*
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	0.9990*	0.9995	1*	1*	1*
	MK	-	0.9940	0.9990*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9910*	0.9960*	0.9990*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.7875	0.9350	0.9855	0.9950	0.9995	1*	1*
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	0.9885	0.9970	1*	1*	1*
	MK	0.8905	0.9715	0.9920	0.9985*	1*	1*	1*
	K	0.9500*	0.9790*	0.9935*	0.9985*	1*	1*	1*
	HT	0.6690	0.8420	0.9555	0.9825	0.9995	0.9995	1*

*ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในแต่ละสถานการณ์; - คือ ไม่ศึกษา เนื่องจากตัวสถิติทดสอบไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

ตารางที่ 4 กำลังการทดสอบสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงที่หลายตัวแปร $df = 8$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของประชากร (Σ)	ตัวสถิติ ทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	0.9935	0.9975	1*	0.9995*	1*
	MK	-	0.9840	0.9980*	0.9985	0.9985	0.9990	1*
	K	0.9815*	0.9935*	0.9980*	0.9995*	0.9995	0.9995*	1*
	HT	0.6440	0.8350	0.9365	0.9595	0.9850	0.9935	0.9980
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	0.9825	0.9955	0.9980	1*	1*
	MK	-	0.9705	0.9935*	0.9975	0.9975	1*	1*
	K	0.9505*	0.9800*	0.9910	0.9990*	0.9985*	0.9995	1*
	HT	0.5100	0.7180	0.8660	0.9350	0.9690	0.9915	0.9955
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	0.9010	0.9490	0.9830	0.9955*	0.9990*
	MK	0.7170	0.8675	0.9380	0.9705*	0.9870*	0.9940	0.9985
	K	0.8260*	0.8975*	0.9405*	0.9615	0.9845	0.9900	0.9945
	HT	0.3365	0.5295	0.7330	0.8245	0.9135	0.9680	0.9875

*ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในแต่ละสถานการณ์; - คือ ไม่ศึกษา เนื่องจากตัวสถิติทดสอบไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

ตารางที่ 5 กำลังการทดสอบสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงล็อกปรกติหลายตัวแปร

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของประชากร (Σ)	ตัวสถิติ ทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	-	0.9960	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9900*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.7350	0.8700	0.9755	0.9930	0.9990	1*	1*
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	-	0.9985	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9900*	0.9995*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.8110	0.9315	0.9915	0.9970	0.9995	1*	1*
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	0.9720	0.9990	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9940*	0.9995*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.8680	0.9655	0.9960	0.9995	1*	1*	1*

*ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในแต่ละสถานการณ์; - คือ ไม่ศึกษา เนื่องจากตัวสถิติทดสอบไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

ตารางที่ 6 กำลังการทดสอบสำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงโคชีหลายตัวแปร

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ของประชากร (Σ)	ตัวสถิติ ทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	-	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	K	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.9985	1*	1*	1*	1*	1*	1*
$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	-	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	K	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.9960	1*	1*	1*	1*	1*	1*
$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$	M	-	-	1*	1*	1*	1*	1*
	MK	0.9985	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	K	0.9995*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
	HT	0.9930	1*	1*	1*	1*	1*	1*

*ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในแต่ละสถานการณ์; - คือ ไม่ศึกษา เนื่องจากตัวสถิติทดสอบไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

ตารางที่ 7 ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงสุดในแต่ละสถานการณ์

การแจกแจง	Σ	ขนาดตัวอย่าง (n)						
		20	30	50	70	100	150	200
ทีหลายตัวแปร df = 2	Σ_1	K	K	M,MK,K	ALL	ALL	ALL	ALL
	Σ_2	K	K	M,MK,K	ALL	ALL	ALL	ALL
	Σ_3	K	K	M,MK,K	ALL	ALL	ALL	ALL
ทีหลายตัวแปร df = 4	Σ_1	K	K	MK,K	M,MK,K	M,MK,K	ALL	ALL
	Σ_2	K	K	M,MK,K	MK,K	M,MK,K	ALL	ALL
	Σ_3	K	K	K	MK,K	M,MK,K	M,MK,K	ALL
ทีหลายตัวแปร df = 8	Σ_1	K	K	MK,K	K	M	M,K	M,MK,K
	Σ_2	K	K	MK	K	K	M,MK	M,MK,K
	Σ_3	K	K	K	MK	MK	M	M
ล็อกปรกติหลายตัวแปร	Σ_1	K	K	M,MK,K	M,MK,K	M,MK,K	ALL	ALL
	Σ_2	K	K	M,MK,K	M,MK,K	M,MK,K	ALL	ALL
	Σ_3	K	K	M,MK,K	M,MK,K	ALL	ALL	ALL
โคชีหลายตัวแปร	Σ_1	K	MK,K,HT	ALL	ALL	ALL	ALL	ALL
	Σ_2	K	MK,K,HT	ALL	ALL	ALL	ALL	ALL
	Σ_3	K	MK,K,HT	ALL	ALL	ALL	ALL	ALL

กรเป็นแบบที่ 1 และ 2 และเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีกำลังการทดสอบเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร นอกจากนี้ถ้าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีค่านอกเส้นทแยงมุมเพิ่มขึ้นแล้วกำลังการทดสอบมีแนวโน้มลดลง เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30, 50 และ 70

ตารางที่ 4 สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงทีหลายตัวแปรที่มี df = 8 พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 30 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในทุกแบบของ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และ

คณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรเป็นแบบที่ 1 และ 3 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรเป็นแบบที่ 1 และ 2 เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรเป็นแบบที่ 1 และเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 150 และ 200 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร นอกจากนี้ถ้าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีค่านอกเส้นทแยงมุมเพิ่มขึ้นแล้วกำลังการ

ทดสอบมีแนวโน้มลดลง เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30, 50 และ 70

การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของ ตัวสถิติทดสอบ สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df=2, 4$ และ 8 จากตารางที่ 2-4 พบว่า เมื่อองศาเสรี (df) เพิ่มขึ้นในแต่ละแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีแนวโน้มให้กำลังการทดสอบลดลง ซึ่งจะเห็นผลได้อย่างชัดเจนเมื่อขนาดตัวอย่างน้อย (ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 30) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ (ขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 50 ขึ้นไป) จะเห็นแนวโน้มของผลลัพธ์ดังกล่าวข้างต้นลดลงเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

ตารางที่ 5 สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงล็อกปรกติหลายตัวแปร พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 30 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในทุกแบบของ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร และเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีค่านอกเส้นทแยงมุมเพิ่มขึ้นแล้วกำลังการทดสอบมีแนวโน้มลดลง เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent และตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงสุดและมีค่าเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีกำลังการทดสอบเท่ากัน ในกรณีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรเป็นแบบที่ 3 และเมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 150 ขึ้นไป ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีกำลังการทดสอบเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

ตารางที่ 6 สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงโคชีหลายตัวแปร พบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการ

ทดสอบสูงที่สุดในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร และเมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากรมีค่านอกเส้นทแยงมุมเพิ่มขึ้นแล้ว กำลังการทดสอบมีแนวโน้มลดลง เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska มีกำลังการทดสอบสูงสุดและมีค่าเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร และเมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 50 ขึ้นไป ตัวสถิติทดสอบทุกวิธีมีกำลังการทดสอบเท่ากันในทุกแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

5. วิจัยรณ์

ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ทุกสถานการณ์ และเมื่อพิจารณา กำลังการทดสอบพบว่าตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ มีกำลังการทดสอบสูงเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df=2$ และ 4 การแจกแจงล็อกปรกติหลายตัวแปร และการแจกแจงโคชีหลายตัวแปรในทุกสถานการณ์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ Hanusz และคณะ [13] ซึ่งระบุว่าตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ ให้กำลังการทดสอบสูงที่สุดเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df=2$

6. สรุป

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี คือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska สำหรับการแจกแจงปรกติหลายตัวแปรทุกรูปแบบของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่กำหนดใน

งานวิจัยนี้ พบว่าตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ และตัวสถิติทดสอบของ Hanusz และ Tarasinska มีความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ในทุกสถานการณ์ นอกจากนี้ตัวสถิติทดสอบที่มีกำลังการทดสอบสูงสุดในสถานการณ์ต่าง ๆ ปรากฏในตารางที่ 7 ซึ่งพบว่าตัวสถิติทดสอบของ Koizumi และคณะ ส่วนใหญ่มีกำลังการทดสอบสูงที่สุดในเกือบทุกสถานการณ์ ยกเว้นในบางตัวอย่างของการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df=8$

ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ส่วนใหญ่มีกำลังการทดสอบสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ กล่าวคือ ตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent จะเริ่มมีกำลังการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงโคชีหลายตัวแปร เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 30 ขึ้นไป โดยทั้งตัวสถิติทดสอบของ Mardia และตัวสถิติทดสอบของ Mardia และ Kent ส่วนใหญ่มีแนวโน้มให้กำลังการทดสอบสูงในการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df=2$ และการแจกแจงล็อกปรกติหลายตัวแปร เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 50 ขึ้นไป

ตัวสถิติทดสอบทุกวิธี ส่วนใหญ่มีกำลังการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงที่หลายตัวแปรที่มี $df=2$ และการแจกแจงโคชีหลายตัวแปร เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 70 ขึ้นไป และการแจกแจงล็อกปรกติหลายตัวแปร เมื่อขนาดตัวอย่างตั้งแต่ 150 ขึ้นไป

7. ข้อเสนอแนะ

7.1 งานวิจัยครั้งต่อไปสามารถใช้เกณฑ์อื่นในการตรวจสอบความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ของตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี สำหรับการแจกแจงปรกติหลายตัวแปร เช่น เกณฑ์ของ Cochran [14] เกณฑ์ของ Bradley [15] เพื่อพิจารณาผลการวิจัยที่ได้ว่ายังคงเหมือนในงานวิจัยนี้หรือไม่

7.2 งานวิจัยครั้งต่อไปผู้สนใจอาจศึกษาการแจกแจงหลายตัวแปร เมื่อจำนวนตัวแปรมากกว่า 3 หรือศึกษาตัวสถิติทดสอบวิธีอื่น ๆ เช่น ตัวสถิติทดสอบ BB [16] ตัวสถิติทดสอบ T_n [17] หรือศึกษาการแจกแจงแบบอื่น ๆ เช่น การแจกแจงไวบูลหลายตัวแปร (multivariate Weibull distribution) [18] การแจกแจงวอนมิสส์นัยทั่วไปหลายตัวแปร (multivariate Generalised von Mises distribution) [19]

8. รายการอ้างอิง

- [1] สายชล สิ้นสมบุรณ์ทอง, 2559, การวิเคราะห์ตัวแปรหลายตัว, บริษัท จามจุรีโปรดักส์ จำกัด, กรุงเทพฯ, 575 น.
- [2] ไพศาล วรคำ, สำราญ มีแจ้ง, รัตนะ บัวสนธ์ และอรุณี อ่อนสวัสดิ์, 2550, การพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรแบบใหม่ โดยการปรับปรุงวิธีการของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์, ว.จัยและวัดผลการศึกษา 5(2): 1-20.
- [3] Mardia, K.V., 1970, Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications, *Biometrika* 57: 519-530.
- [4] Mardia, K.V., 1974, Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis for testing normality and robustness studies, *Indian J. Stat. Ser. B* 36: 115-128.
- [5] Small, N.J.H., 1980, Marginal skewness and kurtosis in testing multivariate normality, *J. R. Stat. Soc. Ser. C* 29: 85-87.
- [6] Srivastava, M.S., 1984, A measure of skewness and kurtosis and a graphical method for assessing multivariate normality, *Stat. Prob. Lett.* 2: 263-267.

- [7] Jarque, C.M. and Bera, A.K., 1987, A test for normality of observations and regression residuals, *Int. Stat. Rev.* 55: 163-172.
- [8] Mardia, K.V. and Kent, J.T., 1991, Rao score tests of goodness of fit and independence, *Biometrika* 78: 355-363.
- [9] Rao, C.R., 1948, Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with application to problems of estimation, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 44: 50-57.
- [10] Koizumi, K., Okamoto, N. and Seo, T., 2009, On Jarque-Bera tests for assessing multivariate normality, *J. Stat. Adv. Theor. Appl.* 1: 207-220.
- [11] Hanusz, Z. and Tarasinska J., 2014, On multivariate normality tests using skewness and kurtosis, *Colloquium Biometricum* 44: 139-148.
- [12] Dale, J.R., 1986, Asymptotic normality of goodness-of-fit statistics for space product multinomials, *J. R. Stat. Soc. Ser B* 48: 48-59.
- [13] Hanusz, Z., Enomoto, R., Seo, T. and Koizumi, K., 2017, A Monte Carlo comparison of Jarque-Bera type tests and Henze-Zirkler test of multivariate normality, *Commun. Stat. Simulat. Comput. Forthcom.* 47: 1439-1452.
- [14] Cochran, W.G., 1947, Some consequences when the assumptions for the analysis of variance are not satisfied, *Biometrics* 3: 22-38.
- [15] Bradley, J.V., 1978, Robustness?, *Brit. J. Math. Stat. Psy.* 31: 144-152.
- [16] Tenreiro, C., 2017, A new test for multivariate normality by combining extreme and nonextreme BHEP tests, *communication in statistics, Simulat. Comput.* 46: 1746-1759.
- [17] Zhou, M. and Shao, Y., 2014, A powerful test for multivariate normality, *J. Appl. Stat.* 41: 351-363.
- [18] Shahbaz, S.H., Al-Sobhi, M., Shahbaz, M.Q. and Al-Zahrani, B., 2018, A new multivariate Weibull distribution, *Pak. J. Stat. Oper. Res.* 41: 75-88.
- [19] Navarro, A.K.W., Frellsen, J. and Turner, R.E., 2017, The multivariate Generalised von Mises distribution: Inference and applications, pp. 2394-2400, 31th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-17), San Francisco.