Research Article

Received: July 10, 2018; Accepted: August 10, 2018

สูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 5

A Formula for the Exponential of a Real Skew-Symmetric Matrix of Order 5

ปุณชญา พัฒนางกูร*, นพวรรณ อินทร์พรหม,

ขวัญชนก คำมณี และโยษิตา ศรีเจริญ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Noppawan Inprom,

Kwanchanok Kummanee and Yosita Sricharoen

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University, Rangsit Centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้ เป็นการศึกษาสูตรของเมทริกซ์ e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 5

คำสำคัญ : เมทริกซ์เลขชี้กำลัง; เมทริกซ์สมมาตรเสมือน; สูตรของซิลเวสเตอร์

Abstract

In this paper the formula of the matrix e^A when A is a skew-symmetric real matric of order 5 is derived.

Keywords: exponential matrix; skew-symmetric matrices; Sylvester's formula

1. บทนำ

การคำนวณฟังก์ชันเมทริกซ์เป็นหนึ่งในปัญหาที่มีความท้าทายมากที่สุดในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข (numerical linear algebra) ฟังก์ชันเมทริกซ์หนึ่งที่น่าสนใจศึกษา คือ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์ A ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n เมทริกซ์ e^A นิยาม

***ผู้รับผิดชอบบทความ :** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

doi: 10.14456/tstj.2020.5

โดย $e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n}}{n!} = \mathrm{I}_{n} + A + \frac{A^{2}}{2!} + \frac{A^{3}}{3!} + \frac{A^{4}}{4!} + \cdots$ เมื่อ I_{n} คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n

ปี ค.ศ. 1978 Moler และ Van Loan ศึกษาเกี่ยวกับวิธีการประมาณ e^{A} เมื่อ A เป็นเมทริกซ์อันดับ n [1] ต่อมาในปี ค.ศ. 1998 Celledoni และ Iserles ได้เผยแพร่ผลงานวิจัย 2 เรื่อง เกี่ยวกับการประมาณ e^{A} ในกรุปลี [2,3] และเมื่อปี ค.ศ. 2000 ได้นำปัญหาดังกล่าวมาศึกษาอีกครั้ง เมื่อวิธีการกรุปลีได้นำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ การคำนวณเมทริกซ์ยกกำลังนั้น สูตร Rodrigues เป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณ e^{A} เมื่อ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน (นั่นคือ $A^{T} = -A$) อันดับ 3 ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า $A = \begin{pmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ -u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix}$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 3 แล้วจะได้ว่า $e^{A} = \mathrm{I}_{3} + \frac{\sin\alpha}{\alpha}A + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^{2}}A^{2}$ เมื่อ $\alpha = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ และ I_{3} คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 3

หลังจากนั้น เมื่อปี ค.ศ. 2001 Politi ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์ยกกำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 [4] กล่าวคือ ถ้า $A = \begin{pmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ -u_6 & 0 & u_4 & u_2 \\ -u_5 & -u_4 & 0 & u_1 \\ -u_3 & -u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix}$ และค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แตกต่างกันทั้งหมด แล้วจะสามารถหาสูตรของ e^{A} โดยอาศัยสูตรของซิลเวสเตอร์ นั่นคือ

$$e^{A} = a\mathrm{I}_{4} + bA + cA^{2} + dA^{3} \tag{1.1}$$

เมื่อ $a = \cos\alpha + c\alpha^{2}$, $b = \frac{\sin\alpha}{\alpha} + d\alpha^{2}$, $c = \frac{\cos\mu - \cos\alpha}{\alpha^{2} - \mu^{2}}$ และ $d = \frac{\alpha\sin\mu - \mu\sin\alpha}{\alpha\mu\left(\alpha^{2} - \mu^{2}\right)}$ โดยที่ I_{4} คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4 , $\alpha = \sqrt{\left|\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}\right|}$ และ $\mu = \sqrt{\left|\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0}}{2}\right|}$ เมื่อ $a_0 = \left(u_1u_6 + u_3u_4 - u_2u_5\right)^{2}$ และ $a_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2$ โดยอาศัยแนวคิดจากการศึกษาผลงานวิจัยของ Politi ดังกล่าว บทความวิจัยนี้จึงศึกษาสูตรของเมทริกซ์ยกกำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 5 ในทำนองเดียวกันกับสูตร (1.1)

2. ผลงานวิจัย

ให้ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 5 นั่นคือ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 & -u_4 \\ u_1 & 0 & -u_5 & -u_6 & -u_7 \\ u_2 & u_5 & 0 & -u_8 & -u_9 \\ u_3 & u_6 & u_8 & 0 & -u_{10} \\ u_4 & u_7 & u_9 & u_{10} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

โดยที่ $A \neq \bar{0}_5$ และให้ $a_1 = (u_1u_8 - u_2u_6 + u_3u_5)^2 + (u_1u_9 - u_2u_7 + u_4u_5)^2 + (u_1u_{10} - u_3u_7 + u_4u_6)^2 + (u_2u_{10} - u_3u_9 + u_4u_8)^2 + (u_5u_{10} - u_6u_9 + u_7u_8)^2$ และ $a_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2 + u_9^2 + u_{10}^2$ เนื่องจาก $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathrm{I})$ โดยการคำนวณ จึงทำให้ได้ทฤษฎีบทประกอบดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $p(\lambda) = -\lambda^{5} - a_3\lambda^{3} - a_1\lambda$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จึงทำให้ได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 2.2 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) ถ้า $a_3^2 - 4a_1 \geq 0$ แล้วค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $\lambda_1 = i\sqrt{\left|\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\left|\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\left|\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}\ ,\ \lambda_4 = -i\sqrt{\left|\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}$$

และ $\lambda_5 = 0$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $p(\lambda) = -\lambda^5 - a_3\lambda^3 - a_1\lambda = -\lambda\left(\lambda^4 + a_3\lambda^2 + a_1\right)$ จากการกำหนดให้ จะเห็นได้ว่า $a_3 > 0$, $a_1 \geq 0$

ถ้า $p(\lambda) = 0$ แล้ว $\lambda = 0$ หรือ $\lambda^4 + a_3\lambda^2 + a_1 = \left(\lambda^2\right)^2 + a_3\lambda^2 + a_1 = 0$

ในกรณีที่ $\left(\lambda^2\right)^2 + a_3\lambda^2 + a_1 = 0$ จะได้ว่า $\lambda^2 = \frac{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}$

กรณีที่ 1 $a_3^2 - 4a_1 > 0$

เนื่องจาก $\left(-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)\left(-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)$

$= \left(-a_3\right)^2 - \left(\sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)^2 = a_3^2 - \left(a_3^2 - 4a_1\right) = 4a_1 \geq 0$

พิจารณากรณี $\left(-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)\left(-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right) > 0$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1} > 0$ แล้ว $\sqrt{a_3^2 - 4a_1} > a_3$ จึงทำให้ $\left(\sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)^2 > a_3^2$ หรือ $a_3^2 - 4a_1 > a_3^2$ นั่นคือ $-4a_1 > 0$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1} \leq 0$

เนื่องจาก $\left(-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)\left(-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right) > 0$ จึงทำให้ได้ว่า $-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1} < 0$ และเป็นผลให้ $-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1} < 0$ นั่นคือ $-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1} < 0$

เนื่องจาก $\lambda^2 = \frac{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}$ จะได้ค่าเฉพาะ คือ

$$\lambda_1 = i\sqrt{\left|\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|},\ \lambda_2 = -i\sqrt{\left|\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|},$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\left|\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|} \text{ และ } \lambda_4 = -i\sqrt{\left|\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}$$

เพราะฉะนั้น A มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 5 ค่า ดังนี้

$$\lambda_1 = i\sqrt{\left|\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|},\ \lambda_2 = -i\sqrt{\left|\frac{a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\left|\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|},\quad \lambda_4 = -i\sqrt{\left|\frac{a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}\right|}$$

และ $\lambda_5 = 0$

พิจารณากรณี $\left(-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)\left(-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right) = 0$

จะเห็นได้ว่าเนื่องจาก $a_3 > 0$ และ $\sqrt{a_3^2 - 4a_1} > 0$ จะได้ $-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_1} < 0$ จึงทำให้ $-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_1} = 0$ จะได้ว่า $\sqrt{a_3^2 - 4a_1} = a_3$ นั่นคือ $\left(\sqrt{a_3^2 - 4a_1}\right)^2 = a_3^2$ หรือ $a_3^2 - 4a_1 = a_3^2$ จึงทำให้ได้ว่า $-4a_1 = 0$ ดังนั้น $a_1 = 0$ เนื่องจาก $\lambda^2 = \frac{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}$, $a_1 = 0$ และ $a_3 > 0$ จะได้ $\lambda^2 = \frac{-a_3 \pm a_3}{2}$ เพราะฉะนั้น A มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า ดังนี้ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0$, $\lambda_3 = i\sqrt{a_3}$ และ $\lambda_4 = -i\sqrt{a_3}$

กรณีที่ 2 $a_3^2 - 4a_1 = 0$

เนื่องจาก $\lambda^2 = \frac{-a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4a_1}}{2}$ จะได้ $\lambda^2 = \frac{-a_3}{2}$ โดยที่ $a_3 > 0$ ดังนั้น A มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า ดังนี้ $\lambda_1 = \lambda_3 = i\sqrt{\frac{a_3}{2}}$, $\lambda_2 = \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{a_3}{2}}$ และ $\lambda_5 = 0$

จากทั้ง 2 กรณี ข้างต้น จึงสรุปว่าค่าเฉพาะของ A มีทั้งหมด 5 ค่า ดังนี้ $\lambda_1 = i\sqrt{\left|\dfrac{a_3-\sqrt{a_3^2-4a_1}}{2}\right|}$,

$\lambda_2 = -i\sqrt{\left|\dfrac{a_3-\sqrt{a_3^2-4a_1}}{2}\right|}$, $\lambda_3 = i\sqrt{\left|\dfrac{a_3+\sqrt{a_3^2-4a_1}}{2}\right|}$,

$\lambda_4 = -i\sqrt{\left|\dfrac{a_3+\sqrt{a_3^2-4a_1}}{2}\right|}$ และ $\lambda_5 = 0$ ■

หมายเหตุ เนื่องจากค่าเฉพาะของเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนจะมีค่าได้แค่ 2 กรณี เท่านั้น คือ 0 หรือจำนวนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน สำหรับงานวิจัยนี้จึงศึกษาสูตรของ e^A ในกรณีที่ $a_3^2-4a_1>0$ และค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมดเท่านั้น และจากบทแทรก 2.2 ในกรณีที่ค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด และ $a_3^2-4a_1=0$ จะเห็นได้ว่า λ_k เป็นจำนวนเชิงซ้อนทุก $k\in\{1,2,3,4\}$ เนื่องจาก $|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ จึงทำให้ได้ค่าของ $|\lambda_k|$ ทุก $k\in\{1,2,3,4\}$ ดังนี้

$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{\left|\dfrac{a_3-\sqrt{a_3^2-4a_1}}{2}\right|}$ และ $|\lambda_3|=|\lambda_4|=\sqrt{\left|\dfrac{a_3+\sqrt{a_3^2-4a_1}}{2}\right|}$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะให้

$$\alpha=|\lambda_1|=|\lambda_2| \text{ และ } \mu=|\lambda_3|=|\lambda_4| \tag{2.2}$$

จะทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) ถ้า $a_3^2-4a_1>0$ และค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แตกต่างกันทั้งหมด แล้ว

$$e^A = a\mathbf{I}_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4 \tag{2.3}$$

เมื่อ $a=1,\ b=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}+d\alpha^2,\ c=\dfrac{\mu^4(\cos\alpha-1)-\alpha^4(\cos\mu-1)}{\mu^2\alpha^2(\alpha^2-\mu^2)},$

$$d=\frac{\alpha\sin\mu-\mu\sin\alpha}{\alpha\mu(\alpha^2-\mu^2)} \text{ และ } h=\frac{\mu^2(\cos\alpha-1)-\alpha^2(\cos\mu-1)}{\mu^2\alpha^2(\alpha^2-\mu^2)} \tag{2.4}$$

โดยที่ $\mathbf{I}_5$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 5

บทพิสูจน์ จากสูตรของซิลเวสเตอร์ที่ว่า $f(B)=\sum_{m=1}^{k} f(\lambda_m)B_m$ เมื่อ $f(B)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของเมทริกซ์ B โดยที่ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_k$ เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันหมดของ B และ B_m คือ โฟรเบนิอุสโคแวเรียนต์ของ B ที่กำหนดโดย $B_m=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{k}\dfrac{1}{\lambda_m-\lambda_j}(B-\lambda_j\mathrm{I}_n)$ ทุก $m\in\{1,2,3,\ldots,k\}$

ถ้า $f(B)=e^B$ และ $B=A$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) โดยสูตรของซิลเวสเตอร์จึงได้ว่า

$$e^A=\sum_{m=1}^{5} e^{\lambda_i}A_m \tag{2.5}$$

เมื่อ A_m คือ โฟรเบนิอุสโคแวเรียนต์ของเมทริกซ์ A ที่กำหนดโดย $A_m=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{5}\dfrac{1}{\lambda_m-\lambda_j}(A-\lambda_j\mathrm{I}_5)$ ทุก $m\in\{1,2,3,4,5\}$

จาก (2.5) จะได้ว่า $e^A=e^{\lambda_1}A_1+e^{\lambda_2}A_2+e^{\lambda_3}A_3+e^{\lambda_4}A_4+e^{\lambda_5}A_5$

$$=e^{\lambda_1}A_1+e^{\lambda_2}A_2+e^{\lambda_3}A_3+e^{\lambda_4}A_4+A_5$$

$$=e^{\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}(A-\lambda_3\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_4}(A-\lambda_4\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_1}(A)\right)$$

$$+e^{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}(A-\lambda_3\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_4}(A-\lambda_4\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_2}(A)\right)$$

$$+e^{\lambda_3}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}(A-\lambda_1\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}(A-\lambda_2\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_4}(A-\lambda_4\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_3}(A)\right)$$

$$+e^{\lambda_4}\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}(A-\lambda_1\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_2}(A-\lambda_2\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_4-\lambda_3}(A-\lambda_3\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{\lambda_4}(A)\right)$$

$$+\left(\frac{1}{-\lambda_1}(A-\lambda_1\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{-\lambda_2}(A-\lambda_2\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{-\lambda_3}(A-\lambda_3\mathrm{I})\right)\left(\frac{1}{-\lambda_4}(A-\lambda_4\mathrm{I})\right)$$

จะเห็นได้ว่า A_m อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 4 ของ A ทุก $m\in\{1,2,3,4,5\}$ ซึ่งจะทำให้ e^A อยู่ในรูปของพหุนามดีกรี 4 ของ A เช่นกัน จากสมการ (2.5) จะเห็นว่า

การคำนวณหา e^A นั้นจะต้องคำนวณหา สัมประสิทธิ์ A_1, A_2, A_3, A_4 และ A_5 ดังกล่าว ซึ่งในงานวิจัยนี้จะทำการคำนวณ e^A ซึ่งอยู่ในรูปพหุนามดีกรี 4 ของ A โดยการหาสัมประสิทธิ์ของ $\mathrm{I}_5, A, A^2, A^3$ และ A^4 แทน สมมุติให้ $e^A = a\mathrm{I} + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4$ และ x_m เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_m ทุก $m \in \{1,2,3,4,5\}$ (นั่นคือ $Ax_m = \lambda_m x_m$ ทุก $m \in \{1,2,3,4,5\}$) จะได้ว่า $e^A x_m = \left(a\mathrm{I}_5 + bA + cA^2 + dA^3 + hA^4\right)x_m$ $= ax_m + b\lambda_m x_m + c\lambda_m^2 x_m + d\lambda_m^3 x_m + h\lambda_m^4 x_m$ ทุก $m \in \{1,2,3,4,5\}$

เนื่องจาก $e^A = \mathrm{I}_5 + A + \dfrac{A^2}{2!} + \dfrac{A^3}{3!} + \cdots$ ดังนั้น สำหรับ $m \in \{1,2,3,4,5\}$ จะได้ว่า $e^A x_m = \left(\mathrm{I}_5 + A + \dfrac{A^2}{2!} + \dfrac{A^3}{3!} + \cdots\right)x_m = \left(\mathrm{I}_5 + \lambda_m + \dfrac{1}{2!}\lambda_m^2 + \dfrac{1}{3!}\lambda_m^3 + \cdots\right)x_m$ $= e^{\lambda_m} x_m$

จึงได้ว่า $e^{\lambda_m} x_m = ax_m + b\lambda_m x_m + c\lambda_m^2 x_m + d\lambda_m^3 x_m + h\lambda_m^4 x_m$ $= \left(a + b\lambda_m + c\lambda_m^2 + d\lambda_m^3 + h\lambda_m^4\right)x_m$ นั่นคือ $e^{\lambda_m} = a + b\lambda_m + c\lambda_m^2 + d\lambda_m^3 + h\lambda_m^4$ ทุก $m \in \{1,2,3,4,5\}$ จะได้ว่า

$$e^{i\alpha} = a + ib\alpha - c\alpha^2 - id\alpha^3 + h\alpha^4 \quad (2.6)$$

$$e^{-i\alpha} = a - ib\alpha - c\alpha^2 + id\alpha^3 + h\alpha^4 \quad (2.7)$$

$$e^{i\mu} = a + ib\mu - c\mu^2 - id\mu^3 + h\mu^4 \quad (2.8)$$

$$e^{-i\mu} = a - ib\mu - c\mu^2 + id\mu^3 + h\mu^4 \quad (2.9)$$

และ $e^0 = a = 1$ (2.10)

โดยสูตรของออยเลอร์ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ และ $a = 1$ ทำให้ได้ว่า

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = 1 + ib\alpha - c\alpha^2 - id\alpha^3 + h\alpha^4 \quad (2.11)$$

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = 1 - ib\alpha - c\alpha^2 + id\alpha^3 + h\alpha^4 \quad (2.12)$$

$$\cos\mu + i\sin\mu = 1 + ib\mu - c\mu^2 - id\mu^3 + h\mu^4 \quad (2.13)$$

และ $\cos\mu - i\sin\mu = 1 - ib\mu - c\mu^2 + id\mu^3 + h\mu^4$ (2.14)

จาก (2.11) และ (2.12) จะได้

$$2\cos\alpha = 2 - 2c\alpha^2 + 2e\alpha^4 = 2\left(1 - c\alpha^2 + h\alpha^4\right)$$

หรือ $\cos\alpha = 1 - c\alpha^2 + h\alpha^4$ (2.15)

จาก (2.13) และ (2.14) จะได้

$$2\cos\mu = 2 - 2c\mu^2 + h\mu^4 = 2\left(a - c\mu^2 + h\mu^4\right)$$

หรือ $\cos\mu = 1 - c\mu^2 + h\mu^4$ (2.16)

นำ μ^2 คูณ (2.15) และ α^2 คูณ (2.16) จะได้ว่า

$$\mu^2\cos\alpha = \mu^2 - c\mu^2\alpha^2 + h\mu^2\alpha^4 \quad (2.17)$$

$$\alpha^2\cos\mu = \alpha^2 - c\alpha^2\mu^2 + h\alpha^2\mu^4 \quad (2.18)$$

จาก (2.17) และ (2.18) จะได้

$$\mu^2\cos\alpha - \alpha^2\cos\mu - \mu^2 + \alpha^2 = h\left(\mu^2\alpha^4 - \alpha^2\mu^4\right)$$

ดังนั้น $h = \dfrac{\mu^2(\cos\alpha - 1) - \alpha^2(\cos\mu - 1)}{\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2 - \mu^2\right)}$ (2.19)

จาก (2.15) จะได้ว่า $c = \dfrac{1 - \cos\alpha + h\alpha^4}{\alpha^2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2}$ $+ \dfrac{\mu^2(\cos\alpha - 1) - \alpha^2(\cos\mu - 1)}{\mu^2\left(\alpha^2 - \mu^2\right)}$ ดังนั้น $c = \dfrac{\mu^4(\cos\alpha - 1) - \alpha^4(\cos\mu - 1)}{\mu^2\alpha^2\left(\alpha^2 - \mu^2\right)}$

จาก (2.11) และ (2.12) จะได้ $2(i\sin\alpha) = 2(ib\alpha) - 2\left(id\alpha^3\right)$

หรือ $\sin\alpha = b\alpha - d\alpha^3$ (2.20)

จาก (2.13) และ (2.14) จะได้ $2(i\sin\mu) = 2(ib\mu) - 2\left(id\mu^3\right)$

หรือ $\sin\mu = b\mu - d\mu^3$ (2.21)

นำ μ คูณ (2.20) และ α คูณ (2.21) จะได้ว่า

$$\mu\sin\alpha = \mu b\alpha - d\mu\alpha^3 \quad (2.22)$$

และ $\alpha\sin\mu = \alpha b\mu - d\alpha\mu^3$ (2.23)

จาก (2.22) และ (2.23) จะได้ $\mu\sin\alpha - \alpha\sin\mu = d\alpha\mu^3 - d\mu\alpha^3$ หรือ $\mu\sin\alpha - \alpha\sin\mu = d\alpha\mu\left(\mu^2 - \alpha^2\right)$

ดังนั้น $d = \dfrac{\mu\sin\alpha - \alpha\sin\mu}{\alpha\mu\left(\mu^2 - \alpha^2\right)} = \dfrac{\alpha\sin\mu - \mu\sin\alpha}{\alpha\mu\left(\alpha^2 - \mu^2\right)}$

จาก (2.20) จะได้ว่า $b = \dfrac{\sin\alpha + d\alpha^3}{\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + d\alpha^2$

จึงสรุปได้ว่า $a = 1,\quad b = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + d\alpha^2,\quad a = 1,$

$b = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + d\alpha^2,\quad c = \dfrac{\mu^4(\cos\alpha - 1) - \alpha^4(\cos\mu - 1)}{\mu^2\alpha^2(\alpha^2 - \mu^2)},$

$d = \dfrac{\alpha\sin\mu - \mu\sin\alpha}{\alpha\mu(\alpha^2 - \mu^2)}$ และ $h = \dfrac{\mu^2(\cos\alpha - 1) - \alpha^2(\cos\mu - 1)}{\mu^2\alpha^2(\alpha^2 - \mu^2)}$ ■

ข้อสังเกต

1. สมมติให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) และมีค่าเฉพาะเหมือนกันทั้งหมด กล่าวคือ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$ จะได้ว่าพหุนามลักษณะเฉพาะของ A คือ $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5$ โดยทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน จะได้ว่า A สอดคล้องกับสมการลักษณะเฉพาะของ A นั่นคือ $p(A) = (A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^5 = \bar{0}_5$ จึงได้ว่า $(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^k = \bar{0}_5$ สำหรับทุก $k \geq 5$ จะได้ว่า $e^{(A-\lambda_1\mathrm{I}_5)} = \mathrm{I}_5 + (A - \lambda_1\mathrm{I}_5)$

$$+\frac{1}{2!}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^2 + \frac{1}{3!}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^3 + \frac{1}{4!}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^4$$

เนื่องจาก $(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)(\lambda_1\mathrm{I}_5) = (\lambda_1\mathrm{I}_5)(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)$

และ $e^{\lambda\mathrm{I}_n} = \mathrm{I}_n + (\lambda\mathrm{I}_n) + \dfrac{1}{2!}(\lambda\mathrm{I}_n)^2 + \dfrac{1}{3!}(\lambda\mathrm{I}_n)^3 + \cdots$

$= \left(1 + \lambda + \dfrac{1}{2!}\lambda^2 + \dfrac{1}{3!}\lambda^3 + \cdots\right)\mathrm{I}_n = e^{\lambda}\mathrm{I}_n$ ทุก $\lambda \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า $e^A = e^{((A-\lambda_1\mathrm{I}_5)+(\lambda_1\mathrm{I}_5))} = e^{(A-\lambda_1\mathrm{I}_5)}e^{(\lambda_1\mathrm{I}_5)}$

$$= e^{\lambda_1}\mathrm{I}_5 + e^{\lambda_1}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5) + \frac{e^{\lambda_1}}{2!}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^2 +$$

$$\frac{e^{\lambda_1}}{3!}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^3 + \frac{e^{\lambda_1}}{4!}(A - \lambda_1\mathrm{I}_5)^4$$

จะเห็นได้ว่าถ้าค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A มีค่าเหมือนกันทั้งหมด กล่าวคือ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$ แล้วเราสามารถหาสูตรสำหรับ e^A ได้ไม่ยากนัก จากบทแทรก 2.2 จะเห็นได้ว่า $\lambda_5 = 0$ เสมอ ดังนั้นในกรณีที่ค่าเฉพาะของ A มีค่าเหมือนกันทั้งหมดนั้น จึงได้ว่า $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ นั่นเอง และจะทำให้ได้ว่า $e^A = e^0\mathrm{I}_5 +$

$$e^0(A - \bar{0}_5) + \frac{e^0}{2!}(A - \bar{0}_5)^2 + \frac{e^0}{3!}(A - \bar{0}_5)^3 + \frac{e^0}{4!}(A - \bar{0}_5)^4$$

$$= \mathrm{I}_5 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!}$$

2. พิจารณาเมทริกซ์ iA จะเห็นว่า iA เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเทียน เพราะฉะนั้น iA จะเป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้เสมอ ซึ่งจะสามารถหา e^{iA} ได้โดยอาศัยสูตรของซิลเวสเตอร์เช่นกัน

3. References

[1] Moler, C. and van Loan, C. , 1978, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM Rev. 20: 801-836.

[2] Celledoni, E. and Iserles, A. , 1998, Approximating the Exponential from a Lie Algebra to a Lie Group, Technical Report DAMTP 1998/ NA03, Numerical Analysis, Cambridge University, Cambridge.

[3] Celledoni, E. and Iserles, A. , 1998, Mathods for the Approximation of the Matrix Exponential in Lie-algebraic Setting, Technical Report DAMTP 1999/ NA03, Numerical Analysis, Cambridge University, Cambridge.

[4] Politi, T. , 2001, A formula for the exponential of a real skew- symmetric matrix of order 4, BIT 41: 842-845.