

ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และ
เมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส

Upper Bounds for the Spread of the Circulant
and r-Circulant Matrices with the Fibonacci
and Lucas Sequences

อัจฉรา ปาจิ้นบูรวรรณ์*, กษิตินาถ แสงเงิน,

ปานิสรา ไทยวงษ์ และสุกฤตา ลมุลภักตร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Archara Pacheenburawana, Kasitinart Sangngern,

Panisara Thaiwong and Sukrita Lagoonpak

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,

Rangsit Centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส

คำสำคัญ : การกระจายตัวของเมทริกซ์; ขอบเขตบน; เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์; เมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท์

Abstract

This research objective is to find upper bounds for the spread of the circulant and r-circulant matrices which entries are the Fibonacci and Lucas sequences.

Keywords: spread of a matrix; upper bound; circulant matrix; r-circulant matrix

1. บทนำ

เมทริกซ์เซอร์คูแลนทเป็นเมทริกซ์โทพลิตซ์ชนิดหนึ่ง ซึ่งนำมาใช้อย่างแพร่หลายในงานวิจัยทางคณิตศาสตร์ มีนักวิจัยหลายท่านให้ความสนใจศึกษาสมบัติของเมทริกซ์เซอร์คูแลนทและลักษณะทั่วไปของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท สำหรับเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนทที่มีสมาชิกมาจากลำดับที่รู้จักกันเป็นอย่างดีนั้น พบมากในการศึกษาหลากหลาย อาทิ การประมวลผลสัญญาณ การประมวลผลภาพดิจิทัล ทฤษฎีรหัส และการพยากรณ์เชิงเส้น

การกระจายตัวของเมทริกซ์ คือ ระยะทางที่มากที่สุดระหว่างค่าเฉพาะคู่ใด ๆ ของเมทริกซ์ ซึ่งการกระจายตัวของเมทริกซ์นั้นกล่าวถึงครั้งแรกในปี ค.ศ. 1956 โดย Mirsky [1] หลังจากนั้นก็มีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตของการกระจายตัวของเมทริกซ์ เช่น ในปี ค.ศ. 1985 Johnson และคณะ ได้ให้ขอบเขตล่างสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ปกติใด ๆ [2] ต่อมาในปี ค.ศ. 1997 Jiang และ Zhan ได้แสดงขอบเขตล่างสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์มิเทียน [3] จากนั้นในปี ค.ศ. 2012 Wu และคณะ ได้ให้ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ใด ๆ [4] และในปี ค.ศ. 2013 Sharma และ Kumar ได้ให้ข้อสังเกตของขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ใด ๆ [5]

การทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมา พบว่าในปัจจุบันไม่มีการศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนทและเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาหาค่าขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนทและเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนทที่มีสมาชิกเป็นลำดับพีโนนกีส์และลำดับลูคัส

2. ความรู้พื้นฐาน

หัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงบทนิยามและผลลัพธ์ของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ N แทนเซตของจำนวนเต็มบวก C แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ $\mathbb{C}^{n \times n}$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 2.1 [1] กำหนดให้ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะ λ_p เมื่อ $p \in \{1,2,3, \dots, n\}$ การกระจายตัวของเมทริกซ์ A นิยามโดย $s(A) = \max_{1 \leq k, l \leq n} |\lambda_k - \lambda_l|$

บทนิยาม 2.2 [6] นอร์มโฟรเบนิอุ หรือ นอร์มแบบยุคลิด คือ นอร์มของเมทริกซ์ $A = (a_{pq})_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ที่นิยามโดย $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n |a_{pq}|^2}$ หรือ $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$ เมื่อ $\text{tr}(AA^*)$ คือ รอยของเมทริกซ์ AA^* หรือผลบวกของสมาชิกที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ AA^* และ A^* คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคของ A

บทนิยาม 2.3 [7] เมทริกซ์ $C_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์เซอร์คูแลนท ถ้า

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเห็นได้ว่าเมทริกซ์เซอร์คูแลนทกำหนดโดยสมาชิกในแถวที่หนึ่ง ได้แก่ $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ ผู้วิจัยเขียนแทนเมทริกซ์เซอร์คูแลนท C_n ด้วย $C_n = \text{Circ}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท มีสมบัติต่อไปนี้ [7-9]

1. เมทริกซ์เซอร์คูแลนททุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ปกติ
2. $\|C_n\|_F^2 = n \sum_{p=0}^{n-1} |c_p|^2$
3. $|\text{tr}(C_n)| = n|c_0|$

4. ค่าเฉพาะของเมทริกซ์เซอร์คูแลนทที่สามารถหาได้โดย $\lambda_q = \sum_{p=0}^{n-1} c_p (w^q)^p$ โดยที่ $w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ และ $q \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

บทนิยาม 2.4 [7] เมทริกซ์ $C_{n,r} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท ถ้า

$$C_{n,r} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ rc_2 & rc_3 & \cdots & c_0 & c_1 \\ rc_1 & rc_2 & \cdots & rc_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $r \in \mathbb{C}$ ซึ่งเห็นได้ว่าเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนทกำหนดโดยสมาชิกในแถวที่หนึ่ง ได้แก่ $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ และพารามิเตอร์ r ผู้วิจัยจะเขียนแทนเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนท $C_{n,r}$ ด้วย $C_{n,r} = r \text{Circ}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ และเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนทที่มีสมบัติต่อไปนี้ [7-9]

1. $\|C_{n,r}\|_F^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (n-p)|c_p|^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2|c_p|^2$
2. $|\text{tr}(C_{n,r})| = n|c_0|$

บทนิยาม 2.5 [8] ลำดับฟีโบนักชี $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ และลำดับลูคัส $\{L_n\}_{n=0}^\infty$ คือ ลำดับที่นิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$ และ $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$

จากบทนิยาม 2.5 จะได้ลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส ดังนี้

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	...

สมบัติต่อไปนี้เป็นสมบัติที่รู้จักกันดีของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส [8]

$$\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 = F_n F_{n-1} \text{ สำหรับ } n \geq 1 \quad (0.1)$$

$$\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 = L_n L_{n-1} + 2 \text{ สำหรับ } n \geq 1 \quad (0.2)$$

ในปี ค.ศ. 2013 Sharma และ Kumar [5] ได้แสดงขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ A ที่มีขนาด $n \times n$ ใด ๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

$$s(A) \leq \left[\left(2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|\text{tr}(A)|^2 \right) - 2\|AA^* - A^*A\|_F^2 \right]^{\frac{1}{4}} \quad (0.3)$$

ถ้า A ถูกแบ่งกันให้อยู่ในรูป $A = \begin{bmatrix} P & B \\ C & Q \end{bmatrix}$ เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A ที่มีขนาด $k \times k$ แล้วจะได้ว่า

$$s(A) \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|\text{tr}(A)|^2 - 2(\|B\|_F - \|C\|_F)^2} \quad (0.4)$$

3. ผลการวิจัย

หัวข้อนี้ผู้วิจัยได้แสดงขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนทและเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนทที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

สำหรับบทแทรก 3.1 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนทที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชี โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2.1

บทแทรก 3.1 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $C_n = \text{Circ}(F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนทขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนักชีแล้วจะได้ว่า

$$s(C_n) \leq \sqrt{2nF_n F_{n-1}} \quad (1.1)$$

พิสูจน์ เนื่องด้วย $\|C_n\|_F^2 = n \sum_{p=0}^{n-1} F_p^2$ และจากสมบัติ

ของลำดับฟีโบนักชี (2.1) จะได้ว่า $\|C_n\|_F^2 = n \sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 = n F_n F_{n-1}$ และ $|\text{tr}(C_n)| = nF_0 = 0$

เนื่องด้วยเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เป็นเมทริกซ์ปกติ นั่นคือ

$$C_n C_n^* = C_n^* C_n \text{ ดังนั้นจะได้ว่า } \|C_n C_n^* - C_n^* C_n\|_F^2 = 0$$

จากสมการ (2.3) จะได้

$$\begin{aligned} s(C_n) &\leq \left[\left(2\|C_n\|_F^2 - \frac{2}{n} |\text{tr}(C_n)|^2 \right) - 2\|C_n C_n^* - C_n^* C_n\|_F^2 \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= \left[\left(2nF_n F_{n-1} - \frac{2}{n} (0)^2 \right) - 2(0) \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{2nF_n F_{n-1}} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ C_4 เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนัชชี

$$\text{นั่นคือ } C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$s(C_4) = \max_{1 \leq k, l \leq 4} |\lambda_k - \lambda_l| = 6$$

จากบทแทรก 3.1 จะได้

$$s(C_4) \leq 6.9282 \quad \square$$

$$s(C_4) = \max_{1 \leq k, l \leq 4} |\lambda_k - \lambda_l| = 6$$

สำหรับบทแทรก 3.2 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับ ลูคัส โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2.1

บทแทรก 3.2 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $C_n = \text{Circ}(L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส แล้วจะได้ว่า

$$s(C_n) \leq \sqrt{2n(L_n L_{n-1} - 2)} \quad (1.2)$$

พิสูจน์ เนื่องด้วย $\|C_n\|_F^2 = n \sum_{p=0}^{n-1} L_p^2$ และจากสมบัติ

$$\text{ของลำดับลูคัส (2.2) จะได้ว่า } \|C_n\|_F^2 = n \sum_{p=0}^{n-1} L_p^2$$

$$= n L_n L_{n-1} + 2n \text{ และ } |\text{tr}(C_n)| = n L_0 = 2n$$

เนื่องด้วยเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เป็นเมทริกซ์ปกติ นั่นคือ

$$C_n C_n^* = C_n^* C_n \text{ ดังนั้นจะได้ว่า } \|C_n C_n^* - C_n^* C_n\|_F^2 = 0$$

จากสมการ (2.3) จะได้

$$\begin{aligned} s(C_n) &\leq \left[\left(2\|C_n\|_F^2 - \frac{2}{n} |\text{tr}(C_n)|^2 \right) - 2\|C_n C_n^* - C_n^* C_n\|_F^2 \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= \left[\left(2nL_n L_{n-1} + 4n - \frac{2}{n} |2n|^2 \right) - 2(0) \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{2nL_n L_{n-1} + 4n - 8n} \\ &= \sqrt{2n(L_n L_{n-1} - 2)} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ C_4 เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส นั่นคือ

$$C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$s(C_4) = \max_{1 \leq k, l \leq 4} |\lambda_k - \lambda_l| = 11.4018$$

จากบทแทรก 3.2 จะได้

$$s(C_4) \leq 14.4222 \quad \square$$

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์อ-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนัชชี

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ และ $C_{n,r} = r \text{Circ}(F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์อ-เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนัชชี แล้วจะได้ว่า $s(C_{n,r}) \leq$

$$\begin{aligned} &\left[2nF_n F_{n-1} + 2(|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} p F_p^2 - 2(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(2nL_n L_{n-1} + 4n - \frac{2}{n} |2n|^2 \right) - 2(0) \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{2nL_n L_{n-1} + 4n - 8n} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2n(L_n L_{n-1} - 2)} \quad \square$$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ C_4 เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนซ์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับคู่คี่ นั่นคือ

$$C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้

$$s(C_4) = \max_{1 \leq k, l \leq 4} |\lambda_k - \lambda_l| = 11.4018$$

จากบทแทรก 3.2 จะได้

$$s(C_4) \leq 14.4222 \quad \square$$

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนซ์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับพีโบนักซี

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ และ $C_{n,r} = r \text{Circ}(F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์อา-เซอร์คูแลนซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับพีโบนักซี แล้วจะได้ว่า $s(C_{n,r}) \leq$

$$\left[2nF_n F_{n-1} + 2(|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 - 2(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องด้วย

$$\begin{aligned} \|C_{n,r}\|_F^2 &= \sum_{p=0}^{n-1} (n-p)F_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 F_p^2 \\ &= n \sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 F_p^2 \\ &= n \sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 + (|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 \end{aligned}$$

และจากสมบัติของลำดับพีโบนักซี (2.1) $\sum_{p=0}^{n-1} F_p^2 = F_n F_{n-1}$ จะได้ว่า $\|C_{n,r}\|_F^2 = nF_n F_{n-1} + (|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2$ นอกจากนี้ $|\text{tr}(C_{n,r})| = nF_0 = 0$

จากการแบ่งกันเมทริกซ์ให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$

โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ และ

$$1 \leq k < n \text{ จะได้ } \|X\|_F = \sqrt{\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2},$$

$$\|Y\|_F = |r| \sqrt{\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2}$$

$$\text{ดังนั้น } (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2 \right)$$

นอกจากนี้ สังเกตได้ว่า ถ้า P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $(n-k) \times (n-k)$ และ $1 \leq k < n$ จะได้ว่า

$$(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{n-k} \sum_{p=q}^{k+q-1} F_p^2 \right)$$

$$= (1-|r|)^2 \left(\sum_{p=1}^k F_p^2 + \sum_{p=2}^{k+1} F_p^2 + \dots + \sum_{p=n-k}^{n-1} F_p^2 \right)$$

$$= (1-|r|)^2 \left(\sum_{p=1}^k F_p^2 + \sum_{p=2}^{k+1} F_p^2 + \dots + \sum_{p=n-k}^{n-1} F_p^2 \right)$$

$$= (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2 \right)$$

นั่นคือ ถ้าเมทริกซ์ถูกแบ่งกันให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$

โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ หรือ

$$(n-k) \times (n-k) \text{ แล้ว } (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 =$$

$$(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} F_p^2 \right) \text{ ถ้าให้ } \beta_k = (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2$$

และเนื่องด้วย สำหรับ $1 \leq k < n$; $\beta_k = \beta_{n-k}$ จะได้

$$\text{ว่า } \beta_1 = \beta_{n-1} < \beta_2 = \beta_{n-2} < \dots < \beta_\alpha \text{ เมื่อ}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2$ จะ

$$\text{มีค่ามากที่สุดเมื่อ } k = \frac{n}{2} \text{ และถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่ แล้ว}$$

$$(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 \text{ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ } k = \frac{n+1}{2} \text{ หรือ}$$

$$k = \frac{n-1}{2} \text{ นั่นคือ } (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2 \right)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จากอสมการ (2.4) จะได้ $s(C_{n,r}) \leq$

$$\sqrt{2\|C_{n,r}\|_F^2 - \frac{2}{n}|\text{tr}(C_{n,r})|^2 - 2(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2}$$

$$= \left[2\left(nF_n F_{n-1} + (|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pF_p^2 \right) - 2(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} F_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad \square$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $C_{4,r}$ เป็นเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับฟีโบนัชชี นั่นคือ

$$C_{4,r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ r \cdot 2 & 0 & 1 & 1 \\ r \cdot 1 & r \cdot 2 & 0 & 1 \\ r \cdot 1 & r \cdot 1 & r \cdot 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $r = 2$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,2}) \approx 9.1056$ และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $s(C_{4,2}) \leq 11.1355$

ถ้า $r = \frac{1}{2}$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,\frac{1}{2}}) \approx 4.0602$ และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $s(C_{4,\frac{1}{2}}) \leq 4.6904$

ถ้า $r = 1 + i$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,1+i}) \approx 7.2497$ และจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $s(C_{4,1+i}) \leq 8.6947 \quad \square$

สำหรับทฤษฎีบทสุดท้ายของงานวิจัย เป็นการหาขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C}$ และ $C_{n,r} = r\text{Circ}(L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1})$ เป็นเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นลำดับลูคัส แล้วจะได้ว่า $s(C_{n,r}) \leq$

$$\left[2n(L_n L_{n-1} - 2) + 2(|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2 - 2(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} L_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

พิสูจน์ เนื่องด้วย $\|C_{n,r}\|_F^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (n-p)L_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 L_p^2$

$$= n \sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p|r|^2 L_p^2$$

$$= n \sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 + (|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2$$

และจากสมบัติของลำดับลูคัส (2.2) $\sum_{p=0}^{n-1} L_p^2 = L_n L_{n-1} + 2$

จะได้ว่า $\|C_{n,r}\|_F^2 = n(L_n L_{n-1} + 2) + (|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2$

นอกจากนี้ $|\text{tr}(C_{n,r})| = nL_0 = 2n$ จากการแบ่งกัน

เมทริกซ์ให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$ โดยที่ P เป็น

เมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ และ $1 \leq k < n$ จะได้ว่า

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2}, \quad \|Y\|_F = |r| \sqrt{\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2}$$

ดังนั้น $(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2 \right)$

นอกจากนี้ สังเกตได้ว่า ถ้า P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $(n-k) \times (n-k)$ และ $1 \leq k < n$ จะได้ว่า

$$(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{n-k} \sum_{p=q}^{k+q-1} L_p^2 \right)$$

$$= (1-|r|)^2 \left(\sum_{p=1}^k L_p^2 + \sum_{p=2}^{k+1} L_p^2 + \dots + \sum_{p=n-k}^{n-1} L_p^2 \right)$$

$$= (1-|r|)^2 \left(\sum_{p=1}^{n-k} L_p^2 + \sum_{p=2}^{n-k+1} L_p^2 + \dots + \sum_{p=k}^{n-1} L_p^2 \right)$$

$$= (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2 \right)$$

นั่นคือ ถ้าเมทริกซ์ถูกแบ่งกันให้อยู่ในรูป $C_{n,r} = \begin{bmatrix} P & X \\ Y & Q \end{bmatrix}$

โดยที่ P เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $k \times k$ หรือ

$$(n-k) \times (n-k) \text{ แล้ว } (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^k \sum_{p=q}^{n-k+q-1} L_p^2 \right)$$

ถ้าให้ $\beta_k = (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2$ และเนื่องด้วย สำหรับ

$1 \leq k < n$; $\beta_k = \beta_{n-k}$ จะได้ว่า $\beta_1 = \beta_{n-1} < \beta_2 = \beta_{n-2} < \dots < \beta_{\alpha}$

เมื่อ $\alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ดังนั้นถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $k = \frac{n}{2}$ และถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว $(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $k = \frac{n+1}{2}$ หรือ

$$k = \frac{n-1}{2} \text{ นั่นคือ } (\|X\|_F - \|Y\|_F)^2 = (1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} L_p^2 \right)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{n+1}{2} & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จากสมการ (2.4) จะได้ว่า $s(C_{n,r}) \leq \sqrt{2\|C_{n,r}\|_F^2 - \frac{2}{n}|\text{tr}(C_{n,r})|^2 - 2(\|X\|_F - \|Y\|_F)^2}$

$$= \left[2 \left(n(L_n L_{n-1} + 2) + (|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2 \right) - \frac{2}{n}(4n^2) - 2(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} L_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[2n(L_n L_{n-1} - 2) + 2(|r|^2 - 1) \sum_{p=0}^{n-1} pL_p^2 - 2(1-|r|)^2 \left(\sum_{q=1}^{\alpha} \sum_{p=q}^{n-\alpha+q-1} L_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดให้ $C_{4,r}$ เป็นเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็นลำดับคู่คี่ นั่นคือ

$$C_{4,r} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ r \cdot 4 & 2 & 1 & 3 \\ r \cdot 3 & r \cdot 4 & 2 & 1 \\ r \cdot 1 & r \cdot 3 & r \cdot 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ถ้า $r = 2$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,2}) \approx 17.3114$ และจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $s(C_{4,2}) \leq 23.2379$

ถ้า $r = \frac{1}{2}$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,\frac{1}{2}}) \approx 7.6187$ และจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $s(C_{4,\frac{1}{2}}) \leq 9.4868$

ถ้า $r = 1+i$ แล้วจากบทนิยาม 2.1 จะได้ $s(C_{4,1+i}) \approx 14.8698$ และจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ $s(C_{4,1+i}) \leq 18.1656$ □

4. สรุป

แรงจูงใจของงานวิจัยนี้เกิดจากงานวิจัยของนักวิจัยหลายท่าน โดยเฉพาะงานวิจัยของ Sharma และ Kumar [5] ซึ่งให้ข้อสังเกตของขอบเขตบน

สำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์ใด ๆ การศึกษา งานวิจัยดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยต้องการศึกษาขอบเขตบน สำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ โดยผู้วิจัยได้ให้สมาชิกของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์เป็นลำดับพีโบนอกซ์และลำดับคู่คี่ ผลของการวิจัยทำให้ได้ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับพีโบนอกซ์ ดังบทแทรก 3.1 และทฤษฎีบท 3.3 ตามลำดับ และผู้วิจัยได้ขอบเขตบนสำหรับการกระจายตัวของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์ฮา-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับคู่คี่ ดังบทแทรก 3.2 และทฤษฎีบท 3.4 ตามลำดับ

5. References

[1] Mirsky, L., 1956, The spread of a matrix, *Mathematika* 3: 127-130.
 [2] Johnson, C. R., Kumar, R. and Wolkowicz, H., 1985, Lower bounds for the spread of a matrix, *Linear Algebra Appl.* 29: 161-173.

- [3] Jiang, E. and Zhan, X. , 1997, Lower bounds for the spread of a Hermitian matrix, *Linear Algebra Appl.* 256: 153-163.
- [4] Wu, J., Zhang, P. and Liao, W., 2012, Upper bounds for the spread of a matrix, *Linear Algebra Appl.* 437: 2813-2822.
- [5] Sharma, R. and Kumar, R. , 2013, Remark on upper bounds for the spread of a matrix, *Linear Algebra Appl.* 438: 4359-4362.
- [6] Meyer, C.D. , 2000, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 718 p.
- [7] Shen, S. and Cen, J., 2010, On the bounds for the norms of r-circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Appl. Math. Comput.* 216: 2891-2897.
- [8] Zhou, J. and Jiang, Z. , 2014, The spectral norms of g- circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries, *Appl. Math. Comput.* 233: 582-587.
- [9] Zhou, J. and Jiang, Z. , 2015, A note on spectral norms of even-order r-circulant matrices, *Appl. Math. Comput.* 250: 368-371.