



## นอร์มของเมทริกซ์

อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คิวแลนต์

เชิงเรขาคณิตสมมาตรกับจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

# On the Norms of Symmetric r-Circulant and Symmetric Geometric Circulant Matrices with the Hyperharmonic Fibonacci Numbers

อัจฉรา ปาจินบุรวรรณ์\*, ชัญญานุช ราชสีห์, สุขุมาล วรรณดิษฐ์, วิมลสิริ ทวีปรีดา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ปทุมธานี 12120

Archara Pacheenburawana\*, Chanyanuch Ratchasri, Sukumal Wannadit,  
Wimonsiri Taveepreeda

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,  
Pathum Thani 12120

Received 9 October 2021; Received in revised from 2 March 2022; Accepted 16 March 2022

## บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คิวแลนต์เชิงเรขาคณิตสมมาตร ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี นอกจากนี้ได้ให้ตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลขที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น

**คำสำคัญ:** เมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตร; เมทริกซ์เซอร์คิวแลนต์เชิงเรขาคณิตสมมาตร; จำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี; เมทริกซ์นอร์ม

## Abstract

This research objective is to find upper and lower bounds for the spectral norms, 1-norm, and  $\infty$ -norm of symmetric  $r$ -circulant and symmetric geometric circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers. Furthermore, some examples and numerical results for demonstrating the validity of the hypotheses of our results are demonstrated.

**Keywords:** Symmetric  $r$ -circulant matrix; Symmetric geometric circulant matrix; Hyperharmonic Fibonacci number; Matrix norm

## 1. บทนำ

เมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับหลากหลายปัญหา อาทิเช่น กระบวนการส่งสัญญาณ ความน่าจะเป็น การวิเคราะห์เชิงตัวเลข และทฤษฎีรหัส ช่วงเวลาที่ผ่านมาได้มีการวิจัยหลายท่านได้ศึกษาเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนต่างๆ ในปี ค.ศ. 2015 Tuglu และ Kizilates ได้ศึกษานอร์มของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี [1] ต่อมาในปี ค.ศ. 2016 Sintunavarat ได้ประมาณค่าขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์ และเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นลำดับพาโดแวน [2] จากนั้นในปี ค.ศ. 2018 Tuglu และ Kizilates ได้ให้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิต และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไตรโบนัคซี [3]

จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมา ผู้วิจัยพบว่าในปัจจุบันยังไม่มีการศึกษาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์ม สเปกตรัม 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

## 2. ความรู้พื้นฐาน

หัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงบทนิยามและผลลัพธ์ของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้  $\mathbb{C}$  แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ  $\mathbb{C}^{n \times n}$  แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ในปี ค.ศ. 1202 เลโอนาร์โด ฟิโบนัคซี (Leonardo Fibonacci) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี ได้เขียนหนังสือเกี่ยวกับการคิดคำนวณชื่อ The Book of Abacus ในหนังสือเล่มนี้มีโจทย์ปัญหาข้อหนึ่งซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างดี คือ ปัญหาจำนวนกระต่ายในทุ่งหญ้า ซึ่งปัญหานี้ทำให้ได้รูปแบบของจำนวนชุดหนึ่งที่เรียงเป็นลำดับ ดังนี้ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ลำดับดังกล่าวในเวลาต่อมาเรารู้จักอย่างกว้างขวางว่า ลำดับฟีโบนัคซี

จำนวนฟีโบนัคซี ถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้ สำหรับจำนวนเต็ม  $n \geq 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

เมื่อ  $F_0 = 0$  และ  $F_1 = 1$  ซึ่งเรียงเป็นลำดับดังนี้ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

ในบทความวิจัย [4] Tuglu Kizilates และ Kesim ได้ทำการศึกษาสมบัติต่างๆ ของผลบวกจำกัดของส่วนกลับของจำนวนฟีโบนัคซี

$$F_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{F_k}$$

เรียกว่า จำนวน  $n$  ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี ( $n$ -th Harmonic Fibonacci numbers) ซึ่งเรียงเป็นลำดับดังนี้

| $n$   | 1 | 2 | 3             | 4              | 5               | 6                 | 7                   | ... |
|-------|---|---|---------------|----------------|-----------------|-------------------|---------------------|-----|
| $F_n$ | 1 | 2 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{17}{6}$ | $\frac{91}{30}$ | $\frac{379}{120}$ | $\frac{5047}{1560}$ | ... |

และนอกจากนี้พวกเขาได้นิยาม จำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี (Hyperharmonic Fibonacci numbers) สำหรับจำนวนเต็ม  $n, p \geq 1$

$$F_n^{(p)} = \sum_{k=1}^n F_k^{(p-1)}$$

เมื่อ  $F_n^{(0)} = \frac{1}{F_n}$  และ  $F_0^{(p)} = 0$  สำหรับ  $p \geq 0$  และถ้า  $p = 2$  แล้วจะได้ลำดับของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซีดังนี้

| $n$         | 0 | 1 | 2 | 3              | 4              | 5                | 6                | 7                   | ... |
|-------------|---|---|---|----------------|----------------|------------------|------------------|---------------------|-----|
| $F_n^{(2)}$ | 0 | 1 | 3 | $\frac{11}{2}$ | $\frac{25}{3}$ | $\frac{341}{30}$ | $\frac{581}{40}$ | $\frac{13853}{780}$ | ... |

หมายเหตุ ในกรณีที่  $p = 1$  จะได้ว่าจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี เป็นจำนวน  $n$  ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

บทนิยาม 2.1 [5] เมทริกซ์ฮาร์-เซอร์คูแลนต์สมมาตร (Symmetric  $r$ -circulant matrix) คือ เมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่นิยามโดย

$$SC_r = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & rc_0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & rc_0 & rc_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & rc_0 & \cdots & rc_{n-4} & rc_{n-3} \\ c_{n-1} & rc_0 & rc_1 & \cdots & rc_{n-3} & rc_{n-2} \end{pmatrix}$$

เมื่อ  $r, c_i \in \mathbb{C}$  สำหรับทุก  $i = 0, \dots, n-1$  และเขียนแทนด้วย  $SC_r = SCirc_r(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$

บทนิยาม 2.2 [3] เมทริกซ์เซอร์คูแลนต์เชิงเรขาคณิตสมมาตร (Symmetric geometric circulant matrix) คือ เมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  ที่นิยามโดย

$$SC_{r^*} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & rc_0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & rc_0 & r^2c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & rc_0 & \cdots & r^{n-3}c_{n-4} & r^{n-2}c_{n-3} \\ c_{n-1} & rc_0 & r^2c_1 & \cdots & r^{n-2}c_{n-3} & r^{n-1}c_{n-2} \end{pmatrix}$$

เมื่อ  $r, c_i \in \mathbb{C}$  สำหรับทุก  $i = 0, \dots, n-1$  และเขียนแทนด้วย  $SC_{r^*} = SCirc_{r^*}(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$   
 บทตั้ง 2.3 [4] รากที่สองของผลบวกของกำลังสองของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี สอดคล้องสมการต่อไปนี้

$$\frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (F_s^{(k)})^2} \leq F_{n-1}^{(k+1)}$$

บทนิยาม 2.4 [6] กำหนดให้  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ

1. นอร์มแบบยูคลิด (Euclidean norm) ของเมทริกซ์  $A$  นิยามโดย

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

2. นอร์มสเปกตรัม (Spectral norm) ของเมทริกซ์  $A$  นิยามโดย

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^H A)}$$

เมื่อ  $\lambda_i(A^H A)$  เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $A^H A$  และ  $A^H$  เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนสังยุคของ  $A$

3. นอร์มความยาวแถวสูงสุด (Maximum row length norm) ของเมทริกซ์  $A$  นิยามโดย

$$r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

4. นอร์มความยาวหลักสูงสุด (Maximum column length norm) ของเมทริกซ์  $A$  นิยามโดย

$$c_1(B) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{ij}|^2}$$

5. 1-นอร์ม (1-norm) ของเมทริกซ์  $A$  นิยามโดย

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$n \times n$  6.  $\infty$ -นอร์ม ( $\infty$ -norm) ของเมทริกซ์  $A$  นิยามโดย

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

บทตั้ง 2.5 [6] กำหนดให้  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E \quad (1)$$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้  $SC_r^{(k)} = SCirc_r(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, \dots, F_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตรขนาด  $n \times n$  จะได้ว่า

(i) ถ้า  $|r| \geq 1$  แล้ว

$$\frac{1}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|SC_r^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{1 + (n-1)|r|^2} F_{n-1}^{(k+1)}$$

(ii) ถ้า  $|r| < 1$  แล้ว

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|SC_r^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{n} F_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้  $SC_r^{(k)} = SCirc_r(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, \dots, F_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตรขนาด  $n \times n$  นั่นคือ

$$SC_r^{(k)} = \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & \dots & F_{n-2}^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} \\ F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & F_3^{(k)} & \dots & F_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} \\ F_2^{(k)} & F_3^{(k)} & F_4^{(k)} & \dots & rF_0^{(k)} & rF_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{n-2}^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} & \dots & rF_{n-4}^{(k)} & rF_{n-3}^{(k)} \\ F_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} & rF_1^{(k)} & \dots & rF_{n-3}^{(k)} & rF_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

บทนิยาม 2.6 [6] กำหนดให้  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่า ผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard product) ของ  $A$  และ  $B$  คือ เมทริกซ์ที่นิยามโดย  $A \circ B = (a_{ij}b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$   
บทตั้ง 2.7 [6] กำหนดให้  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่า

$$\|A \circ B\|_2 \leq r_1(A)c_1(B)$$

### 3. ผลการวิจัย

หัวข้อนี้ผู้วิจัยได้แสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ-นอร์มของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คิวแลนต์เชิงเรขาคณิตสมมาตร ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกพีโบนัคซี

สำหรับทฤษฎีบท 3.1 เป็นการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกพีโบนัคซี

จากบทนิยาม 2.4 (1) จะได้ว่ากำลังสองของนอร์มแบบยุคลิดของ  $SC_r^{(k)}$  คือ

$$\|SC_r^{(k)}\|_E^2 = \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1) |r|^2 \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2$$

(i) สำหรับกรณี  $|r| \geq 1$  จะได้

$$\begin{aligned} \|SC_r^{(k)}\|_E &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} (s+1) \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1) \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2 + n \left( \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} n \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2 + n \left( \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \right)^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2} \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_E \geq \sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \right) = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

และจากอสมการ (1) จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (2)$$

ให้  $A$  และ  $B$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r & r \\ 1 & r & r & \cdots & r & r \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น  $A \circ B = SC_r^{(k)}$  และจะได้

$$\begin{aligned} r_1(A) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{nj}|^2} = \sqrt{1 + (n-1)|r|^2} \\ c_1(B) &= \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left( \mathbb{F}_s^{(k)} \right)^2} \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{1 + (n-1)|r|^2} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (\mathbb{F}_s^{(k)})^2} \leq \sqrt{1 + (n-1)|r|^2} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (3)$$

จากอสมการ (2) และ (3) จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \leq \|SC_r^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{1 + (n-1)|r|^2} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

(ii) สำหรับกรณี  $|r| < 1$  จะได้

$$\begin{aligned} \|SC_r^{(k)}\|_E &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} (s+1)|r|^2 (\mathbb{F}_s^{(k)})^2 + \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1)|r|^2 (\mathbb{F}_s^{(k)})^2 + n|r|^2 (\mathbb{F}_{n-1}^{(k)})^2} \\ &= \sum_{s=0}^{n-2} n|r|^2 (\mathbb{F}_s^{(k)})^2 + n|r|^2 (\mathbb{F}_{n-1}^{(k)})^2 = |r|\sqrt{n} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (\mathbb{F}_s^{(k)})^2} \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_E \geq |r|\sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \right) = |r| \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

และจากอสมการ (1) จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_2 \geq \frac{|r|}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (4)$$

กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r & r \\ 1 & r & r & \cdots & r & r \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น  $A \circ B = SC_r^{(k)}$  และจะได้

$$\begin{aligned} r_1(A) &= \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{1j}|^2} = \sqrt{n} \\ c_1(B) &= \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (\mathbb{F}_s^{(k)})^2} \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (F_s^{(k)})^2} \leq \sqrt{n} F_{n-1}^{(k+1)} \quad (5)$$

จากอสมการ (4) และ (5) จะได้

$$\frac{|r|}{\sqrt{n}} F_{n-1}^{(k+1)} \leq \|SC_r^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{n} F_{n-1}^{(k+1)} \quad \blacksquare$$

**ตัวอย่าง 3.2** ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตรขนาด  $5 \times 5$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์-มอนิกฟีโบนัคซี

**Table 1** Upper and lower bounds for the spectral norms of  $5 \times 5$  symmetric r-circulant with the hyperharmonic Fibonacci numbers

|              |         |             | Lower bounds | $\ SC_r^{(k)}\ _2$ | Upper bounds |
|--------------|---------|-------------|--------------|--------------------|--------------|
| $ r  \geq 1$ | $k = 1$ | $r = 2$     | 3.7268       | 10.8164            | 34.3592      |
|              |         | $r = 1$     | 3.7268       | 8.3333             | 18.6339      |
|              |         | $r = 1 + i$ | 3.7268       | 9.1182             | 25.0000      |
|              | $k = 2$ | $r = 2$     | 7.9753       | 21.6523            | 73.5287      |
|              |         | $r = 1$     | 7.9753       | 17.8333            | 39.8765      |
|              |         | $r = 1 + i$ | 7.9753       | 19.0112            | 53.5000      |
| $ r  < 1$    | $k = 1$ | $r = 0.5$   | 1.8634       | 7.5492             | 18.6339      |
|              |         | $r = -0.1$  | 0.3727       | 7.0073             | 18.6339      |
|              |         | $r = 0.2i$  | 1.6667       | 7.1028             | 18.6339      |
|              | $k = 2$ | $r = 0.5$   | 3.9877       | 16.6240            | 39.8765      |
|              |         | $r = -0.1$  | 0.7975       | 15.7322            | 39.8765      |
|              |         | $r = 0.2i$  | 3.5667       | 15.8927            | 39.8765      |

สำหรับทฤษฎีบท 3.3 เป็นการหา 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์มของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์-มอนิกฟีโบนัคซี

**ทฤษฎีบท 3.3** ให้  $SC_r^{(k)} = SCirc_r(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, \dots, F_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คิวแลนต์สมมาตรขนาด  $n \times n$  จะได้ว่า

(i) ถ้า  $|r| \geq 1$  แล้ว

$$\|SC_r^{(k)}\|_1 = \|SC_r^{(k)}\|_\infty = F_{n-1}^{(k)} + |r| F_{n-2}^{(k+1)}$$

(ii) ถ้า  $|r| < 1$  แล้ว

$$\|SC_r^{(k)}\|_1 = \|SC_r^{(k)}\|_\infty = F_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้  $SC_r^{(k)} = SCirc_r(F_0^{(k)}, F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, \dots, F_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนต์สมมาตรขนาด  $n \times n$  นั่นคือ

$$SC_r^{(k)} = \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & \cdots & F_{n-2}^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} \\ F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & F_3^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} \\ F_2^{(k)} & F_3^{(k)} & F_4^{(k)} & \cdots & rF_0^{(k)} & rF_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{n-2}^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} & \cdots & rF_{n-4}^{(k)} & rF_{n-3}^{(k)} \\ F_{n-1}^{(k)} & rF_0^{(k)} & rF_1^{(k)} & \cdots & rF_{n-3}^{(k)} & rF_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

(i) สำหรับกรณี  $|r| \geq 1$  จากบทนิยาม 2.4 (5) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนัคชีจะได้ว่า

$$\|SC_r^{(k)}\|_1 = |F_{n-1}^{(k)}| + |r| \sum_{s=0}^{n-2} |F_s^{(k)}| = F_{n-1}^{(k)} + |r| F_{n-2}^{(k+1)} \quad (6)$$

และจากบทนิยาม 2.4 (6) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนัคชีจะได้ว่า

$$\|SC_r^{(k)}\|_\infty = |F_{n-1}^{(k)}| + |r| \sum_{s=0}^{n-2} |F_s^{(k)}| = F_{n-1}^{(k)} + |r| F_{n-2}^{(k+1)} \quad (7)$$

จากสมการ (6) และ (7) จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_1 = \|SC_r^{(k)}\|_\infty = F_{n-1}^{(k)} + |r| F_{n-2}^{(k+1)}$$

(ii) สำหรับกรณี  $|r| < 1$  จากบทนิยาม 2.4 (5) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนัคชีจะได้ว่า

$$\|SC_r^{(k)}\|_1 = \sum_{s=0}^{n-1} |F_s^{(k)}| = \sum_{s=1}^{n-1} |F_s^{(k)}| = F_{n-1}^{(k+1)} \quad (8)$$

และจากบทนิยาม 2.4 (6) และนิยามของจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนัคชีจะได้ว่า

$$\|SC_r^{(k)}\|_\infty = \sum_{s=0}^{n-1} |F_s^{(k)}| = \sum_{s=1}^{n-1} |F_s^{(k)}| = F_{n-1}^{(k+1)} \quad (9)$$

จากสมการ (8) และ (9) จะได้

$$\|SC_r^{(k)}\|_1 = \|SC_r^{(k)}\|_\infty = F_{n-1}^{(k+1)} \quad \blacksquare$$

**ตัวอย่าง 3.4** ตารางแสดง 1-นอร์มและ  $\infty$ -นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนต์สมมาตรขนาด  $5 \times 5$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์มอนิกฟีโบนัคชี



**Table 2** 1-norm and  $\infty$ -norm of  $5 \times 5$  symmetric  $r$ -circulant with the hyperharmonic Fibonacci numbers

|              |         |             | $\ SC_r^{(k)}\ _1 = \ SC_r^{(k)}\ _\infty$ |
|--------------|---------|-------------|--------------------------------------------|
| $ r  \geq 1$ | $k = 1$ | $r = 2$     | 13.8333                                    |
|              |         | $r = 1$     | 8.3333                                     |
|              |         | $r = 1 + i$ | 10.6115                                    |
|              | $k = 2$ | $r = 2$     | 27.3333                                    |
|              |         | $r = 1$     | 17.8333                                    |
|              |         | $r = 1 + i$ | 21.7684                                    |
| $ r  < 1$    | $k = 1$ | $r = 0.5$   | 8.3333                                     |
|              |         | $r = -0.1$  | 8.3333                                     |
|              |         | $r = 0.2i$  | 8.3333                                     |
|              | $k = 2$ | $r = 0.5$   | 17.8333                                    |
|              |         | $r = -0.1$  | 17.8333                                    |
|              |         | $r = 0.2i$  | 17.8333                                    |

สำหรับทฤษฎีบท 3.5 เป็นการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรเมื่อ  $|r| \geq 1$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคชี

ทฤษฎีบท 3.5 ให้  $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $n \times n$  จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \leq \|SC_{r^*}^{(k)}\|_2 \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - |r|^{2n}}{1 - |r|^2}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| > 1, \\ \sqrt{n} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| = 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้  $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $n \times n$  นั่นคือ

$$SC_{r^*}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \dots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \dots & r^{n-3}\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} & \dots & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r^{n-1}\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

จากบทนิยาม 2.4 (1) จะได้กำลังสองของนอร์มแบบยุคลิดของ  $SC_{r^*}^{(k)}$  คือ

$$\begin{aligned}\|SC_{r^*}^{(k)}\|_E^2 &= \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1) |r^{s+1}|^2 \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1) |r^{s+1}|^2 \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n \left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2\end{aligned}$$

สำหรับ  $|r| > 1$  จะได้

$$\begin{aligned}\|SC_{r^*}^{(k)}\|_E &\geq \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} (s+1) \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1) \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n \left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{s=0}^{n-2} n \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2 + n \left(\mathbb{F}_{n-1}^{(k)}\right)^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}\end{aligned}$$

จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_E \geq \sqrt{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \right) = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

และจากอสมการ (1) จะได้

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (10)$$

กำหนดให้  $A$  และ  $B$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น  $A \circ B = SC_{r^*}^{(k)}$

สำหรับกรณี  $|r| > 1$  จะได้

$$r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{nj}|^2} = \sqrt{1 + |r|^2 + |r^2|^2 + \cdots + |r^2|^{n-1}}$$

จากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่เป็นอนุกรมจำกัด จะได้ว่า

$$r_1(A) = \sqrt{\frac{1 - |r|^{2n}}{1 - |r|^2}}$$

และ

$$c_1(B) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\| SC_{r^*}^{(k)} \right\|_2 \leq \sqrt{\frac{1 - |r|^{2n}}{1 - |r|^2}} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{1 - |r|^{2n}}{1 - |r|^2}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (11)$$

(ii) สำหรับกรณี  $|r| = 1$  จะได้

$$r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{1j}|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(B) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\left\| SC_{r^*}^{(k)} \right\|_2 \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} \left(\mathbb{F}_s^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{n} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (12)$$

จากอสมการ (11) และ (12) จะได้

$$\left\| SC_{r^*}^{(k)} \right\|_2 \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - |r|^{2n}}{1 - |r|^2}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| > 1, \\ \sqrt{n} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| = 1 \end{cases}$$

และจากอสมการ (10) จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \leq \left\| SC_{r^*}^{(k)} \right\|_2 \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - |r|^{2n}}{1 - |r|^2}} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| > 1, \\ \sqrt{n} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}, & |r| = 1 \end{cases}$$

■

ตัวอย่าง 3.6 ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $5 \times 5$  และ  $|r| \geq 1$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

**Table 3** Upper and lower bounds for the spectral norms of  $5 \times 5$  symmetric geometric circulant matrices and  $|r| \geq 1$  with the hyperharmonic Fibonacci numbers

|         |             | Lower bounds | $\ SC_{r^*}^{(k)}\ _2$ | Upper bounds |
|---------|-------------|--------------|------------------------|--------------|
| $k = 1$ | $r = 2$     | 3.7268       | 24.6392                | 153.8849     |
|         | $r = 1$     | 3.7268       | 8.3333                 | 18.6339      |
|         | $r = 1 + i$ | 3.7268       | 14.3055                | 46.3980      |
| $k = 2$ | $r = 2$     | 7.9753       | 95.5802                | 329.3136     |
|         | $r = 1$     | 7.9753       | 17.8333                | 39.8765      |
|         | $r = 1 + i$ | 7.9753       | 28.8122                | 99.2918      |

สำหรับทฤษฎีบท 3.7 เป็นการหาขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรเมื่อ  $|r| < 1$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

ทฤษฎีบท 3.7 ให้  $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $n \times n$  จะได้ว่า สำหรับ  $|r| < 1$

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{n} \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้  $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $n \times n$  นั่นคือ

$$SC_{r^*}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \cdots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \cdots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \cdots & r^{n-3}\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} & \cdots & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r^{n-1}\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ให้  $A$  และ  $B$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $n \times n$  โดยที่

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & r & \cdots & r^{n-3} & r^{n-2} \\ 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & \cdots & F_{n-2}^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} \\ F_1^{(k)} & F_2^{(k)} & F_3^{(k)} & \cdots & F_{n-1}^{(k)} & F_0^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_{n-2}^{(k)} & F_{n-1}^{(k)} & F_0^{(k)} & \cdots & F_{n-4}^{(k)} & F_{n-3}^{(k)} \\ F_{n-1}^{(k)} & F_0^{(k)} & F_1^{(k)} & \cdots & F_{n-3}^{(k)} & F_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น  $A \circ B = SC_{r^*}^{(k)}$  ถ้า  $|r| < 1$  แล้วจะได้ว่า

$$r_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{1j}|^2} = \sqrt{n}$$

$$c_1(B) = \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_{i1}|^2} = \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (F_s^{(k)})^2}$$

จากบทตั้ง 2.7 และบทตั้ง 2.3 จะได้

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_2 \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{s=0}^{n-1} (F_s^{(k)})^2} \leq \sqrt{n} F_{n-1}^{(k+1)} \quad \blacksquare$$

**ตัวอย่าง 3.8** ตารางแสดงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $5 \times 5$  และ  $|r| < 1$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

**Table 4** Upper bound for the spectral norms of  $5 \times 5$  symmetric geometric circulant matrices and  $|r| < 1$  with the hyperharmonic Fibonacci numbers

|                           |                              | $\ SC_{r^*}^{(k)}\ _2$ | Upper Bound |
|---------------------------|------------------------------|------------------------|-------------|
| <b><math>k = 1</math></b> | <b><math>r = 0.5</math></b>  | 7.2070                 | 18.6339     |
|                           | <b><math>r = -0.1</math></b> | 7.0753                 | 18.6339     |
|                           | <b><math>r = 0.2i</math></b> | 7.0586                 | 18.6339     |
| <b><math>k = 2</math></b> | <b><math>r = 0.5</math></b>  | 16.0422                | 39.8765     |
|                           | <b><math>r = -0.1</math></b> | 15.8495                | 39.8765     |
|                           | <b><math>r = 0.2i</math></b> | 15.8295                | 39.8765     |

สำหรับทฤษฎีบท 3.9 เป็นการหา 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตร เมื่อ  $|r| < 1$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกพีโบนอกซี

ทฤษฎีบท 3.9 ให้  $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $n \times n$  จะได้ว่า สำหรับ  $|r| < 1$

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_1 = \|SC_{r^*}^{(k)}\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)}$$

พิสูจน์ ให้  $SC_{r^*}^{(k)} = SCirc_{r^*}(\mathbb{F}_0^{(k)}, \mathbb{F}_1^{(k)}, \mathbb{F}_2^{(k)}, \dots, \mathbb{F}_{n-1}^{(k)})$  เป็นเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $n \times n$  นั่นคือ

$$SC_{r^*}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_0^{(k)} & \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} \\ \mathbb{F}_1^{(k)} & \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \dots & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} \\ \mathbb{F}_2^{(k)} & \mathbb{F}_3^{(k)} & \mathbb{F}_4^{(k)} & \dots & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{F}_{n-2}^{(k)} & \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & \dots & r^{n-3}\mathbb{F}_{n-4}^{(k)} & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} \\ \mathbb{F}_{n-1}^{(k)} & r\mathbb{F}_0^{(k)} & r^2\mathbb{F}_1^{(k)} & \dots & r^{n-2}\mathbb{F}_{n-3}^{(k)} & r^{n-1}\mathbb{F}_{n-2}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ถ้า  $|r| < 1$  แล้วจากบทนิยาม 2.4 (5) จะได้ว่า

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_1 = \sum_{s=0}^{n-1} |\mathbb{F}_s^{(k)}| = \sum_{s=1}^{n-1} |\mathbb{F}_s^{(k)}| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (13)$$

และจากบทนิยาม 2.4 (6) จะได้

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_\infty = \sum_{s=0}^{n-1} |\mathbb{F}_s^{(k)}| = \sum_{s=1}^{n-1} |\mathbb{F}_s^{(k)}| = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad (14)$$

จากสมการ (13) และ (14) จะได้

$$\|SC_{r^*}^{(k)}\|_1 = \|SC_{r^*}^{(k)}\|_\infty = \mathbb{F}_{n-1}^{(k+1)} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.10 ตารางแสดง 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์ม ของเมทริกซ์เซอร์คูลแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรขนาด  $5 \times 5$  และ  $|r| < 1$  ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี

**Table 5** 1-norm and  $\infty$ -norm of  $5 \times 5$  symmetric geometric circulant matrices and with the hyperharmonic Fibonacci numbers

|                           |                              | $\ SC_{r^*}^{(k)}\ _1 = \ SC_{r^*}^{(k)}\ _\infty$ |
|---------------------------|------------------------------|----------------------------------------------------|
| <b><math>k = 1</math></b> | <b><math>r = 0.5</math></b>  | 8.3333                                             |
|                           | <b><math>r = -0.1</math></b> | 8.3333                                             |
|                           | <b><math>r = 0.2i</math></b> | 8.3333                                             |
| <b><math>k = 2</math></b> | <b><math>r = 0.5</math></b>  | 17.8333                                            |
|                           | <b><math>r = -0.1</math></b> | 17.8333                                            |
|                           | <b><math>r = 0.2i</math></b> | 17.8333                                            |

#### 4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์ม ของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูลแลนท์สมมาตร และเมทริกซ์เซอร์คูลแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี ผลของการวิจัยทำให้ได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัม 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์มของเมทริกซ์อาร์-เซอร์คูลแลนท์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี ดังทฤษฎีบท 3.1 และ 3.3 ตามลำดับ และผู้วิจัยได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของนอร์มสเปกตรัมในกรณี  $|r| < 1$  ขอบเขตบนของนอร์มสเปกตรัมในกรณี  $|r| < 1$  และ 1-นอร์ม และ  $\infty$ -นอร์มในกรณี  $|r| < 1$  ของเมทริกซ์เซอร์คูลแลนท์เชิงเรขาคณิตสมมาตรที่มีสมาชิกเป็นจำนวนไฮเพอร์ฮาร์โมนิกฟีโบนัคซี ดังทฤษฎีบท 3.5, 3.7 และ 3.9 ตามลำดับ

#### 5. References

- [1] Tuglu, N. and Kizilates, C., 2015, On the norms of circulant and r-circulant matrices with the hyperharmonic Fibonacci numbers, J. Inequal. Appl., 253.
- [2] Sintunavarat, W., 2016, The upper bound estimation for the spectral norm of r-circulant and symmetric r-circulant matrices with the Padovan sequence, J. Nonlinear Sci. Appl., 9: 92-101.
- [3] Kizilates, C. and Tuglu, N., 2018, On the Norms of Geometric and Symmetric Geometric Circulant Matrices with the Tribonacci Number, GU J. Sci., 31(2): 555-567.
- [4] Tuglu, N., Kizilates, C. and Kesim, S., 2015, On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers, Adv. Diff. Eqn., 2015:297.

- [5] Daojin, S. and Wenling, Z., 2009, On Nonsingularity the Symmetric r-Circulant Matrices, Second International Conference on Future Information Technology and Management Engineering, pp.335-338.
- [6] Horn, RA., Johnson, CR., 1991, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 607 p.