



การวางนัยทั่วไปของพหุนามฟีโบนัชชีและพหุนามลูคัส

New Generalizations of Fibonacci and Lucas Polynomials

ปฐนชญา พัฒนางกูร*, ชลธิชา ชินสะอาด, วิศินี งามศรีวิเศษ, ทอฝัน แววกระโทก
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Chonticha Chinsaad, Wisinee Ngamsriwiset,
Thofun Waewkrathok

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 7 February 2022; Received in revised 6 May 2022; Accepted 17 May 2022

บทคัดย่อ

พหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ ซึ่งนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $f_n(x) = 2axf_{n-1}(x) + (b-a^2)f_{n-2}(x)$ สำหรับ $n \geq 2$ และ $l_n(x) = 2axl_{n-1}(x) + (b-a^2)l_{n-2}(x)$ สำหรับ $n \geq 2$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1$ และ $l_0(x) = 2, l_1(x) = 2ax$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ เป็นพหุนามที่เป็นการวางนัยทั่วไปของพหุนามฟีโบนัชชีและพหุนามลูคัส ซึ่งจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรของบีเน็ต และเอกลักษณ์บางแบบสำหรับสองพหุนามดังกล่าว

คำสำคัญ: พหุนามฟีโบนัชชี; พหุนามลูคัส; ฟังก์ชันก่อกำเนิด; สูตรของบีเน็ต

Abstract

We consider the polynomials $f_n(x)$ and $l_n(x)$ which are generated by the recurrence relations $f_n(x) = 2axf_{n-1}(x) + (b-a^2)f_{n-2}(x)$ for $n \geq 2$ and $l_n(x) = 2axl_{n-1}(x) + (b-a^2)l_{n-2}(x)$ for $n \geq 2$ with the initial conditions $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1$ and $l_0(x) = 2, l_1(x) = 2ax$ where a and b are any non-zero real numbers. We obtain the new generalizations of Fibonacci and Lucas polynomials. Moreover, we acquire generating functions, Binet's formulas, and some identities involving $f_n(x)$ and $l_n(x)$.

Keywords: Fibonacci polynomial; Lucas polynomial; Generating function; Binet's formula

1. บทนำ

พหุนามต่างๆ ที่เป็นที่รู้จักกันดี เช่น พหุนามฟีโบนัชชี พหุนามลูคัส พหุนามเพลล์ พหุนามเพลล์ - ลูคัส พหุนามจาคอบส์ทอล และพหุนามจาคอบส์ทอล - ลูคัส เป็นต้น เป็นพหุนามที่ถูกนิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดทั้งสิ้น ซึ่งมีผู้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามดังกล่าวและเกิดผลงานวิจัยอย่างต่อเนื่อง โดยเมื่อปี ค.ศ.1833 E. C. Catalan นักคณิตศาสตร์ชาวเบลเยียมได้ให้บทนิยามและศึกษาสมบัติของพหุนามฟีโบนัชชี $F_n(x)$ และในปี ค.ศ.

1957 E. Jacobsthal [5] นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ได้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามจาคอบส์ทอล $J_n(x)$ และพหุนามจาคอบส์ทอล - ลูคัส $K_n(x)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 1970 M. Bicknell [1] ได้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามลูคัส $L_n(x)$ และเมื่อปี ค.ศ. 1983 A. F. Horadam และ Bro. J. M. Mahon [4] ได้ศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเพลล์ $P_n(x)$ และพหุนามเพลล์ - ลูคัส $Q_n(x)$ โดยความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับและพหุนามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ชื่อ	ลำดับ	พหุนาม
ฟีโบนัชชี (Fibonacci)	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$	$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $F_0(x) = 0$ และ $F_1(x) = 1$
ลูคัส (Lucas)	$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $L_0 = 2$ และ $L_1 = 1$	$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $L_0(x) = 2$ และ $L_1(x) = x$
เพลล์ (Pell)	$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $P_0 = 0$ และ $P_1 = 1$	$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $P_0(x) = 0$ และ $P_1(x) = 1$
เพลล์ - ลูคัส (Pell-Lucas)	$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $Q_0 = 2$ และ $Q_1 = 2$	$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $Q_0(x) = 2$ และ $Q_1(x) = 2x$
จาคอบส์ทอล (Jacobsthal)	$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $J_0 = 0$ และ $J_1 = 1$	$J_n(x) = xJ_{n-1}(x) + 2J_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $J_0(x) = 0$ และ $J_1(x) = 1$
จาคอบส์ทอล - ลูคัส (Jacobsthal-Lucas)	$K_n = K_{n-1} + 2K_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $K_0 = 2$ และ $K_1 = 1$	$K_n(x) = xK_{n-1}(x) + 2K_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $K_0(x) = 2$ และ $K_1(x) = x$

ต่อมาเมื่อปี ค.ศ. 2014 G. Bilgici [2] ได้ตีพิมพ์ผลงานวิจัยเรื่องการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส (New Generalizations of Fibonacci and

Lucas Sequence) ซึ่งในผลงานวิจัยดังกล่าวได้ให้บทนิยามของลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$f_n = 2af_{n-1} + (b-a^2)f_{n-2} \text{ สำหรับทุก } n \geq 2 \text{ โดยที่ } f_0 = 0, f_1 = 1$$
และ
$$l_n = 2al_{n-1} + (b-a^2)l_{n-2} \text{ สำหรับทุก } n \geq 2 \text{ โดยที่ } l_0 = 2, l_1 = 2a$$
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

จากการศึกษาผลงานวิจัยของ G. Bilgici ดังกล่าว ทำให้ทราบว่าลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ ดังบทนิยาม 1.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับต่างๆ เช่น เมื่อ $a = \frac{1}{2}$ และ $b = \frac{5}{4}$ แล้วจะได้ลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส เมื่อ $a = \frac{1}{2}$ และ $b = \frac{9}{4}$ แล้วจะได้ลำดับจาโคบส์ทอลและ

ลำดับจาโคบส์ทอล – ลูคัส และเมื่อ $a = 1$ และ $b = 2$ จะได้ลำดับเพลล์และลำดับเพลล์ – ลูคัส เป็นต้น ดังนั้น งานวิจัยฉบับนี้จึงจะทำการศึกษาการวางนัยทั่วไปของ พหุนามต่างๆ ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น โดยได้ให้บทนิยามของ พหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2 กำหนดให้ $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ เป็นพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้
 $f_n(x) = 2ax f_{n-1}(x) + (b-a^2) f_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1$
 และ $l_n(x) = 2ax l_{n-1}(x) + (b-a^2) l_{n-2}(x)$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $l_0(x) = 2, l_1(x) = 2ax$
 เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

จะเห็นว่าถ้ากำหนดให้ $x = 1$ ลงในบทนิยาม 1.2 แล้วจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดดังบทนิยาม 1.1 ข้างต้น

2. ฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating Function)

จะเห็นว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดของพหุนามฟีโบนัชชี $F_n(x)$ และพหุนามลูคัส $L_n(x)$ คือ

$$G(F_n(x))(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) t^n = \frac{t}{1-t(x+t)} = \frac{t}{1-(t^1 x^1 + t^2 x^0)} = \frac{t}{1-xt-t^2}$$

$$\text{และ } G(L_n(x))(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{2-2xt}{1-t(x+t)} = \frac{2-2xt}{1-(t^1 x^1 + t^2 x^0)} = \frac{2-2xt}{1-xt-t^2} \text{ ตามลำดับ}$$

ในหัวข้อนี้จึงจะศึกษาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$

ทฤษฎีบท 2.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n = \frac{t}{1-2axt-(b-a^2)t^2} \quad (1)$$

$$\text{และ } \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) t^n = \frac{2-2axt}{1-2axt-(b-a^2)t^2} \quad (2)$$

ตามลำดับ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

พิสูจน์ กำหนดให้ $f(x, t)$ และ $l(x, t)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ ตามลำดับ

$$\text{จะได้ว่า } f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \text{ และ } l(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) t^n$$

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 & (1-2ax t-(b-a^2)t^2)f(x,t) \\
 &= (1-2ax t-(b-a^2)t^2)\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n - 2ax \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^{n+1} - (b-a^2)\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^{n+2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n - 2ax \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x)t^n - (b-a^2)\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}(x)t^n \\
 &= \left(f_0(x)t^0 + f_1(x)t^1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)t^n \right) - \left(2ax f_0(x)t^1 + 2ax \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}(x)t^n \right) - (b-a^2)\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}(x)t^n \\
 &= t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - 2ax f_{n-1}(x) - (b-a^2)f_{n-2}(x))t^n \\
 &= t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - (2ax f_{n-1}(x) + (b-a^2)f_{n-2}(x)))t^n = t + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x))t^n = t \\
 \text{ดังนั้น} \quad f(x,t) &= \frac{t}{1-2ax t-(b-a^2)t^2}
 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 & (1-2ax t-(b-a^2)t^2)l(x,t) \\
 &= (1-2ax t-(b-a^2)t^2)\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^n - 2ax \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^{n+1} - (b-a^2)\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^{n+2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^n - 2ax \sum_{n=1}^{\infty} l_{n-1}(x)t^n - (b-a^2)\sum_{n=2}^{\infty} l_{n-2}(x)t^n \\
 &= \left(l_0(x)t^0 + l_1(x)t^1 + \sum_{n=2}^{\infty} l_n(x)t^n \right) - \left(2ax l_0(x)t^1 + 2ax \sum_{n=2}^{\infty} l_{n-1}(x)t^n \right) - (b-a^2)\sum_{n=2}^{\infty} l_{n-2}(x)t^n \\
 &= 2 - 2ax t + \sum_{n=2}^{\infty} (l_n(x) - (2ax l_{n-1}(x) + (b-a^2)l_{n-2}(x)))t^n \\
 &= 2 - 2ax t + \sum_{n=2}^{\infty} (l_n(x) - l_n(x))t^n = 2 - 2ax t \\
 \text{ดังนั้น} \quad l(x,t) &= \frac{2-2ax t}{1-2ax t-(b-a^2)t^2}
 \end{aligned}$$

3. สูตรของบิเนต (Binet's Formulas)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นสูตรของบิเนตสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้ในการหาพจน์ที่ n ของพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ นั้นเอง

ทฤษฎีบท 3.1 สูตรของบิเนตสำหรับพหุนาม $f_n(x)$ และพหุนาม $l_n(x)$ คือ

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3)$$

และ

$$l_n(x) = \alpha^n + \beta^n \quad (4)$$

ตามลำดับ เมื่อ $\alpha = ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ และ $\beta = ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ เป็นรากของสมการ $r^2 - 2axr - (b - a^2) = 0$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

พิสูจน์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ จากบทนิยามของ $f_n(x)$ จะได้ว่า

$$f_n(x) - 2axf_{n-1}(x) - (b - a^2)f_{n-2}(x) = 0 \text{ และจะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ } r^2 - 2axr - (b - a^2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad r = \frac{2ax \pm \sqrt{4a^2x^2 + 4b - 4a^2}}{2} = ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$$

กำหนดให้ $\alpha = ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ และ $\beta = ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ ซึ่งเป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะข้างต้น จะได้ว่า

$$f_n(x) = p_1\alpha^n + p_2\beta^n = p_1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n + p_2\left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n \quad \text{สำหรับ } n \geq 0$$

$$\text{จาก } f_0(x) = 0 \text{ จะได้ } 0 = p_1 + p_2$$

$$\text{จาก } f_1(x) = 1 \text{ จะได้ } 1 = p_1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) + p_2\left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) \quad (5)$$

เมื่อคูณสมการ $p_1 + p_2 = 0$ ด้วย $ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ จะได้สมการ

$$p_1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) + p_2\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) = 0 \quad (6)$$

$$\text{นำสมการ (5) ลบสมการ (6) จะได้ } \left(-2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)p_2 = 1 \quad \text{นั่นคือ } p_2 = -\frac{1}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}}$$

$$\text{จาก } p_1 + p_2 = 0 \text{ จึงได้ว่า } p_1 = -p_2 = \frac{1}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}}\right)\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}}\right)\left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n \\ &= \frac{\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n - \left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } f_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ในทำนองเดียวกันจะเห็นว่า $l_n(x) - 2axl_{n-1}(x) - (b-a^2)l_{n-2}(x) = 0$ และจะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ $r^2 - 2axr - (b-a^2) = 0$ ดังนั้น $r = ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ จะได้ว่า

กำหนดให้ $\alpha = ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ และ $\beta = ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$

$$l_n(x) = p_1\alpha^n + p_2\beta^n = p_1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n + p_2\left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n \quad \text{สำหรับ } n \geq 0$$

จาก $l_0(x) = 2$ จะได้ $2 = p_1 + p_2$

$$\text{จาก } l_1(x) = 2ax \text{ จะได้ } 2ax = p_1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) + p_2\left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) \quad (7)$$

เมื่อคูณสมการ $p_1 + p_2 = 2$ ด้วย $ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ จะได้สมการ

$$p_1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) + p_2\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) = 2\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) \quad (8)$$

นำสมการ (8) ลบสมการ (7) จะได้ $p_2\left(2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right) = 2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$ นั่นคือ $p_2 = 1$

จาก $p_1 + p_2 = 2$ จึงได้ $p_1 = 2 - p_2 = 2 - 1 = 1$

ดังนั้น $l_n(x) = 1\left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n + 1\left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}\right)^n$ นั่นคือ $l_n(x) = \alpha^n + \beta^n$

4. เอกลักษณ์บางแบบเกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$

(Some Identities involving $f_n(x)$ and $l_n(x)$)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเอกลักษณ์เกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ บางเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ n, m และ r เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่าเอกลักษณ์เกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ มีดังนี้

$$(i) \quad f_{-n}(x) = -\frac{1}{(a^2 - b)^n} f_n(x) \quad \text{และ} \quad l_{-n}(x) = \frac{1}{(a^2 - b)^n} l_n(x)$$

$$(ii) \quad f_{n+r}(x)f_{n-r}(x) - f_n^2(x) = -(a^2 - b)^{n-r} f_r^2(x)$$

$$\text{และ } l_{n+r}(x)l_{n-r}(x) - l_n^2(x) = 4(a^2x^2 + b - a^2)(a^2 - b)^{n-r} f_r^2(x)$$

$$(iii) \quad f_m(x)f_{n+1}(x) - f_n(x)f_{m+1}(x) = (a^2 - b)^n f_{m-n}(x)$$

$$\text{และ } l_m(x)l_{n+1}(x) - l_n(x)l_{m+1}(x) = -4(a^2x^2 + b - a^2)(a^2 - b)^n f_{m-n}(x)$$

$$(iv) \quad f_n(x)l_m(x) = f_{n+m}(x) + (a^2 - b)^m f_{n-m}(x)$$

$$(v) \quad l_{n+1}(x) - (2a^2x^2 + b - a^2)l_{n-1}(x) = 4ax(2a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x)$$

$$\text{และ } l_n(x) - axl_{n-1}(x) = 2(2a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x)$$

$$(vi) \quad f_{n+1}(x) - (2a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x) = axl_{n-1}(x) \quad \text{และ} \quad f_n(x) - axf_{n-1}(x) = \frac{l_{n-1}(x)}{2}$$

$$(vii) \quad l_n^2(x) = 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x) + 4(a^2 - b)^n$$

$$(viii) \quad f_n(x)f_{n+1}(x) = \frac{1}{4(a^2x^2 + b - a^2)}(l_{2n+1}(x) - 2ax(a^2 - b)^n)$$

$$\text{และ } l_n(x)l_{n+1}(x) = l_{2n+1}(x) + 2ax(a^2 - b)^n$$

$$(ix) \quad l_{2n}(x) = \frac{1}{2}(l_n^2(x) + 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x))$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

พิสูจน์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ การพิสูจน์จะอาศัยสูตรของบีเนท (3) และ (4) ดังนี้

(i) จากสูตรของบีเนท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$f_{-n}(x) = \frac{\alpha^{(-n)} - \beta^{(-n)}}{\alpha - \beta} = \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}\right) \left(\frac{1}{\alpha - \beta}\right) = \left(\frac{1}{\alpha - \beta}\right) \left(\frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n \beta^n}\right) = \left(\frac{1}{(\alpha\beta)^n}\right) \left(\frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}\right)$$

$$\text{เนื่องจาก } \alpha\beta = (ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2})(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}) = a^2x^2 - (a^2x^2 + b - a^2) = a^2 - b$$

$$\text{จึงได้ว่า } f_{-n}(x) = -\frac{1}{(a^2 - b)^n} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \quad \text{ดังนั้น} \quad f_{-n}(x) = -\frac{1}{(a^2 - b)^n} f_n(x)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$l_{-n}(x) = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{\alpha^n \beta^n}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad l_{-n}(x) = \frac{1}{(a^2 - b)^n} (\alpha^n + \beta^n) \quad \text{นั่นคือ} \quad l_{-n}(x) = \frac{1}{(a^2 - b)^n} l_n(x)$$

(ii) อาศัยสูตรของบีเนท (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{n+r}(x)f_{n-r}(x) - f_n^2(x) &= \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right) \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\ &= \frac{-(\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r} - 2\alpha^r\beta^r + \beta^{2r})}{(\alpha - \beta)^2} = -(\alpha\beta)^{n-r} \frac{(\alpha^r - \beta^r)^2}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \alpha\beta = a^2 - b \quad \text{ดังนั้น} \quad f_{n+r}(x)f_{n-r}(x) - f_n^2(x) = -(a^2 - b)^{n-r} f_r^2(x)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} l_{n+r}(x)l_{n-r}(x) - l_n^2(x) &= (\alpha^{n+r} + \beta^{n+r})(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r}) - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}\right)^2 = (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha - \beta)^2 \left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \alpha\beta = a^2 - b \quad \text{และ} \quad \alpha - \beta = 2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad l_{n+r}(x)l_{n-r}(x) - l_n^2(x) = 4(a^2x^2 + b - a^2)(a^2 - b)^{n-r} f_r^2(x)$$

(iii) อาศัยสูตรของบีเนท์ (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_m(x)f_{n+1}(x) - f_n(x)f_{m+1}(x) &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left((\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}) \right) \\ &= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^{m-n+1} - \alpha^{m-n}\beta + \beta^{m-n+1} - \alpha\beta^{m-n}) \\ &= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha - \beta)\alpha^{m-n} - (\alpha - \beta)\beta^{m-n}) = \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)} (\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) \\ &= (\alpha\beta)^n \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) = (a^2 - b)^n f_{m-n}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } l_m(x)l_{n+1}(x) - l_n(x)l_{m+1}(x) &= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{m+1} + \beta^{m+1}) \\ &= -\alpha^m\beta^n(\alpha - \beta) + \alpha^n\beta^m(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^n\beta^m - \alpha^m\beta^n) \\ &= -(\alpha - \beta)^2 (\alpha\beta)^n \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) = -4(a^2x^2 + b - a^2)(a^2 - b)^n f_{m-n}(x) \end{aligned}$$

(iv) โดยสูตรของบีเนท์ (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_n(x)l_m(x) &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^m + \beta^m) = \frac{\alpha^{n+m} + \alpha^n\beta^m - \alpha^m\beta^n - \beta^{n+m}}{\alpha - \beta} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+m}}{\alpha - \beta} \right) + (\alpha\beta)^m \left(\frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha - \beta} \right) = f_{n+m}(x) + (a^2 - b)^m f_{n-m}(x) \end{aligned}$$

(v) โดยสูตรของบีเนท์ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} l_{n-1}(x) + l_{n+1}(x) &= (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = (\alpha^{n-1} + \alpha^{n+1}) + (\beta^{n-1} + \beta^{n+1}) = \alpha^{n-1}(1 + \alpha^2) + \beta^{n-1}(1 + \beta^2) \\ &= \alpha^{n-1} \left(1 + \left(ax + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2} \right)^2 \right) + \beta^{n-1} \left(1 + \left(ax - \sqrt{a^2x^2 + b - a^2} \right)^2 \right) \\ &= (1 + 2a^2x^2 + b - a^2)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2})(2ax\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}) \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \end{aligned}$$

$$= (2a^2x^2 + b - a^2 + 1)l_{n-1}(x) + 4ax(a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x)$$

$$\text{ดังนั้น } l_{n+1}(x) - (2a^2x^2 + b - a^2)l_{n-1}(x) = 4ax(a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x)$$

เนื่องจาก $l_n(x) = 2axl_{n-1}(x) + (b - a^2)l_{n-2}(x)$ จะได้

$$l_{n+1}(x) - (2a^2x^2 + b - a^2)l_{n-1}(x) = (2axl_n(x) + (b - a^2)l_{n-1}(x)) - (2a^2x^2 + b - a^2)l_{n-1}(x)$$

$$4ax(a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x) = 2ax(l_n(x) - axl_{n-1}(x))$$

$$2(a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x) = l_n(x) - axl_{n-1}(x)$$

(vi) โดยสูตรของบีเน็ต (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) &= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-1}(1 + \alpha^2) - \beta^{n-1}(1 + \beta^2)) \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((2a^2x^2 + b - a^2 + 1)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \right. \\
 &\quad \left. + 2ax\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \right) \\
 &= \frac{(2a^2x^2 + b - a^2 + 1)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} + \frac{2ax\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \\
 &= (2a^2x^2 + b - a^2 + 1)f_{n-1}(x) + \frac{2ax\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{n+1}(x) - (2a^2x^2 + b - a^2)f_{n-1}(x) = axl_{n-1}(x)$

และเนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 f_{n-1}(x) + f_n(x) &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^n - \beta^n) \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha^{n-1} + \alpha^n) - (\beta^{n-1} + \beta^n)) = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-1}(1 + \alpha) - \beta^{n-1}(1 + \beta)) \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left((1 + ax)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \sqrt{a^2x^2 + b - a^2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \right) \\
 &= \frac{(1 + ax)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} + \frac{\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \\
 &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) + ax \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})}{2\sqrt{a^2x^2 + b - a^2}}
 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $f_{n-1}(x) + f_n(x) = f_{n-1}(x) + ax f_{n-1}(x) + \frac{l_{n-1}(x)}{2}$ ดังนั้น $f_n(x) - ax f_{n-1}(x) = \frac{l_{n-1}(x)}{2}$

(vii) โดยสูตรของบีเน็ต (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x) + 4(a^2 - b)^n &= \frac{4(a^2x^2 + b - a^2)}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^n - \beta^n)^2 + 4(\alpha\beta)^n \\
 &= \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} + 4\alpha^n\beta^n = \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} = (\alpha^n + \beta^n)^2 = l_n^2(x)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $l_n^2(x) = 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x) + 4(a^2 - b)^n$

(viii) โดยสูตรของบีเน็ต (3) และ (4) จะได้ว่า

$$f_n(x)f_{n+1}(x) = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) - (\alpha\beta)^n(\alpha + \beta))$$

$$= \frac{1}{4(a^2x^2 + b - a^2)} (l_{2n+1}(x) - 2ax(a^2 - b)^n)$$

และ
$$l_n(x)l_{n+1}(x) = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = \alpha^{2n+1} + (\alpha^n\beta^n)(\alpha + \beta) + \beta^{2n+1}$$
$$= (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) + (\alpha + \beta)(\alpha\beta)^n = l_{2n+1}(x) + 2ax(a^2 - b)^n$$

(ix) โดยสูตรของบีเนต (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (l_n^2(x) + 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x)) \\ &= \frac{1}{2} (4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x) + 4(a^2 - b)^n + 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x)) \\ &= \frac{1}{2} (8(a^2x^2 + b - a^2)f_n^2(x) + 4(a^2 - b)^n) = 4(a^2x^2 + b - a^2) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 + 2(\alpha\beta)^n \\ &= \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = l_{2n}(x) \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4.1 ทำให้ได้สมบัติของพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ เพิ่มเติมดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.2 กำหนดให้ n, m และ r เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = -(a^2 - b)^{n-1} \\ & \text{และ} \quad l_{n+1}(x)l_{n-1}(x) - l_n^2(x) = 4(a^2x^2 + b - a^2)(a^2 - b)^{n-1} \\ \text{(ii)} \quad & f_{n-2}(x)f_{n-1}(x)f_{n+1}(x)f_{n+2}(x) - f_n^4(x) \\ &= f_n^2(x)(a^2 - b)^{n-2}(-a^2(4x^2 + 1) + b) + (4a^2x^2)(a^2 - b)^{2n-3} \\ & \text{และ} \quad l_{n-2}(x)l_{n-1}(x)l_{n+1}(x)l_{n+2}(x) - l_n^4(x) \\ &= l_n^2(x)(a^2 - b)^{n-2}((16a^4x^4 + 16a^2x^2b - 16a^4x^2) + (4a^2x^2 + 4b - 4a^2)(a^2 - b)) \\ & \quad + 64(a^2x^2)(a^2x^2 + b - a^2)^2(a^2 - b)^{2n-3} \\ \text{(iii)} \quad & f_{m+n}(x) = f_{m+1}(x)f_n(x) - (a^2 - b)f_m(x)f_{n-1}(x) \\ & \text{และ} \quad -4(a^2x^2 + b - a^2)f_{m+n}(x) = l_{m+1}(x)l_n(x) - (a^2 - b)l_m(x)l_{n-1}(x) \\ \text{(iv)} \quad & f_n(x)l_n(x) = f_{2n}(x) \\ \text{(v)} \quad & 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n(x)f_{n+1}(x) + l_n(x)l_{n+1}(x) = 2l_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

พิสูจน์

(i) เนื่องจาก $f_1(x) = 1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.1 (ii) จึงได้ว่า ถ้า $r = 1$ แล้ว

$$f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = -(a^2 - b)^{n-1} \quad \text{และ} \quad l_{n+1}(x)l_{n-1}(x) - l_n^2(x) = 4(a^2x^2 + b - a^2)(a^2 - b)^{n-1}$$

(ii) สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ r อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (ii) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
& f_{n-2}(x)f_{n-1}(x)f_{n+1}(x)f_{n+2}(x)-f_n^4(x) \\
&= (f_{n+2}(x)f_{n-2}(x)-f_n^2(x))(f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)-f_n^2(x)) \\
&\quad + f_{n+2}(x)f_{n-2}(x)f_n^2(x)+f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)f_n^2(x)-2f_n^4(x) \\
&= (-(a^2-b)^{n-2}f_n^2(x))(-(a^2-b)^{n-1}f_1^2(x)) \\
&\quad + f_n^2(x)(f_{n+2}(x)f_{n-2}(x)-f_n^2(x))+f_n^2(x)(f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)-f_n^2(x)) \\
&= (a^2-b)^{2n-3}(4a^2x^2)+f_n^2(x)(-4a^2x^2(a^2-b)^{n-2}-(a^2-b)^{n-1}) \\
&= (4a^2x^2)(a^2-b)^{2n-3}+f_n^2(x)(a^2-b)^{n-2}(-4a^2x^2-(a^2-b)) \\
&= f_n^2(x)(a^2-b)^{n-2}(-a^2(4x^2+1)+b)+(4a^2x^2)(a^2-b)^{2n-3}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
& l_{n-2}(x)l_{n-1}(x)l_{n+1}(x)l_{n+2}(x)-l_n^4(x) \\
&= (l_{n+2}(x)l_{n-2}(x)-l_n^2(x))(l_{n+1}(x)l_{n-1}(x)-l_n^2(x)) \\
&\quad + l_{n+2}(x)l_{n-2}(x)l_n^2(x)+l_{n+1}(x)l_{n-1}(x)l_n^2(x)-2l_n^4(x) \\
&= (4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^{n-2}f_2^2(x))(4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^{n-1}f_1^2(x)) \\
&\quad + l_n^2(x)(l_{n+2}(x)l_{n-2}(x)-l_n^2(x))+l_n^2(x)(l_{n+1}(x)l_{n-1}(x)-l_n^2(x)) \\
&= 16(a^2x^2+b-a^2)^2(a^2-b)^{2n-3}(2ax)^2(1)^2+l_n^2(x)(4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^{n-2}(2ax)^2) \\
&\quad + l_n^2(x)(4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^{n-1}(1)^2) \\
&= l_n^2(x)(a^2-b)^{n-2}((16a^4x^4+16a^2x^2b-16a^4x^2)+(4a^2x^2+4b-4a^2)(a^2-b)) \\
&\quad + 64(a^2x^2+b-a^2)^2(a^2-b)^{2n-3}(a^2x^2)
\end{aligned}$$

(iii) จากทฤษฎีบท 4.1 (iii) เมื่อแทน n ด้วย $-n$ จะได้ว่า

$$f_m(x)f_{-n+1}(x)-f_{-n}(x)f_{m+1}(x)=(a^2-b)^{-n}f_{m+n}(x)=\frac{1}{(a^2-b)^n}f_{m+n}(x)$$

อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (i) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
f_{m+n}(x) &= (a^2-b)^n(f_m(x)f_{-(n-1)}(x)-f_{-n}(x)f_{m+1}(x)) \\
&= (a^2-b)^n\left[\left(f_m(x)\frac{-f_{n-1}(x)}{(a^2-b)^{n-1}}\right)-\left(\frac{-f_n(x)}{(a^2-b)^n}f_{m+1}(x)\right)\right] \\
&= f_{m+1}(x)f_n(x)-(a^2-b)f_m(x)f_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

และจากทฤษฎีบท 4.1 (iii) เมื่อแทน n ด้วย $-n$ จะได้ว่า

$$l_m(x)l_{-n+1}(x)-l_{-n}(x)l_{m+1}(x)=-4(a^2x^2+b-a^2)(a^2-b)^{-n}f_{m+n}(x)=\frac{-4(a^2x^2+b-a^2)}{(a^2-b)^n}f_{m+n}(x)$$

อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (i) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
 4(a^2x^2 + b - a^2)f_{m+n}(x) &= -(a^2 - b)^n (l_m(x)l_{-(n-1)}(x) - l_{-n}(x)l_{m+1}(x)) \\
 &= -(a^2 - b)^n \left(l_m(x) \frac{l_{n-1}(x)}{(a^2 - b)^{n-1}} - \frac{l_n(x)}{(a^2 - b)^n} l_{m+1}(x) \right) \\
 &= l_{m+1}(x)l_n(x) - (a^2 - b)l_m(x)l_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

(iv) โดยสูตรของบิเนต (3) และ (4) จะได้ว่า

$$f_n(x)l_n(x) = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^n + \beta^n) = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = f_{2n}(x)$$

(v) อาศัยทฤษฎีบท 4.1 (viii) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 4(a^2x^2 + b - a^2)f_n(x)f_{n+1}(x) + l_n(x)l_{n+1}(x) \\
 = 4(a^2x^2 + b - a^2) \frac{1}{4(a^2x^2 + b - a^2)} (l_{2n+1}(x) - 2ax(a^2 - b)^n) + (l_{2n+1}(x) + 2ax(a^2 - b)^n) \\
 = l_{2n+1}(x) - 2ax(a^2 - b)^n + l_{2n+1}(x) + 2ax(a^2 - b)^n = 2l_{2n+1}(x)
 \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4.1 และบทแทรก 4.2 ทำให้ทราบเอกลักษณ์บางแบบของพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ เท่านั้น ซึ่งอาจจะยังไม่ใช้เอกลักษณ์ทั้งหมดของพหุนามดังกล่าว

5. สรุปผล

งานวิจัยฉบับนี้ได้กำหนดบทนิยามของพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ ดังบทนิยาม 1.2 ซึ่งเป็นพหุนามที่เป็นการวางนัยทั่วไปของพหุนามฟีโบนัชชีและพหุนามลูคัส ซึ่งจะได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดและสูตรของบิเนตสำหรับสองพหุนามดังกล่าว นอกจากนี้ โดยอาศัยสูตรของบิเนตจะทำให้ได้บางเอกลักษณ์เกี่ยวกับพหุนาม $f_n(x)$ และ $l_n(x)$ อีกด้วย

6. References

- [1] Bicknell, M., 1970, A primer for the Fibonacci numbers VII, Fibonacci Quarterly. 8: 407-420.
- [2] Bilgici, G., 2014, New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequence, Applied Mathematical Sciences. 8(29): 1429-1437.
- [3] Edson, M. and Yanyenie, O., 2009, A New Generalization of Fibonacci Sequences and Extended Binet's Formula, Integers. 9: 639-654.
- [4] Horadam, A. F. and Mahon, Bro. J. M., 1983, Pell and Pell-Lucas Polynomials, University of New England Armidale. Catholic Collage of Education. Sydney. Australia.
- [5] Jacobsthal, E., 1957, Über eine zahlen-theoretische Summe, Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim. 30: 35-41.