P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231
วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 30 ฉบับที่ 4 (กรกฎาคม-สิงหาคม 2565) หน้า [32-36]

สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x}+q^{2y}=z^2$ และ $p^{2x}-q^{2y}=z^2$

On the Diophantine Equations $p^{2x}+q^{2y}=z^2$ and $p^{2x}-q^{2y}=z^2$

สุธน ตาดี*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี 15000
Suton Tadee
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000
Received 18 February 2022; Received in verised 2 June 2022; Accpted 9 June 2022

บทคัดย่อ

ให้ p,q เป็นจำนวนเฉพาะ ในงานวิจัยนี้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x}+q^{2y}=z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p,q,x,y,z)=(3,2,1,2,5)$ และ ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x}-q^{2y}=z^2$ อยู่ในรูป $(p,q,x,y,z)\in\{(4^{n-1}+1,2,1,n,4^{n-1}-1):\ n\in\mathbb{Z}^+-\{1\}\}\cup\{(p,q,m,\log_q\sqrt{2p^m-1},p^m-1):\ m,\log_q\sqrt{2p^m-1}\in\mathbb{Z}^+\}$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์; ผลเฉลยจำนวนเต็ม; ข้อคาดการณ์ของคาตาลาน

Abstract

Let p,q be prime numbers. In this paper, we prove that the Diophantine equation $p^{2x}+q^{2y}=z^2$ has a unique positive integer solution, that is $(p,q,x,y,z)=(3,2,1,2,5)$. We also show that all positive integer solutions of the Diophantine equation $p^{2x}-q^{2y}=z^2$ are of the following $(p,q,x,y,z)\in\{(4^{n-1}+1,2,1,n,4^{n-1}-1):\ n\in\mathbb{Z}^+-\{1\}\}\cup\{(p,q,m,\log_q\sqrt{2p^m-1},p^m-1):\ m,\log_q\sqrt{2p^m-1}\in\mathbb{Z}^+\}$.

Keywords: Diophantine equation; Integer solution; Catalan's conjecture

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** suton.t@lawasri.tru.ac.th
doi: 10.14456/tstj.2022.39

1. บทนำ

การศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ได้รับความสนใจอย่างแพร่หลาย เช่น ในปี ค.ศ. 2007 Acu [1] ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3,0,3), (2,1,3)\}$ ต่อมา Chotchaisthit [6] ได้ค้นพบผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^{2x} + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ หลังจากนั้น Bacani และ Rabago [2] ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p - q = 2$ มีจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนอนันต์ ในปีถัดมา Rabago [9] ได้แสดงว่า (3,1,5), (5, 1 ,7), (6, 1, 9), (7, 3, 71) และ (9,1,23) เป็นผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ ต่อมา Burshtein [3] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ โดยที่ $p - q = 2$, 4, 6, 8 และในปี ค.ศ. 2019 Kumar และคณะ [7] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 12)^y = z^2$ เมื่อ $p, p + 12$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p = 6n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ต่อมา Burshtein [4] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + p^y = z^2$ และ $p^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และในปี ค.ศ. 2021 Burshtein [5] ได้ค้นพบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $p^4 + q^y = z^4$ และ $p^4 - q^y = z^4$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน ในปีเดียวกัน Sandhya และ Pandichelvi [10] ได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^x + (p + 1)^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ มีจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเป็นจำนวนอนันต์ Tangjai และ Chubthaisong [11] ได้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 2 \pmod 3$ ในขณะเดียวกัน Thongnak และคณะ [12] ได้พบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ (0,0,0)

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ และ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$ เมื่อ p,q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งในการพิจารณาผลเฉลยของสมการทั้งสองต้องอาศัยข้อคาดการณ์ของคาตาลาน (Catalan’s conjecture) มาประกอบด้วย

ทฤษฎีบท 1 ([8]) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3,2,2,3)$ เมื่อ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็ม และ $\min \{a, b,x,y\} > 1$

2. สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$

ในการศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ เมื่อ p,q เป็นจำนวนเฉพาะจะแยกพิจารณาดังนี้ กรณีที่ 1. $p = q$ กรณีที่ 2. $p \neq 2$ และ $q = 2$ และกรณีที่ 3. $p \neq 2, q \neq 2$ และ $p \neq q$ โดยการพิสูจน์บทตั้ง ต่อไปนี้

บทตั้ง 2 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + p^{2y} = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ ในทฤษฎีบท 2.1 และ 3.1 ([4]) ■

บทตั้ง 3 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$p^{2x} + 2^{2y} = z^2 \tag{1}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, x, y, z) = (3, 1, 2, 5)$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของ (1) จะได้ว่า

$$(z - 2^y)(z + 2^y) = p^{2x} \tag{2}$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ที่ทำให้

$$z-2^y = p^u \tag{3}$$
และ $$Z+2^y = p^{2x-u} \tag{4}$$
จาก (3) และ (4) จะได้ว่า $x > u$ และ
$$2^{y+1} = p^u(p^{2x-2u}-1) \tag{5}$$
เนื่องจาก $p \neq 2$ และ (5) จะได้ว่า $u = 0$ และ
$$p^{2x}-2^{y+1}=1 \tag{6}$$
จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $p = 3, x = 1$ และ $y = 2$ และจาก (3) จะได้ว่า $z = 5$ เพราะฉะนั้น (1) มีผลเฉลยเดียว คือ $(p,x,y,z) = (3, 1, 2, 5)$ ■

บทตั้ง 4 ให้ p, q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ โดยที่ $p \neq q$ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์
$$p^{2x}+ q^{2y} = z^2 \tag{7}$$
ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของ (7)
$$(z-q^y)(z+q^y)=p^{2x} \tag{8}$$
ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ที่ทำให้
$$z - q^y = p^v \tag{9}$$
และ $$z + q^y = p^{2x-v} \tag{10}$$
จาก (9) และ (10) จะได้ว่า $x > v$ และ
$$2 \,.\, q^y = p^v(p^{2x-2v} - 1) \tag{11}$$
เนื่องจาก $v \neq 0$ และ $2x - 2v \neq 0$ จะได้ว่า $\gcd(p^v, p^{2x-2v} - 1) = 1$ และจาก $q \neq 2$ ดังนั้น $\gcd(2, q^y) = 1$ เพราะฉะนั้นจาก (11) จะได้ว่า $2 = p^v$ หรือ $2 = p^{2x-2v} - 1$ จะเห็นว่า ถ้า $2 = p^v$ ดังนั้น $p = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ และถ้า $2 = p^{2x-2v} - 1$ จะได้ว่า $2x - 2v = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน เพราะฉะนั้น (7) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ■

จากบทตั้ง 2 - 4 สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5 ให้ p,q เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, q, x, y, z) = (3,2, 1,2,5)$

หมายเหตุ สำหรับสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ จะถือว่า (3, 2, 1, 2, 5) และ (2, 3, 2, 1, 5) เป็นผลเฉลยเดียวกัน

3. สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$

ในหัวข้อนี้จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$ เมื่อ p,q เป็นจำนวนเฉพาะ จะแยกพิจารณาดังนี้ กรณีที่ 1. $p = q$ กรณีที่ 2. $p \neq 2$ และ $q = 2$ กรณีที่ 3. $p = 2$ และ $q \neq 2$ กรณีที่ 4. $p \neq 2, q \neq 2$ และ $p \neq q$ โดยการพิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 6 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - p^{2y} = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ ในทฤษฎีบท 4.1 และ 5.1 ([4]) ■

บทตั้ง 7 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์
$$p^{2x}-2^{2y} = z^2 \tag{12}$$
อยู่ในรูป $(p, x, y, z) \in \{(4^{n-1} + 1, 1, n, 4^{n-1} -1) : n \in \mathbb{Z}^+-\{1\}\}$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของ (12) จะได้ว่า
$$(p^x-z)(p^x+z)= 2^{2y} \tag{13}$$
ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ที่ทำให้
$$p^x - z = 2^u \tag{14}$$
และ $$p^x + z = 2^{2y-u} \tag{15}$$
จาก (14) และ (15) จะได้ว่า $y > u$ และ
$$2 \cdot p^x = 2^u(2^{2y-2u} + 1) \tag{16}$$
เนื่องจาก $p \neq 2$ และ (16) จะได้ว่า $u = 1$ และ
$$p^x - 2^{2y-2} = 1 \tag{17}$$
จะได้ว่า $2y - 2 > 1$ และสำหรับกรณี $x > 1$ จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $2y - 2 = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $x = 1$ และจาก (17) จะได้ว่า $p = 4^{y-1} + 1$ และจาก (14) จะได้ว่า $z = 4^{y-1} - 1$

เพราะฉะนั้น $(p, x, y, z) = (4^{n-1} + 1, 1, n, 4^{n-1} - 1)$ เมื่อ $n \neq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $4^{n-1} + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ■

ตัวอย่าง 1 จากบทตั้ง 7 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - 2^{2y} = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น (5, 1, 2, 3), (17, 1, 3, 15), (257, 1, 5, 255) เป็นต้น

บทตั้ง 8 ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์

$$2^{2x}-q^{2y} = z^2 \tag{18}$$

ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของ (18) จะได้ว่า

$$(2^x - z)(2^x + z) = q^{2y} \tag{19}$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ v ที่ทำให้

$$2^x - z = q^v \tag{20}$$

และ

$$2^x + z = q^{2y-v} \tag{21}$$

จาก (20) และ (21) จะได้ว่า $y > v$ และ

$$2^{x+1} = q^v\,(q^{2y-2v} + 1) \tag{22}$$

เนื่องจาก $q \neq 2$ และ (22) จะได้ว่า $v = 0$ และ

$$2^{x+1} - q^{2y} = 1 \tag{23}$$

จากทฤษฎีบท 1 ดังนั้น (23) ไม่มีผลเฉลย นั่นคือ (18) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ■

บทตั้ง 9 ให้ p,q เป็นจำนวนเฉพาะคี่ โดยที่ $p \neq q$ จะได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์

$$p^{2x} - q^{2y} = z^2 \tag{24}$$

อยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) \in \left\{\left(p, q, m, \log_q\sqrt{2p^m - 1}, p^m - 1\right) : m,\ \log_q\sqrt{2p^m - 1} \in \mathbb{Z}^+\right\}$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นผลเฉลยของ (24) จะได้ว่า

$$(p^x - z)(p^x + z) = q^{2y} \tag{25}$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ w ที่ทำให้

$$p^x - z = q^w \tag{26}$$

และ

$$p^x + z = q^{2y-w} \tag{27}$$

จาก (26) และ (27) จะได้ว่า $y > w$ และ

$$2 \cdot p^x = q^w(q^{2y-2w}+1) \tag{28}$$

กรณี 1 $w = 0$ จาก (26) และ (28) จะได้ว่า $z = p^x - 1$ และ $y = \log_q\sqrt{2p^x - 1}$
ดังนั้น ผลเฉลยของ (24) อยู่ในรูป $(p, q, x, y, z) = \left(p, q, m, \log_q\sqrt{2p^m - 1}, p^m - 1\right)$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\log_q\sqrt{2p^m - 1}$ เป็นจำนวนเต็ม
กรณี 2 $w > 0$ จะได้ว่า $\gcd(q^w, q^{2y-2w} + 1) = 1$ และจาก $p \neq 2$ ดังนั้น $\gcd(2, p^x) = 1$ เพราะฉะนั้นจาก (28) จะได้ว่า $2 = q^w$ หรือ $2 = q^{2y-2w} + 1$ ถ้า $2 = q^w$ จะได้ว่า $q = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $2 = q^{2y-2w} + 1$ และจาก (28) จะได้ว่า $p^x = q^w$ และจาก $p \neq q$ จะได้ว่า $x = w = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน นั่นคือในกรณีนี้ (24) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก ■

ตัวอย่าง 2 จากบทตั้ง 9 จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น (41, 3, 1, 2, 40), (5, 3, 1, 1, 4), (5, 7, 2, 1, 24) เป็นต้น

จากบทตั้ง 6 - 9 สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 10 ให้ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$ อยู่ในรูป (p, q, x, y, z)
$\in \{(4^{n-1} + 1, 2, 1, n, 4^{n-1} - 1) : n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}\} \cup \left\{\left(p, q, m, \log_q\sqrt{2p^m - 1}, p^m - 1\right) : m, \log_q\sqrt{2p^m - 1} \in \mathbb{Z}^+\right\}$

4. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาและหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ และ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$ เมื่อ p,q เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} + q^{2y} = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(p, q, x, y, z) = (3, 2, 1, 2, 5)$ และผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $p^{2x} - q^{2y} = z^2$ อยู่ในรูป $(p, q. x, y, z)$ $\in \{(4^{n-1}+1, 2, 1, n, 4^{n-1}-1) : n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}\} \cup \{(p, q, m, \log_q\sqrt{2p^m-1}, p^m-1) : m, \log_q\sqrt{2p^m-1} \in \mathbb{Z}^+\}$

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

6. References

[1] Acu,D., 2007, On a Diophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$. General Mathematics. 15(4): 145 - 148.

[2] Bacani, J. B. and Rabago, J. F. T., 2015, The Complete Set of Solutions of the Diophantine Equation $p^x + q^y = z^2$ for twin primes p and q. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 104(4): 517 - 521.

[3] Burshtein, N., 2017, On Solutions of the Diophantine Equation $p^x + q^y = z^2$. Annals of Pure and Applied Mathematics. 13(1): 143 - 149.

[4] Burshtein,N., 2019, All the Solutions of the Diophantine Equations $p^x + p^y = z^2$ and $p^x - p^y = z^2$ when $p \geq 2$ is Prime. Annals of Pure and Applied Mathematics. 19(2): 111 - 119.

[5] Burshtein, N., 2021, All the Solutions of the Diophantine Equations $p^4 + q^y = z^2$ and $p^4 - q^y = z^2$ when p, q are Distinct Primes. Annals of Pure and Applied Mathematics. 23(1): 17 - 20.

[6] Chotchaisthit, S., 2012, On the Diophantine Equation $4^x + p^y = z^2$ where p is a prime number. American Journal of Mathematics and Sciences. 1(1): 191 - 193.

[7] Kumar, S., Gupta, D. and Kishan, H., 2019, On the Solutions of Exponential Diophantine Equation $p^x + (p+12)^y = z^2$. International Transactions in Mathematical Sciences and Computers. 11(1): 1 - 19.

[8] Mihailescu, P., 2004, Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture. Journal fur die Reine und Angewante Mathematik. 27: 167 - 195.

[9] Rabago, J. F. T., 2016, On the Diophantine Equation $2^x + 17^y = z^2$. Journal of the Indonesian Mathematical Society. 22(2): 85 - 88.

[10] Sandhya, P. and Pandichelvi, V., 2021, Exploration of Solutions for an Exponential Diophantine Equation $p^x + (p+1)^y = z^2$. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education. 12(1S): 659-662.

[11] Tangjai, W. and Chubthaisong, C., 2021, On the Diophantine Equation $3^x + p^y = z^2$ where $p \equiv 2 \pmod 3$. WSEAS Transactions on Mathematics. 20: 283 - 287.

[12] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T., 2021, The Solution of the Exponential Diophantine Equation $7^x - 5^y = z^2$. Mathematical Journal by the Mathematical Association of Thailand under the Patronage of His Majesty the King. 66(703): 62 - 67.