P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 31 ฉบับที่ 2 (มีนาคม-เมษายน 2566) หน้า [14-24]

การแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน
f-derivations of Weak AB-algebras

ปุณชญา พัฒนางกูร*, ถิรายุ อมฤตนทีธร, ดนัย เขียวหวาน, ทอฝัน ห้องแสง
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Poonchayar Patthanangkoor*, Thirayu Ammaritnateetorn, Danai Kiewwan, Torphan Hongsaeng
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120
Received 13 January 2023; Received in revised 19 April 2023; Accepted 25 April 2023

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้ได้นำเสนอโครงสร้างและศึกษาสมบัติต่างๆ ของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน

คำสำคัญ: พีชคณิต AB อย่างอ่อน; AB-อันตรสัณฐาน; การแปลง f

Abstract

In this paper, we introduce the notions of f-derivations of weak AB-algebras, and investigate their basic properties.

Keywords: Weak AB-algebra; AB-endomorphism; f-derivation

1. บทนำ

จากการศึกษาผลงานวิจัยเรื่องไอดีล AB ของพีชคณิต AB ซึ่งเป็นผลงานวิจัยของ A.T. Hameed และ B.N. Abbas เมื่อปี ค.ศ. 2017 ทำให้ทราบถึงบทนิยาม โครงสร้าง และสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิต AB นอกจากนี้ ยังทำให้ทราบถึงบทนิยาม โครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิตย่อย AB และไอดีล AB อีกด้วย ซึ่งในปีเดียวกันนี้ A.T. Hameed และ B.N. Abbas ก็ยังได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของไอดีล AB ของพีชคณิต AB เพิ่มเติม และศึกษาเกี่ยวกับไอดีลวิภัชนัย AB (fuzzy AB-ideal) ของพีชคณิต AB อีกด้วย ซึ่งในผลงานวิจัยของ A.T. Hameed และ B.N. Abbas ดังกล่าวได้ให้บทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 1.1</u> กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $0 \in X$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก $(X;*,0)$ ว่า *พีชคณิต AB อย่างอ่อน* (*weak*

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th **doi:** 10.14456/tstj.2023.12

Science31N2-D.indd 14 8/5/2566 BE 11:24

AB-algebra) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(i) $\big((x*y)*(z*y)\big) \le (x*z)$

(ii) $x \le x$

และ (iii) $x*0 = x$

เมื่อความสัมพันธ์ $\le$ บน X กำหนดโดย $x \le y$ ก็ต่อเมื่อ $x*y = 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

<u>บทตั้ง 1.2</u> (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) ถ้า $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน แล้ว

(1) ถ้า $x \le y$ แล้ว $x*z \le y*z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

และ (2) ถ้า $x \le y$ แล้ว $z*y \le z*x$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

<u>บทนิยาม 1.3</u> กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะเรียก $a \in X$ ว่า *อะตอม (atom)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in X$ ถ้า $x \le a$ แล้ว $x = 0$ หรือ $x = a$ และจะเขียนแทนเซตของอะตอมทั้งหมดของ X ด้วย $A(X)$ กล่าวคือ $A(X) = \{a \in X \mid a$ เป็นอะตอมของ $X\}$

<u>บทนิยาม 1.4</u> กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ a เป็นอะตอมของ X จะเรียกเซต $B(a) = \{x \in X \mid a \le x\}$ ว่าเป็น *กิ่ง (branch)* ของ X และจะเรียกสมาชิก a ว่า *สมาชิกเริ่มต้น (initial element)* สำหรับ $B(a)$

หมายเหตุ: เนื่องจาก $a \le a$ ดังนั้น $a \in B(a)$ นั่นคือ $B(a) \neq \varnothing$

<u>บทนิยาม 1.5</u> กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ a เป็นอะตอมของ X

จะเรียก $B(a)$ ว่าเป็น *กิ่งไม่แท้ (improper branch)* ก็ต่อเมื่อ มี $b \in X$ โดยที่ b เป็นอะตอมของ X และ $b \neq a$ ที่ซึ่ง $B(a) \subset B(b)$

จะเรียก $B(a)$ ว่าเป็น *กิ่งแท้ (proper branch)* ก็ต่อเมื่อ ไม่มีอะตอม $b \in X$ โดยที่ $b \neq a$ ที่ทำให้ $B(a) \subset B(b)$

และจะเขียนแทนเซตของสมาชิกเริ่มต้นสำหรับกิ่งแท้ทั้งหมดของ X ด้วย $I(X)$ กล่าวคือ $I(X) = \{a \in X \mid B(a)$ เป็นกิ่งแท้ของ $X\}$

หมายเหตุ: $I(X) \subset A(X)$ ทั้งนี้เพราะว่าถ้า $a \in I(X)$ แล้ว $B(a)$ เป็นกิ่งแท้ของ X จึงได้ว่า a เป็นอะตอม นั่นคือ $a \in A(X)$

<u>บทนิยาม 1.6</u> กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่า *พีชคณิตย่อย AB อย่างอ่อน (weak AB-subalgebra)* ของ X ก็ต่อเมื่อ $x*y \in S$ สำหรับทุก $x, y \in S$

กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และให้ $\phi : X \to X$ เป็นฟังก์ชัน ที่กำหนดโดย

$$\phi(x) = 0*x \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

จะได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 1.7</u> (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

Science31N2-D.indd 15 8/5/2566 BE 11:24

(1) $\phi^2(x) \le x$

(2) ถ้า $x \le y$ แล้ว $\phi(x) = \phi(y)$

(3) $\phi^3(x) = \phi(x)$

และ (4) $\phi^2(x*y) = \phi^2(x) * \phi^2(y)$

ทฤษฎีบท 1.8 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า $I(X) = \phi(X) = \{x \in X \mid \phi^2(x) = x\}$

บทแทรก 1.9 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า $I(X)$ เป็นพีชคณิตย่อย AB ของ X

บทตั้ง 1.10 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า

(1) ถ้า $x, y \in X$ แล้ว x และ y เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $x*y \in B(0)$

(2) $B(a)*B(b) = B(a*b)$ สำหรับทุก $a, b \in I(X)$

บทนิยาม 1.11 กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะเรียก X ว่าเป็น *พีชคณิตสมบูรณ์ (solid algebra)* ก็ต่อเมื่อถ้า $x, y \in X$ โดยที่ x และ y เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน แล้ว $(x*y)*z = (x*z)*y$ สำหรับทุก $z \in X$

ทฤษฎีบท 1.12 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน และ $x, y \in X$ ถ้า X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ แล้วจะได้ว่า $x*(x*(x*y)) = x*y$ เมื่อ x และ y เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน

บทแทรก 1.13 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์และ $a \in A(X)$ จะได้ว่า ถ้า $x, y \in B(a)$ แล้ว $x*(x*y) \in B(a)$ และ $y*(y*x) \in B(a)$

ทฤษฎีบท 1.14 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ และ $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

(i) ถ้า $x*y$ และ $x*z$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน แล้ว $(x*y)*(x*z) \le (z*y)$

และ (ii) ถ้า $x*y$ และ $z*y$ เป็นสมาชิกในกึ่งเดียวกัน แล้ว $(x*y)*(x*z) \le (z*y)$

บทนิยาม 1.15 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $0 \in X$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X จะเรียก ว่า $(X;*,0)$ *พีชคณิต AB (AB-algebra)* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

$(AB_1): ((x*y)*(z*y))*(x*z) = 0$

$(AB_2): 0*x = 0$

และ $(AB_3): x*0 = x$

ซึ่งจะเรียก 0 ว่าค่าคงตัวของการดำเนินการ $*$

ทฤษฎีบท 1.16 (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in X$

Science31N2-D.indd 16 8/5/2566 BE 11:24

(i) $x*x=0$

(ii) $(x*y)*x=0$

(iii) $0*x=0*y$

หมายเหตุ: ถ้า $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB แล้ว $(X;*,0)$ จะเป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน

<u>บทนิยาม 1.17</u> กำหนดให้ $(X;*,0)$ และ $(Y;*',0')$ เป็นพีชคณิต AB (หรือพีชคณิต AB อย่างอ่อน) จะเรียก $f:X\to Y$ ว่า *สาทิสสัณฐานบนพีชคณิต AB* หรือ *AB-สาทิสสัณฐาน (AB-homomorphism)* ก็ต่อเมื่อ $f(x*y)=f(x)*'f(y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$ และถ้า $f:X\to X$ เป็น AB-สาทิสสัณฐาน แล้วจะกล่าวว่า f เป็น *AB-อันตรสัณฐาน (AB-endomorphism)*

<u>บทนิยาม 1.18</u> กำหนดให้ $f:X\to Y$ เป็น AB-สาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X;*,0)$ และ $(Y;*',0')$ เป็นพีชคณิต AB (หรือพีชคณิต AB อย่างอ่อน)

จะกล่าวว่า f เป็น *AB-โมโนมอร์ฟิซึม (AB-monomorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จะกล่าวว่า f เป็น *AB-อิพิมอร์ฟิซึม (AB-epimorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

และ จะกล่าวว่า f เป็น *AB-สมสัณฐาน (AB-isomorphism)* ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ในกรณีนี้ที่มีฟังก์ชัน AB-สมสัณฐาน $f:X\to Y$ จะกล่าวว่า X *สมสัณฐาน (isomorphic)* กับ Y และเขียนแทนด้วย $X\cong Y$

<u>ทฤษฎีบท 1.19</u> (Hameed, A.T. & Abbas, B.N., 2017) กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จะได้ว่า ϕ เป็น AB-อันตรสัณฐาน

ต่อมาในปี ค.ศ. 2018 ได้เกิดผลงานวิจัยของ A.T. Hameed และ B.N. Abbas อีกชิ้นหนึ่ง โดยผลงานวิจัยชิ้นนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติบางประการของไอดีลวิภัชนัย AB ของพีชคณิต AB จากนั้นในปี ค.ศ. 2019 R.D. Bejarasco และ N.C. Gonzaga ก็ได้ศึกษาเกี่ยวกับสาทิสสัณฐานบนพีชคณิต AB และได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 1.20</u> (Bejarasco, R.D. & Gonzaga, N.C., 2019) กำหนดให้ $f:X\to Y$ เป็น AB-สาทิสสัณฐาน เมื่อ $(X;*,0)$ และ $(Y;*',0')$ เป็นพีชคณิต AB (หรือพีชคณิต AB อย่างอ่อน) จะได้ว่า

(i) $f(0)=0'$

(ii) ถ้า $x\le y$ แล้ว $f(x)\le f(y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

(iii) ถ้า $z\le y$ แล้ว $f(x*y)\le f(x*z)$ สำหรับทุก $x,y,z\in X$

จากผลงานวิจัยต่าง ๆ เกี่ยวกับพีชคณิต AB อย่างอ่อนข้างต้น จะเห็นว่ายังมีสมบัติอื่น ๆ ของพีชคณิต AB อย่างอ่อนที่น่าสนใจที่จะศึกษาเพิ่มเติม ซึ่งบทความวิจัยนี้จะทำการศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน

2. ผลงานวิจัย (Main Results)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อน พร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของการแปลง f ของพีชคณิต AB อย่างอ่อนอีกด้วย

Science31N2-D.indd 17 8/5/2566 BE 11:24

<u>บทนิยาม 2.1</u> กำหนดให้ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f:X\to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน ถ้า $d_f:X\to X$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว

จะเรียก d_f ว่า การแปลง f *แบบซ้าย-ขวา (left-right-f-derivation)* ของ X ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d_f(x*y)=\big(d_f(x)*f(y)\big)\wedge\big(f(x)*d_f(y)\big)$$

สำหรับทุก $x,y\in X$

จะเรียก d_f ว่า การแปลง f *แบบขวา-ซ้าย (right- left-f-derivation)* ของ X ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$d_f(x*y)=\big(f(x)*d_f(y)\big)\wedge\big(d_f(x)*f(y)\big)$$

สำหรับทุก $x,y\in X$

และจะเรียก d_f ว่า *การแปลง f (f-derivation)* ของ X ก็ต่อเมื่อ d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาของ X และ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X เมื่อ $x\wedge y=y*(y*x)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

นอกจากนี้ ถ้า $d_f(0)=0$ แล้วจะเรียก d_f ว่า *ปรกติ (regular)*

<u>ตัวอย่าง:</u> กำหนดให้ $X=\{0,1,2,3\}$ และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต X ดังตารางต่อไปนี้

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

จะได้ว่า $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน

กำหนดให้ $f:X\to X$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x)=x$ สำหรับทุก $x\in X$

จะได้ว่า $f(x*y)=x*y=f(x)*f(y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

ดังนั้น f เป็น AB-อันตรสัณฐาน

กำหนดให้ $d_f:X\to X$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$d_f(x)=\begin{cases}0 & ;x\in\{0,1,3\}\\ 2 & ;x=2\end{cases}$$

เนื่องจาก $d_f(1*1)=d_f(0)=0,$

$$\big(d_f(1)*f(1)\big)\wedge\big(f(1)*d_f(1)\big)=(0*1)\wedge(1*0)=0\wedge1=1*(1*0)=1*1=0$$

และ $$\big(f(1)*d_f(1)\big)\wedge\big(d_f(1)*f(1)\big)=(1*0)\wedge(0*1)=1\wedge0=0*(0*1)=0*0=0$$

ดังนั้น $$d_f(1*1)=\big(d_f(1)*f(1)\big)\wedge\big(f(1)*d_f(1)\big)=\big(f(1)*d_f(1)\big)\wedge\big(d_f(1)*f(1)\big)$$

เนื่องจาก $d_f(1*2)=d_f(1)=0,$

$$\big(d_f(1)*f(2)\big)\wedge\big(f(1)*d_f(2)\big)=(0*2)\wedge(1*0)=0\wedge1=1*(1*0)=1*1=0$$

และ $$\big(f(1)*d_f(2)\big)\wedge\big(d_f(1)*f(2)\big)=(1*0)\wedge(0*2)=1\wedge0=0*(0*1)=0*0=0$$

Science31N2-D.indd 18 8/5/2566 BE 11:24

ดังนั้น $d_f(1*2)=\left(d_f(1)*f(2)\right)\wedge\left(f(1)*d_f(2)\right)=\left(f(1)*d_f(2)\right)\wedge\left(d_f(1)*f(2)\right)$

เนื่องจาก $d_f(1*3)=d_f(0)=0,$

$$\left(d_f(1)*f(3)\right)\wedge\left(f(1)*d_f(3)\right)=\left(0*3\right)\wedge\left(1*0\right)=0\wedge 1=1*(1*0)=1*1=0$$

และ $$\left(f(1)*d_f(3)\right)\wedge\left(d_f(1)*f(3)\right)=\left(1*0\right)\wedge\left(0*3\right)=1\wedge 0=0*(0*1)=0*0=0$$

ดังนั้น $d_f(1*3)=\left(d_f(1)*f(3)\right)\wedge\left(f(1)*d_f(3)\right)=\left(f(1)*d_f(3)\right)\wedge\left(d_f(1)*f(3)\right)$

เนื่องจาก $d_f(2*1)=d_f(2)=2,$

$$\left(d_f(2)*f(1)\right)\wedge\left(f(2)*d_f(1)\right)=\left(2*1\right)\wedge\left(2*0\right)=2\wedge 2=2*(2*2)=2*0=2$$

และ $$\left(f(2)*d_f(1)\right)\wedge\left(d_f(2)*f(1)\right)=\left(2*0\right)\wedge\left(2*1\right)=2\wedge 2=2*(2*2)=2*0=2$$

ดังนั้น $d_f(2*1)=\left(d_f(2)*f(1)\right)\wedge\left(f(2)*d_f(1)\right)=\left(f(2)*d_f(1)\right)\wedge\left(d_f(2)*f(1)\right)$

เนื่องจาก $d_f(3*1)=d_f(3)=0,$

$$\left(d_f(3)*f(1)\right)\wedge\left(f(3)*d_f(1)\right)=\left(0*1\right)\wedge\left(3*0\right)=0\wedge 3=3*(3*0)=3*3=0$$

และ $$\left(f(3)*d_f(1)\right)\wedge\left(d_f(3)*f(1)\right)=\left(3*0\right)\wedge\left(0*1\right)=3\wedge 0=0*(0*3)=0*0=0$$

ดังนั้น $d_f(3*1)=\left(d_f(3)*f(1)\right)\wedge\left(f(3)*d_f(1)\right)=\left(f(3)*d_f(1)\right)\wedge\left(d_f(3)*f(1)\right)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $d_f\left(x*y\right)=\left(d_f\left(x\right)*f\left(y\right)\right)\wedge\left(f\left(x\right)*d_f\left(y\right)\right)$

และ $d_f\left(x*y\right)=\left(f\left(x\right)*d_f\left(y\right)\right)\wedge\left(d_f\left(x\right)*f\left(y\right)\right)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

ดังนั้น d_f เป็นการแปลง f ของ X และเนื่องจาก $d_f(0)=0$ จึงได้ว่า d_f เป็นการแปลง f แบบปรกติของ X

<u>ทฤษฎีบท 2.2</u> กำหนดให้ $\left(X;*,0\right)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน ถ้า $f:X\to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐานของ X แล้ว f เป็นการแปลง แบบปรกติของ X

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ $f:X\to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐานของ X และ $x,y\in X$

จะได้ว่า $f(0)=0$ และ

$$\begin{aligned}\left(f\left(x\right)*f\left(y\right)\right)\wedge\left(f\left(x\right)*f\left(y\right)\right)&=f\left(x*y\right)\wedge f\left(x*y\right)\\&=f\left(x*y\right)*\left(f\left(x*y\right)*f\left(x*y\right)\right)\\&=f\left(x*y\right)*0\\&=f\left(x*y\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นการแปลง f แบบปรกติของ X □

Science31N2-D.indd 19 8/5/2566 BE 11:24

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ $d_f : X \to X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f : X \to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน จะได้ว่า

(1) ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาที่เป็นปรกติของ X แล้ว

$$d_f(x) = d_f(x) \wedge f(x) \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

(2) ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X แล้ว $d_f(x) = f(x) \wedge d_f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X

พิสูจน์ (1) สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาที่เป็นปรกติของ X และ $x \in X$ จะได้ว่า

$d_f(x*y) = (d_f(x)*f(y)) \wedge (f(x)*d_f(y))$ สำหรับทุก $y \in X$ และ $d_f(0) = 0$

ดังนั้น $d_f(x) = d_f(x*0)$

$$\begin{aligned} &= (d_f(x)*f(0)) \wedge (f(x)*d_f(0)) \\ &= (d_f(x)*0) \wedge (f(x)*0) \\ &= d_f(x) \wedge f(x) \end{aligned}$$

(2) สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X จะได้ว่า

$d_f(x*y) = (f(x)*d_f(y)) \wedge (d_f(x)*f(y))$ สำหรับทุก $x, y \in X$

สมมติให้ $d_f(x) = f(x) \wedge d_f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $d_f(0) = f(0) \wedge d_f(0)$

$$\begin{aligned} &= d_f(0)*(d_f(0)*f(0)) \\ &= d_f(0)*d_f(0) = 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X

ในทางกลับกัน สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X และ $x \in X$

ดังนั้น $d_f(0) = 0$ และจะได้ว่า $d_f(x) = d_f(x*0)$

$$\begin{aligned} &= (f(x)*d_f(0)) \wedge (d_f(x)*f(0)) \\ &= (f(x)*0) \wedge (d_f(x)*0) \\ &= f(x) \wedge d_f(x) \end{aligned}$$

□

Science31N2-D.indd 20 8/5/2566 BE 11:24

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ $f : X \to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน เมื่อ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อน จะได้ว่า

(1) ถ้า f เป็น AB-สมสัณฐาน และ $a \in A(X)$ แล้ว $f(a) \in A(X)$

(2) ถ้า $a \in I(X)$ แล้ว $f(a) \in I(X)$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ f เป็น AB-สมสัณฐาน และ $a \in A(X)$ และให้ $y \in X$ โดยที่ $y \le f(a)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้นจะมี $x \in X$ ที่ซึ่ง $y = f(x)$

จะได้ว่า $f(x) \le f(a)$

นั่นคือ $f(x) * f(a) = f(x * a) = 0$

เนื่องจาก $f(0) = 0$ จึงได้ว่า $f(x * a) = f(0)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $x * a = 0$ นั่นคือ $x \le a$

จาก $a \in A(X)$ จะได้ว่า $x = 0$ หรือ $x = a$

ดังนั้น $y = f(x) = f(0) = 0$ หรือ $y = f(x) = f(a)$

เพราะฉะนั้น $f(a) \in A(X)$

(2) สมมติให้ $a \in I(X)$

โดยทฤษฎีบท 1.8 จะได้ว่า $a = \phi^2(a) = \phi(\phi(a)) = \phi(0 * a) = 0 * (0 * a)$

ดังนั้น $f(a) = f(0 * (0 * a)) = f(0) * f(0 * a) = f(0) * (f(0) * f(a))$

$$= 0 * (0 * f(a)) = 0 * \phi(f(a)) = \phi(\phi(f(a))) = \phi^2(f(a))$$

โดยทฤษฎีบท 1.8 จึงสรุปได้ว่า $f(a) \in I(X)$ □

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ $d_f : X \to X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f : X \to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ และ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X หรือเป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาของ X จะได้ว่า ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบปรกติของ X แล้ว $f(x)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกิ่งเดียวกัน สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ กำหนดให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายของ X

สมมติให้ d_f เป็นการแปลง f แบบปรกติของ X และ $x \in X$

จะได้ว่า $0 = d_f(x * x) = \left(f(x) * d_f(x)\right) \wedge \left(d_f(x) * f(x)\right)$

$$= \left(d_f(x) * f(x)\right) * \left(\left(d_f(x) * f(x)\right) * \left(f(x) * d_f(x)\right)\right)$$

ดังนั้น $d_f(x) * f(x) \le \left(d_f(x) * f(x)\right) * \left(f(x) * d_f(x)\right)$

โดยบทตั้ง 1.2 (1) จะได้ว่า

Science31N2-D.indd 21 8/5/2566 BE 11:24

$$0=\left(d_f(x)*f(x)\right)*\left(d_f(x)*f(x)\right)\le\left(\left(d_f(x)*f(x)\right)*\left(f(x)*d_f(x)\right)\right)*\left(d_f(x)*f(x)\right)$$

เนื่องจาก X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จึงได้ว่า

$$\left(\left(d_f(x)*f(x)\right)*\left(f(x)*d_f(x)\right)\right)*\left(d_f(x)*f(x)\right)$$

$$=\left(\left(d_f(x)*f(x)\right)*\left(d_f(x)*f(x)\right)\right)*\left(f(x)*d_f(x)\right)$$

$$=0*\left(f(x)*d_f(x)\right)$$

ดังนั้น $0\le 0*\left(f(x)*d_f(x)\right)$ และโดยทฤษฎีบท 1.7 จะได้ว่า

$$0=0*\left(0*\left(f(x)*d_f(x)\right)\right)=\phi^2\left(f(x)*d_f(x)\right)\le f(x)*d_f(x)$$

ทำให้ได้ว่า $f(x)*d_f(x)\in B(0)$ โดยบทตั้ง 1.10 จึงได้ว่า $f(x)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกิ่งเดียวกัน

ในทำนองเดียวกัน ถ้า d_f แป็นการแปลง f แบบซ้าย-ขวาที่เป็นปรกติของ X แล้ว $f(x)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกิ่งเดียวกัน □

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดให้ $d_f:X\to X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f:X\to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จะได้ว่า ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X แล้ว $d_f\left(B(a)\right)\subseteq B\left(f(a)\right)$ สำหรับทุก $a\in I(X)$

พิสูจน์ กำหนดให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X และ $a\in I(X)$

จากทฤษฎีบท 2.4 (2) จะได้ว่า $f(a)\in I(X)$

สมมติให้ $x\in B(a)$ จะได้ว่า $a\le x$ นั่นคือ $a*x=0$

ดังนั้น $0=d_f(0)=d_f(a*x)$

$$=\left(f(a)*d_f(x)\right)\wedge\left(d_f(a)*f(x)\right)$$

$$=\left(\left(d_f(a)*f(x)\right)*\left(d_f(a)*f(x)\right)\right)*\left(f(a)*d_f(x)\right)$$

จะได้ว่า $d_f(a)*f(x)\le\left(d_f(a)*f(x)\right)*\left(f(a)*d_f(x)\right)$

โดยบทตั้ง 1.2 (1) จะได้ว่า

$$0=\left(d_f(a)*f(x)\right)*\left(d_f(a)*f(x)\right)\le\left(\left(d_f(a)*f(x)\right)*\left(f(a)*d_f(x)\right)\right)*\left(d_f(a)*f(x)\right)$$

เนื่องจาก X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จึงได้ว่า

Science31N2-D.indd 22 8/5/2566 BE 11:24

$$\Big(\big(d_f(a)*f(x)\big)*\big(f(a)*d_f(x)\big)\Big)*\big(d_f(a)*f(x)\big)$$
$$=\Big(\big(d_f(a)*f(x)\big)*\big(d_f(a)*f(x)\big)\Big)*\big(f(a)*d_f(x)\big)$$
$$=0*\big(f(a)*d_f(x)\big)$$

ดังนั้น $0\le 0*\big(f(a)*d_f(x)\big)$ และโดยทฤษฎีบท 1.7 จะได้ว่า

$$0=0*\Big(0*\big(f(a)*d_f(x)\big)\Big)=0*\phi\big(f(a)*d_f(x)\big)=\phi^2\big(f(a)*d_f(x)\big)\le f(a)*d_f(x)$$

ทำให้ได้ว่า $f(a)*d_f(x)\in B(0)$

โดยบทตั้ง 1.10 จะได้ว่า $f(a)$ และ $d_f(x)$ เป็นสมาชิกในกิ่งเดียวกัน

เนื่องจาก $f(a)\in B(f(a))$ ดังนั้น $d_f(x)\subseteq B\big(f(a)\big)$

เพราะฉะนั้น $d_f\big(B(a)\big)\subseteq B\big(f(a)\big)$ □

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ $d_f:X\to X$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต AB อย่างอ่อนและ $f:X\to X$ เป็น AB-อันตรสัณฐาน โดยที่ X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ จะได้ว่า ถ้า d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X แล้ว $d_f(a)=0$ หรือ $d_f(a)=f(a)$ สำหรับทุก $a\in I(X)$

พิสูจน์ กำหนดให้ d_f เป็นการแปลง f แบบขวา-ซ้ายที่เป็นปรกติของ X และ $a\in I(X)$

จากทฤษฎีบท 2.4 (2) จะได้ว่า $f(a)\in I(X)$

โดยทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า $d_f\big(B(a)\big)\subseteq B\big(f(a)\big)$

เนื่องจาก $a\in B(a)$ จึงได้ว่า $d_f(a)\in B\big(f(a)\big)$

ดังนั้น $f(a)\le d_f(a)$

เนื่องจาก $d_f(a),f(a)\in B\big(f(a)\big)$ ดังนั้น $d_f(a)$ และ $f(a)$ เป็นสมาชิกในกิ่งเดียวกัน

โดยทฤษฎีบท 2.3 (2) จะได้ว่า $d_f(a)=f(a)\wedge d_f(a)=d_f(a)*\big(d_f(a)*f(a)\big)$

เนื่องจาก X เป็นพีชคณิตสมบูรณ์ ดังนั้น

$$d_f(a)*f(a)=\Big(d_f(a)*\big(d_f(a)*f(a)\big)\Big)*f(a)$$
$$=\big(d_f(a)*f(a)\big)*\big(d_f(a)*f(a)\big)$$
$$=0$$

จึงได้ว่า $d_f(a)\le f(a)$

เนื่องจาก $f(a)\in I(X)$ ดังนั้น $d_f(a)=0$ หรือ $d_f(a)=f(a)$ □

Science31N2-D.indd 23 8/5/2566 BE 11:24

3. References

[1] Bejarasco, R. D. and Gonzaga, N. C., 2019, On Homomorphisms of AB-algebras, Missouri J. Math. Sci. 31(2): 121-129.

[2] Hameed, A.T. and Abbas, B.N., 2017, AB-ideals of AB-algebras, Applied Mathematical Sciences. 11(35): 1715-1723.

[3] Hameed, A.T. and Abbas, B.N., 2018, Fuzzy AB-ideals of AB-algebra, Journal of AL-Qadisiyah for computer science and mathematics. 10(1): 1-7.

Science31N2-D.indd 24 8/5/2566 BE 11:24