



สูตรสำหรับโคไซน์และไซน์ของเมทริกซ์  
ของพีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์  $SO(1, 3)$   
Formulas for the Matrix Cosine and Sine of  
the Lie Algebra of Lorentz Matrix Lie Group  $SO(1, 3)$

ปณชญา พัฒนางกูร\*, กรนันท์ แก้วคำไสย์, ณัฐวดี เจริญทอง, สิริพัฒนา ทิคำมา  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120  
Poonchayar Patthanangkoor\*, Koranan Kaewkumsai, Nattawadee Charoenthong,  
Siripatana Tikamma

*Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,*

*Thammasat University, Pathum Thani 12120*

Received 18 January 2023; Received in revised 3 July 2023; Accepted 4 August 2023

### บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้เป็นการศึกษาสูตรโคไซน์ของเมทริกซ์  $B$  และสูตรไซน์ของเมทริกซ์  $B$  เมื่อ  $B \in so(1, 3)$  โดยที่  $so(1, 3)$  คือพีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์

**คำสำคัญ:** โคไซน์ของเมทริกซ์; ไซน์ของเมทริกซ์; สูตรของซิลเวสเตอร์; พีชคณิตลีของกรุปลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์

### Abstract

In this paper the formulas of the matrix cosine of  $B$  and the matrix sine of  $B$ , where  $B$  is an element of  $so(1, 3)$  which is the Lie algebra of Lorentz matrix Lie group, are derived.

**Keywords:** Matrix cosine; Matrix sine; Sylvester's formula; Lie algebra of Lorentz matrix Lie group

## 1. บทนำ (Introduction)

การคำนวณฟังก์ชันตรีโกณมิติของเมทริกซ์เป็นหนึ่งในปัญหาที่มีความท้าทายมากที่สุดในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข ฟังก์ชันตรีโกณมิติของเมทริกซ์ที่น่าสนใจคือ ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) และฟังก์ชันไซน์ (sine function)

$$\cos(A) = I_n - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

และ

$$\sin(A) = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

เมื่อ  $I_n$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ  $n$

เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง  $x''(t) + A^2 x(t) = 0$  เมื่อ  $x(t)$  และ  $x_0$  เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ  $n$  มิติ และ  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ  $n$  ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน เป็นที่ทราบกันดีว่า  $\cos(At)$  และ  $\sin(At)$  เป็นผลเฉลยของสมการนี้ ดังนั้นจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะต้องมียุทธวิธีในการหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของเมทริกซ์และฟังก์ชันไซน์ของเมทริกซ์

เนื่องจาก  $\cos(A) = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}$  และ  $\sin(A) = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ  $n$  จึงเห็นได้ว่าเราสามารถศึกษาสูตรของ  $\cos(A)$  และ  $\sin(A)$  ได้โดยการศึกษาสูตรของ  $e^{iA}$  และ  $e^{-iA}$  นั่นเอง สำหรับการศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  (the exponential of  $A$ ) ซึ่งนิยามโดย

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

สำหรับเมทริกซ์  $A$  ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ  $n \times n$  (หรือเรียกว่าเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ  $n$ ) โคไซน์ของเมทริกซ์  $A$  (the matrix cosine of  $A$ ) และไซน์ของเมทริกซ์  $A$  (the matrix sine of  $A$ ) นิยามโดย

เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ  $n$  และ  $A^0 = I_n$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ  $n$  นั้นมีมาอย่างต่อเนื่อง โดยในปี ค.ศ. 2001 T. Politi ได้ศึกษาเกี่ยวกับสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 และในปี ค.ศ. 2005 L. Kula, M. Karancan และ Y. Yaylı ได้ศึกษาเกี่ยวกับสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4

ในการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลังนั้น สูตรของโรดริก (Rodrigues formula) เป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณ  $e^A$  เมื่อ  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือน (นั่นคือ  $A^T = -A$ ) อันดับ 3 ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ -u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$  แล้วสูตรของโรดริก คือ  $e^A = I_3 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} A + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} A^2$  เมื่อ  $\alpha = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  และ  $I_3$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 3

ต่อมาในปี ค.ศ. 2021 ได้มีการศึกษาการวางนัยทั่วไปของสูตรของโรดริก โดย A. Chaiworn และ S. Promjan ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง  $e^B$  สำหรับ  $B \in so(1, 3)$  เมื่อ  $so(1, 3)$  เป็นพีชคณิตลีของกลุ่มลีของเมทริกซ์ลอเรนซ์ (The Lie algebra of Lorentz matrix Lie group) กล่าวคือ

$$so(1, 3) = \{B \in M_4(\mathbb{R}) \mid JBJ = -B^T\}$$

เมื่อ

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงทำการศึกษาคอไซน์ของเมทริกซ์  $B$  และสูตรไซน์ของเมทริกซ์  $B$  เมื่อ  $B \in so(1, 3)$  ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้า  $B \in so(1, 3)$  แล้ว  $B$  จะอยู่ในรูป

$$B = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_4 & u_5 \\ u_2 & -u_4 & 0 & u_6 \\ u_3 & -u_5 & -u_6 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.1)$$

เมื่อ  $u_i \in \mathbb{R}$  สำหรับทุก  $i = 1, 2, \dots, 6$  ดังนั้นตลอดบทความวิจัยนี้ จึงกำหนดให้  $B \in so(1, 3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1)

## 2. สูตรโคไซน์ของเมทริกซ์ $B$ และสูตรไซน์ของเมทริกซ์ $B$ เมื่อ $B \in so(1, 3)$

(Formulas of the matrix cosine of  $B$  and the matrix sine of  $B$ , where  $B \in so(1, 3)$ )

ในหัวข้อนี้จะศึกษาคอไซน์ของเมทริกซ์  $B$  และสูตรไซน์ของเมทริกซ์  $B$  เมื่อ  $B \in so(1, 3)$  ซึ่งจะเห็นได้ว่าถ้า  $B \in so(1, 3)$  แล้ว  $JBJ = -B^T$  และ  $B$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) ดังนั้น  $J(iB)J = i(JBJ) = i(-B^T) = -(iB^T) = -(iB)^T$  และ  $J(-iB)J = -i(JBJ) = -i(-B^T) = -(-iB^T) = -((-iB)^T) = -((-iB))^T = -(-iB)^T$

กำหนดให้  $q_1(\lambda)$  เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์  $iB$  และ  $q_2(\lambda)$  เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์  $-iB$  กล่าวคือ

$$q_1(\lambda) = \det(iB - \lambda I_4) \text{ และ } q_2(\lambda) = \det(-iB - \lambda I_4)$$

เมื่อ  $B \in so(1, 3)$  และ  $I_4$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

โดยจากการคำนวณจึงทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

**บทตั้ง 2.1** ถ้า  $B \in so(1, 3)$  แล้ว  $q_1(\lambda) = q_2(\lambda)$  นอกจากนี้ยังได้อีกว่า  $q_1(\lambda) = q_1(-\lambda)$  และ  $q_2(\lambda) = q_2(-\lambda)$  จากบทตั้ง 2.1 จะเห็นว่า พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  นั้นเหมือนกัน ดังบทตั้งต่อไปนี้

**บทตั้ง 2.2** ถ้า  $B \in so(1, 3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  คือ

$$q(\lambda) = \lambda^4 + m_2\lambda^2 + m_0$$

เมื่อ  $m_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2$  และ  $m_0 = -(u_1u_6 - u_2u_5 + u_3u_4)^2$

จากบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า ถ้า  $q(\lambda) = \lambda^4 + m_2\lambda^2 + m_0 = 0$  แล้ว  $\lambda$  จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าเฉพาะทั้ง 4 ค่าของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  นั้นจะอยู่ในรูปของ  $m_2$  และ  $m_0$  ดังนั้นตลอดบทความวิจัยฉบับนี้ จึงกำหนดค่าของ  $m_2$  และ  $m_0$  ดังต่อไปนี้

$$m_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2$$

และ

$$m_0 = -(u_1u_6 - u_2u_5 + u_3u_4)^2$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า  $m_2^2 - 4m_0 \geq 0$  และโดยอาศัยบทตั้ง 2.2 จึงทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

**บทตั้ง 2.3** กำหนดให้  $B \in so(1, 3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) จะได้ว่าค่าเฉพาะ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  ของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  คือ

$$\lambda_1 = \beta, \lambda_2 = -\beta, \lambda_3 = i\gamma \text{ และ } \lambda_4 = -i\gamma$$

$$\text{เมื่อ } \beta = \sqrt{\frac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}} \text{ และ } \gamma = \sqrt{\frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$$

ต่อไปจะศึกษาสูตรของ  $e^{iB}$  และ  $e^{-iB}$  เมื่อ  $B \in so(1, 3)$  โดยที่  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด กล่าวคือ จะศึกษาในกรณีที่  $m_0 \neq 0$  นั้นเอง โดยการหาสูตรของ  $e^{iB}$  และ  $e^{-iB}$  นั้น เราสามารถใช้สูตรของซิลเวสเตอร์ (Sylvester's formula) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (diagonalizable matrix) โดยมี  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันของ  $A$  แล้ว  $f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i)A_i$  เมื่อ  $f(A)$  เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของเมทริกซ์  $A$  และ  $A_i$  คือโฟรเบนิอุสโคแวเรียนต์ (Frobenius covariant) ของ  $A$  ที่กำหนดโดย

$$A_i = \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (A - \lambda_j I) \text{ สำหรับทุก } i = 1, \dots, k$$

เมื่อ  $I$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ ในที่นี้  $f(A) = e^A$  และถ้า  $A$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  แตกต่างกันทั้งหมด (นั่นคือ  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้) โดยสูตรของซิลเวสเตอร์ จึงได้ว่า

$$e^A = \sum_{i=1}^4 e^{\lambda_i} A_i$$

เมื่อ  $A_i$  คือ โพรเจกเตอร์ไครนัลของ  $A$  ที่กำหนดโดย  $A_i = \prod_{j=1, j \neq i}^4 \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (A - \lambda_j I_4)$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  เมื่อ  $I_4$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

ดังนั้น

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\lambda_1} A_1 + e^{\lambda_2} A_2 + e^{\lambda_3} A_3 + e^{\lambda_4} A_4 \\ &= e^{\lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I_4) \right) \\ &\quad + e^{\lambda_2} \left( \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I_4) \right) \\ &\quad + e^{\lambda_3} \left( \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_4} (A - \lambda_4 I_4) \right) \\ &\quad + e^{\lambda_4} \left( \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} (A - \lambda_2 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} (A - \lambda_3 I_4) \right) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า  $A_i$  อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $A$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  ซึ่งจะทำให้  $e^A$  อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $A$  เช่นกัน ดังนั้นจึงสมมติให้  $e^A = aA^3 + bA^2 + cA + dI_4$  และถ้า  $x_i$  เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ  $\lambda_i$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  (นั่นคือ  $Ax_i = \lambda_i x_i$ ) สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  แล้วจะได้ว่า

$$e^A x_i = (aA^3 + bA^2 + cA + dI_4) x_i = (a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d) x_i \quad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4$$

เนื่องจาก  $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_4 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$  ดังนั้น สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  จะได้ว่า

$$e^A x_i = \left( I_4 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \dots \right) x_i = \left( 1 + \lambda_i + \frac{1}{2!} \lambda_i^2 + \frac{1}{3!} \lambda_i^3 + \dots \right) x_i = e^{\lambda_i} x_i$$

จึงได้ว่า  $e^{\lambda_i} x_i = e^A x_i = (a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d) x_i$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$

เพราะฉะนั้น  $e^{\lambda_i} = a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  ..... (\*)

จากข้างต้นจะเห็นว่าในกรณีที่เมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะทั้ง 4 ค่าแตกต่างกันทั้งหมดนั้นโดยการใช้สูตรของซิลเวสเตอร์จะได้ว่า  $e^{iB}$  และ  $e^{-iB}$  อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $iB$  และ  $-iB$  ตามลำดับ ดังนั้นจึงสมมติให้

$$e^{iB} = a_1 (iB)^3 + b_1 (iB)^2 + c_1 (iB) + d_1 I_4 = -ia_1 B^3 - b_1 B^2 + ic_1 B + d_1 I_4$$

และ  $e^{-iB} = a_2 (-iB)^3 + b_2 (-iB)^2 + c_2 (-iB) + d_2 I_4 = ia_2 B^3 - b_2 B^2 - ic_2 B + d_2 I_4$

เมื่อ  $I_4$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4 โดยสมการ (\*) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_i} = a_1 \lambda_i^3 + b_1 \lambda_i^2 + c_1 \lambda_i + d_1 \quad \text{สำหรับทุก } i=1,2,3,4$$

เมื่อ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันของเมทริกซ์  $iB$  และโดยบทตั้ง 2.3 จะได้ว่า  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันของเมทริกซ์  $-iB$  เช่นกัน ดังนั้น

$$e^{\lambda_i} = a_2 \lambda_i^3 + b_2 \lambda_i^2 + c_2 \lambda_i + d_2 \quad \text{สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, 4$$

จึงทำให้ได้ว่า  $a_1 \lambda_i^3 + b_1 \lambda_i^2 + c_1 \lambda_i + d_1 = a_2 \lambda_i^3 + b_2 \lambda_i^2 + c_2 \lambda_i + d_2$

หรือ  $(a_1 - a_2) \lambda_i^3 + (b_1 - b_2) \lambda_i^2 + (c_1 - c_2) \lambda_i + (d_1 - d_2) = 0$  สำหรับทุก  $i = 1, 2, 3, 4$

เนื่องจาก  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  โดยอาศัยบทตั้ง 2.3 จึงได้ว่า  $\lambda_i \neq 0$  สำหรับทุก  $i = 1, 2, 3, 4$  นอกจากนี้ยังได้อีกว่า  $-\lambda_1 = \lambda_2$  และ  $-\lambda_3 = \lambda_4$  ดังนั้น

$$(a_1 - a_2) \lambda_1^3 + (b_1 - b_2) \lambda_1^2 + (c_1 - c_2) \lambda_1 + (d_1 - d_2) = -(a_1 - a_2) \lambda_1^3 + (b_1 - b_2) \lambda_1^2 - (c_1 - c_2) \lambda_1 + (d_1 - d_2)$$

จึงได้ว่า  $2(a_1 - a_2) \lambda_1^3 + 2(c_1 - c_2) \lambda_1 = 0$

นั่นคือ  $(a_1 - a_2) \lambda_1^2 + (c_1 - c_2) = 0$  (เนื่องจาก  $2\lambda_1 \neq 0$ )

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า  $(a_1 - a_2) \lambda_3^2 + (c_1 - c_2) = 0$

ดังนั้น  $(a_1 - a_2) \lambda_1^2 + (c_1 - c_2) = (a_1 - a_2) \lambda_3^2 + (c_1 - c_2)$

นั่นคือ  $(a_1 - a_2) \lambda_1^2 = (a_1 - a_2) \lambda_3^2$

เนื่องจาก  $\lambda_1 \neq \pm \lambda_3$  จึงได้ว่า  $a_1 - a_2 = 0$  นั่นคือ  $a_1 = a_2$

จากสมการ  $(a_1 - a_2) \lambda_1^2 + (c_1 - c_2) = 0$  จะได้ว่า  $c_1 - c_2 = 0$  หรือ  $c_1 = c_2$

เนื่องจาก  $(a_1 - a_2) \lambda_1^3 + (b_1 - b_2) \lambda_1^2 + (c_1 - c_2) \lambda_1 + (d_1 - d_2) = 0$

และ  $(a_1 - a_2) \lambda_3^3 + (b_1 - b_2) \lambda_3^2 + (c_1 - c_2) \lambda_3 + (d_1 - d_2) = 0$

จึงได้ว่า  $(b_1 - b_2) \lambda_1^2 + (d_1 - d_2) = 0$  และ  $(b_1 - b_2) \lambda_3^2 + (d_1 - d_2) = 0$

ดังนั้น  $(b_1 - b_2) \lambda_1^2 + (d_1 - d_2) = (b_1 - b_2) \lambda_3^2 + (d_1 - d_2)$  นั่นคือ  $(b_1 - b_2) \lambda_1^2 = (b_1 - b_2) \lambda_3^2$

เนื่องจาก  $\lambda_1 \neq \pm \lambda_3$  จึงได้ว่า  $b_1 - b_2 = 0$  นั่นคือ  $b_1 = b_2$

จากสมการ  $(b_1 - b_2) \lambda_1^2 + (d_1 - d_2) = 0$  จะได้ว่า  $d_1 - d_2 = 0$  หรือ  $d_1 = d_2$

เพราะฉะนั้น  $e^{iB}$  และ  $e^{-iB}$  สามารถเขียนอยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ  $iB$  และ  $-iB$  ตามลำดับ โดยที่สัมประสิทธิ์ของพหุนามดีกรี 3 ของ  $iB$  และ  $-iB$  ดังกล่าวนั้นเท่ากัน จึงกำหนดให้  $e^{iB}$  และ  $e^{-iB}$  สามารถเขียนได้ในรูป

$$e^{iB} = a(iB)^3 + b(iB)^2 + c(iB) + dI_4 = -iaB^3 - bB^2 + icB + dI_4$$

และ  $e^{-iB} = a(-iB)^3 + b(-iB)^2 + c(-iB) + dI_4 = iaB^3 - bB^2 - icB + dI_4$

นอกจากนี้ โดยสมการ (\*) ยังได้อีกว่า

$$e^{\lambda_i} = a \lambda_i^3 + b \lambda_i^2 + c \lambda_i + d \quad \text{สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

เมื่อ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  และ  $\lambda_4$  เป็นค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของเมทริกซ์  $iB$  และ  $-iB$  ซึ่งจะนำไปสู่การพิสูจน์สูตรของ  $\cos(B)$  และ  $\sin(B)$  โดยที่

$$\cos(B) = \frac{e^{iB} + e^{-iB}}{2} = \frac{(-iaB^3 - bB^2 + icB + dI_4) + (iaB^3 - bB^2 - icB + dI_4)}{2} = -bB^2 + dI_4$$

และ 
$$\sin(B) = \frac{e^{iB} - e^{-iB}}{2i} = \frac{(-iaB^3 - bB^2 + icB + dI_4) - (iaB^3 - bB^2 - icB + dI_4)}{2i} = -aB^3 + cB$$

เมื่อ  $B \in so(1,3)$  โดยที่  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด ทำให้ได้สูตรของ  $\cos(B)$  และ  $\sin(B)$  ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.4** กำหนดให้  $B \in so(1,3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่  $m_0 \neq 0$  จะได้ว่า

$$\cos(B) = -bB^2 + dI_4 \quad \text{และ} \quad \sin(B) = -aB^3 + cB$$

เมื่อ 
$$a = \frac{\gamma \sinh \beta - \beta \sin \gamma}{\beta \gamma (\beta^2 + \gamma^2)}, \quad b = \frac{\cosh \beta - \cos \gamma}{\beta^2 + \gamma^2},$$

$$c = \frac{\gamma^3 \sinh \beta + \beta^3 \sin \gamma}{\beta \gamma (\beta^2 + \gamma^2)} \quad \text{และ} \quad d = \frac{\gamma^2 \cosh \beta + \beta^2 \cos \gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$$

โดยที่  $I_4$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4,  $\beta = \sqrt{\frac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$  และ  $\gamma = \sqrt{\frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$

**พิสูจน์** กำหนดให้  $B \in so(1,3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่  $m_0 \neq 0$

โดยบทตั้ง 2.3 จะได้ว่าค่าเฉพาะของ  $iB$  และ  $-iB$  นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้

$$\lambda_1 = \beta, \lambda_2 = -\beta, \lambda_3 = i\gamma \quad \text{และ} \quad \lambda_4 = -i\gamma$$

เมื่อ 
$$\beta = \sqrt{\frac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}} \quad \text{และ} \quad \gamma = \sqrt{\frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$$

เมื่อแทนค่า  $\lambda_i$  สำหรับทุก  $i=1,2,3,4$  ลงในสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^\beta = a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-\beta} = a(-\beta)^3 + b(-\beta)^2 + c(-\beta) + d = -a\beta^3 + b\beta^2 - c\beta + d \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$e^{\lambda_3} = e^{i\gamma} = a(i\gamma)^3 + b(i\gamma)^2 + c(i\gamma) + d = -ia\gamma^3 - b\gamma^2 + ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-i\gamma} = a(-i\gamma)^3 + b(-i\gamma)^2 + c(-i\gamma) + d = ia\gamma^3 - b\gamma^2 - ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(4)$$

โดยสูตรของออยเลอร์ที่ว่า  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  และ  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \cos \gamma + i \sin \gamma = -ia\gamma^3 - b\gamma^2 + ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{และ} \quad \cos \gamma - i \sin \gamma = ia\gamma^3 - b\gamma^2 - ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{นำสมการ (1)+(2) จะได้ } e^\beta + e^{-\beta} = 2b\beta^2 + 2d \text{ นั่นคือ } \cosh \beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = b\beta^2 + d \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{นำสมการ (5)+(6) จะได้ } 2\cos \gamma = -2b\gamma^2 + 2d \text{ นั่นคือ } \cos \gamma = -b\gamma^2 + d \quad \dots\dots\dots(8)$$

นำ  $\gamma^2$  คูณสมการ (7) และนำ  $\beta^2$  คูณสมการ (8) จะได้

$$\gamma^2 \cosh \beta = b\beta^2\gamma^2 + d\gamma^2 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{และ} \quad \beta^2 \cos \gamma = -b\beta^2\gamma^2 + d\beta^2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\text{นำสมการ (9)+(10) จะได้ } \gamma^2 \cosh \beta + \beta^2 \cos \gamma = d(\beta^2 + \gamma^2) \text{ ดังนั้น } d = \frac{\gamma^2 \cosh \beta + \beta^2 \cos \gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$\text{นำสมการ (7)-(8) จะได้ } \cosh \beta - \cos \gamma = b(\beta^2 + \gamma^2) \text{ ดังนั้น } b = \frac{\cosh \beta - \cos \gamma}{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$\text{นำสมการ (1)-(2) จะได้ } e^\beta - e^{-\beta} = 2a\beta^3 + 2c\beta \text{ นั่นคือ } \sinh \beta = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = a\beta^3 + c\beta \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\text{นำสมการ (5)-(6) จะได้ } 2i \sin \gamma = -2ia\gamma^3 + 2ic\gamma \text{ นั่นคือ } i \sin \gamma = -ia\gamma^3 + ic\gamma$$

$$\text{นำ } (-i) \text{ คูณตลอดสมการ } i \sin \gamma = -ia\gamma^3 + ic\gamma \text{ จะได้สมการ } \sin \gamma = -a\gamma^3 + c\gamma \quad \dots\dots\dots(12)$$

นำ  $\gamma^3$  คูณสมการ (11) และนำ  $\beta^3$  คูณสมการ (12) จะได้

$$\gamma^3 \sinh \beta = a\beta^3\gamma^3 + c\beta\gamma^3 \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\text{และ} \quad \beta^3 \sin \gamma = -a\beta^3\gamma^3 + c\beta^3\gamma \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{นำสมการ (13)+(14) จะได้ } \gamma^3 \sinh \beta + \beta^3 \sin \gamma = c(\beta\gamma^3 + \beta^3\gamma) \text{ ดังนั้น } c = \frac{\gamma^3 \sinh \beta + \beta^3 \sin \gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}$$

นำ  $\gamma$  คูณสมการ (11) และนำ  $\beta$  คูณสมการ (12) จะได้

$$\gamma \sinh \beta = a\beta^3\gamma + c\beta\gamma \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\text{และ} \quad \beta \sin \gamma = -a\beta^3\gamma + c\beta\gamma \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\text{นำสมการ (15)-(16) จะได้ } \gamma \sinh \beta - \beta \sin \gamma = a(\beta^3\gamma + \beta\gamma^3) \text{ ดังนั้น } a = \frac{\gamma \sinh \beta - \beta \sin \gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}$$

$$\text{จึงสรุปได้ว่า} \quad a = \frac{\gamma \sinh \beta - \beta \sin \gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}, \quad b = \frac{\cosh \beta - \cos \gamma}{\beta^2 + \gamma^2},$$

$$c = \frac{\gamma^3 \sinh \beta + \beta^3 \sin \gamma}{\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)} \text{ และ } d = \frac{\gamma^2 \cosh \beta + \beta^2 \cos \gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \quad \square$$

**หมายเหตุ (1)** เนื่องจาก  $\beta = \sqrt{\frac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$  และ  $\gamma = \sqrt{\frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2}}$  โดยที่  $m_0 \neq 0$  ดังนั้น  $\beta > 0, \gamma > 0$

$$\text{และ } \beta^2 + \gamma^2 = \left( \frac{-m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2} \right) + \left( \frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 - 4m_0}}{2} \right) = \sqrt{m_2^2 - 4m_0} > 0$$

(2) จากทฤษฎีบท 2.4 ถ้า  $m_2 = 0$  แล้วจะได้ว่า  $\cos(B) = -bB^2 + dI_4$  และ  $\sin(B) = -aB^3 + cB$

$$\text{เมื่อ } a = \frac{\sinh \beta - \sin \beta}{2\beta^3}, \quad b = \frac{\cosh \beta - \cos \beta}{2\beta^2}, \quad c = \frac{\sinh \beta + \sin \beta}{2\beta} \text{ และ } d = \frac{\cosh \beta + \cos \beta}{2}$$

$$\text{โดยที่ } \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{-4m_0}}{2}}$$

**ทฤษฎีบท 2.5** กำหนดให้  $B \in so(1,3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่  $m_2 = 0$  และ  $m_0 = 0$  จะได้ว่า

$$\cos(B) = I_4 - \frac{B^2}{2!} \quad \text{และ} \quad \sin(B) = B - \frac{B^3}{3!}$$

เมื่อ  $I_4$  คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

**พิสูจน์** กำหนดให้  $B \in so(1,3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่  $m_2 = 0$  และ  $m_0 = 0$  จะได้ว่า พหุนามลักษณะเฉพาะของ  $iB$  และ  $-iB$  คือ  $q(\lambda) = \lambda^4$  ดังนั้น  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะเหมือนกันทั้งค่า 4 คือ  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$  โดยทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน (Cayley-Hamilton) จะได้ว่า  $iB$  และ  $-iB$  สอดคล้องกับสมการลักษณะเฉพาะของ  $iB$  และ  $-iB$  นั่นคือ  $q(iB) = (iB - \lambda_1 I_4)^4 = (iB)^4 = \bar{0}$  และ  $q(-iB) = (-iB - \lambda_1 I_4)^4 = (-iB)^4 = \bar{0}$  เมื่อ  $\bar{0}$  คือเมทริกซ์ศูนย์อันดับ 4 ดังนั้น  $(iB)^k = (-iB)^k = \bar{0}$  สำหรับทุก  $k \geq 4$  นั่นคือ  $B^4 = \bar{0}$  จึงทำให้ได้ว่า  $B^k = \bar{0}$  สำหรับทุก  $k \geq 4$  ดังนั้น โดยบทนิยามของ  $\cos(B)$  และ  $\sin(B)$  จึงได้ว่า

$$\cos(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} B^{2n} = I_4 - \frac{B^2}{2!} + \frac{B^4}{4!} - \frac{B^6}{6!} + \cdots = I_4 - \frac{B^2}{2!}$$

$$\text{และ} \quad \sin(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = B - \frac{B^3}{3!} + \frac{B^5}{5!} - \frac{B^7}{7!} + \cdots = B - \frac{B^3}{3!}$$

เมื่อ  $I_4$  คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4 □

ต่อไปจะพิจารณาหาสูตรของ  $\cos(B)$  และ  $\sin(B)$  เมื่อ  $B$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และ  $iB$  กับ  $-iB$  มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.6** กำหนดให้  $B \in so(1,3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่  $B$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และ  $m_2 \neq 0$ ,  $m_0 = 0$  จะได้ว่า

$$\cos(B) = -bB^2 + I_4 \quad \text{และ} \quad \sin(B) = cB$$

โดยที่ (1) ถ้า  $m_2 > 0$  แล้ว  $b = \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2}$  และ  $c = \frac{\sin \gamma}{\gamma}$  เมื่อ  $\gamma = \sqrt{m_2}$

และ (2) ถ้า  $m_2 < 0$  แล้ว  $b = \frac{\cosh \beta - 1}{\beta^2}$  และ  $c = \frac{\sinh \beta}{\beta}$  เมื่อ  $\beta = \sqrt{-m_2}$

เมื่อ  $I_4$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4

**พิสูจน์** กำหนดให้  $B \in so(1,3)$  เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (1.1) โดยที่  $B$  เป็นเมทริกซ์ที่สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และ  $m_2 \neq 0$ ,  $m_0 = 0$  จากบทตั้ง 2.3 จะเห็นได้ว่า

ในกรณีที่  $m_2 > 0$  จะได้ว่า  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า คือ  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = i\gamma$  และ  $\lambda_4 = -i\gamma$  เมื่อ  $\gamma = \sqrt{m_2} > 0$  โดยสูตรของซิลเวสเตอร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e^{iB} &= e^{\lambda_2} \left( \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3} (iB - \lambda_3 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_4} (iB - \lambda_4 I_4) \right) + e^{\lambda_3} \left( \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (iB - \lambda_2 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_4} (iB - \lambda_4 I_4) \right) \\ &\quad + e^{\lambda_4} \left( \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_2} (iB - \lambda_2 I_4) \right) \left( \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} (iB - \lambda_3 I_4) \right) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า  $e^{iB}$  อยู่ในรูปของพหุนามดีกรี 2 ของ  $iB$  ดังนั้นจึงจะคำนวณหา  $e^{iB}$  โดยสมมติให้  $e^{iB} = b(iB)^2 + c(iB) + dI_4$  และถ้า  $x_i$  เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สัมพันธ์กับค่าเฉพาะ  $\lambda_i$  สำหรับทุก  $i = 2, 3, 4$  (นั่นคือ  $(iB)x_i = \lambda_i x_i$  สำหรับทุก  $i = 2, 3, 4$ ) แล้วจะได้ว่า

$$e^{iB} x_i = (b(iB)^2 + c(iB) + dI_4) x_i = b\lambda_i^2 x_i + c\lambda_i x_i + dx_i \quad \text{สำหรับทุก } i = 2, 3, 4$$

นอกจากนี้ยังได้อีกว่า  $e^{iB} x_i = e^{\lambda_i} x_i$  สำหรับทุก  $i = 2, 3, 4$  จึงได้ว่า

$$e^{\lambda_i} x_i = e^{iB} x_i = b\lambda_i^2 x_i + c\lambda_i x_i + dx_i = (b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d)x_i \quad \text{สำหรับทุก } i = 2, 3, 4$$

นั่นคือ  $e^{\lambda_i} = b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$  สำหรับทุก  $i = 2, 3, 4$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า  $e^{-iB}$  จะอยู่ในรูปของพหุนามดีกรี 2 ของ  $-iB$  และเนื่องจาก  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะเหมือนกัน ดังนั้น  $e^{-iB} = b(-iB)^2 + c(-iB) + dI_4$  และ  $e^{\lambda_i} = b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$  สำหรับทุก  $i = 2, 3, 4$  เช่นกัน

เนื่องจาก  $e^{iB} = b(iB)^2 + c(iB) + dI_4 = -bB^2 + icB + dI_4$

และ  $e^{-iB} = b(-iB)^2 + c(-iB) + dI_4 = -bB^2 - icB + dI_4$

$$\text{ดังนั้น} \quad \cos(B) = \frac{e^{iB} + e^{-iB}}{2} = -bB^2 + dI_4 \quad \text{และ} \quad \sin(B) = \frac{e^{iB} - e^{-iB}}{2i} = cB$$

เมื่อแทนค่า  $\lambda_i$  ลงในสมการ  $e^{\lambda_i} = b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$  สำหรับทุก  $i = 2, 3, 4$  จะได้ว่า

$$e^{\lambda_2} = e^0 = b(0)^2 + c(0) + d = d \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$e^{\lambda_3} = e^{i\gamma} = b(i\gamma)^2 + c(i\gamma) + d = -b\gamma^2 + ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-i\gamma} = b(-i\gamma)^2 + c(-i\gamma) + d = -b\gamma^2 - ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(19)$$

โดยสูตรของออยเลอร์ที่ว่า  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  และ  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \cos \gamma + i \sin \gamma = -b\gamma^2 + ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\text{และ} \quad \cos \gamma - i \sin \gamma = -b\gamma^2 - ic\gamma + d \quad \dots\dots\dots(21)$$

จากสมการ (17) จะได้ว่า  $d = 1$

นำสมการ (20)+(21) จะได้ว่า  $2\cos \gamma = -2b\gamma^2 + 2d$  นั่นคือ  $\cos \gamma = -b\gamma^2 + d = -b\gamma^2 + 1$  ดังนั้น  $b = \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2}$

นำสมการ (20)-(21) จะได้ว่า  $2i \sin \gamma = 2ic\gamma$

จะได้สมการ  $\sin \gamma = c\gamma$  ดังนั้น  $c = \frac{\sin \gamma}{\gamma}$

จึงสรุปได้ว่า  $\cos(B) = -bB^2 + I_4$  และ  $\sin(B) = cB$  เมื่อ  $b = \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2}$ ,  $c = \frac{\sin \gamma}{\gamma}$

สำหรับกรณีที่  $m_2 < 0$  จะได้ว่า  $iB$  และ  $-iB$  มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน 3 ค่า คือ  $\lambda_1 = \beta$ ,  $\lambda_2 = -\beta$  และ  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$  เมื่อ  $\beta = \sqrt{-m_2} > 0$  ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์กรณีที่  $m_2 > 0$  จะได้ว่า  $e^{iB}$  และ  $e^{-iB}$  จะอยู่ในรูปพหุนามดีกรี 2 ของ  $iB$  และ  $-iB$  ตามลำดับ ดังนั้นจึงสมมติให้  $e^{iB} = b(iB)^2 + c(iB) + dI_4$  และ  $e^{-iB} = b(-iB)^2 + c(-iB) + dI_4$  ซึ่งได้ว่า  $\cos(B) = \frac{e^{iB} + e^{-iB}}{2} = -bB^2 + dI_4$  และ  $\sin(B) = \frac{e^{iB} - e^{-iB}}{2i} = cB$  เช่นกัน นอกจากนี้ยังได้อีกว่า  $e^{\lambda_i} = b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d$  สำหรับทุก  $i = 1, 2, 3$

เมื่อแทนค่า  $\lambda_i$  สำหรับทุก  $i = 1, 2, 3$  ลงในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^\beta = b(\beta)^2 + c(\beta) + d = b\beta^2 + c\beta + d \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-\beta} = b(-\beta)^2 + c(-\beta) + d = b\beta^2 - c\beta + d \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$e^{\lambda_3} = e^0 = b(0)^2 + c(0) + d = d \quad \dots\dots\dots(24)$$

จากสมการ (24) จะได้ว่า  $d = 1$

นำสมการ (22)+(23) จะได้  $e^\beta + e^{-\beta} = 2b\beta^2 + 2d$  นั่นคือ  $\cosh \beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = b\beta^2 + d = b\beta^2 + 1$

$$\text{ดังนั้น} \quad b = \frac{\cosh \beta - 1}{\beta^2}$$

นำสมการ (22)-(23) จะได้  $e^\beta - e^{-\beta} = 2c\beta$  นั่นคือ  $\sinh \beta = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = c\beta$  ดังนั้น  $c = \frac{\sinh \beta}{\beta}$

จึงสรุปได้ว่า  $\cos(B) = -bB^2 + I_4$  และ  $\sin(B) = cB$  เมื่อ  $b = \frac{\cosh \beta - 1}{\beta^2}$  และ  $c = \frac{\sinh \beta}{\beta}$  □

### 3. References

- [1] Chaiworn, A. and Promjan, S., 2021, Formulas for the Exponential Matrix of  $so(1,3)$ , International Journal of Mathematics and Computer Science. 16(1): 423-427.
- [2] Horn, R. A. and Johnson, C. R., 1986, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [3] Kula, L., Karancan, M. and Yayh, Y., 2005, Formulas for the Exponential of a Semi Skew-Symmetric Matrix of Order 4, Mathematical and Computational Applications. 10(1): 99-104.
- [4] Politi, T., 2001, A Formula for the Exponential of a Real Skew-Symmetric Matrix of Order 4, BIT, Numeric Analysis. 41: 842-845.