



โครงสร้างของกึ่งกรุป RG

On Structure of RG-Semigroups

ปณชยา พัฒนางกูร*, ปาลิดา สุชาติพงษ์, วศิน สุภากุล, ชุตินา เพือกสวัสดิ์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Palida Suchatphong, Chutima Phueaksawat,
Wasin Supakul

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 27 January 2023; Received in revised 20 June 2023; Accepted 28 June 2023

บทคัดย่อ

ในบทความวิจัยฉบับนี้ได้ศึกษาโครงสร้างของกึ่งกรุป RG ซึ่งจะได้ว่าทุกริงสามารถนิยามเป็นกึ่งกรุป RG ได้ และยังคงศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของ RG-ไอดีลของกึ่งกรุป RG อีกทั้งยังได้ศึกษาโครงสร้างของความสัมพันธ์สมภาคบนกึ่งกรุป RG และสร้างกึ่งกรุป RG ผลหารอีกด้วย นอกจากนี้ยังศึกษาโครงสร้างของสัทิสฐานและสมสัณฐานบนกึ่งกรุป RG ซึ่งทำให้เกิดสมบัติบางประการเช่นกัน

คำสำคัญ: กึ่งกรุป RG; RG-ไอดีล; สัทิสฐาน; สมสัณฐาน

Abstract

In this paper, we introduce the notion of RG-semigroup. We prove that every ring determines an RG-semigroup. We also introduce the notions of RG-ideal of RG-semigroup, and we investigate RG-ideal properties. Moreover, we introduce the notion of a congruence relation on RG-semigroup, and we construct the quotient RG-semigroup. Furthermore, we introduce the notion of RG-semigroup homomorphism and RG-semigroup isomorphism, and we provide some of its properties.

Keywords: RG-semigroup; RG-ideal; homomorphism; isomorphism

*ผู้รับผิดชอบบทความ: poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

doi: 10.14456/tstj.2023.52

1. บทนำ

เมื่อปี ค.ศ. 2006 Kyung Ho Kim ได้ศึกษาเรื่องโครงสร้างของกึ่งกรุป KS ซึ่งทำให้ทราบโครงสร้างของกึ่งกรุป KS ซึ่งเป็นคลาสของพีชคณิตคลาสใหม่ที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต BCK และกึ่งกรุป นอกจากนี้ยังทำให้ทราบถึงสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุป KS รวมถึงสมบัติต่าง ๆ ของไอดิลของกึ่งกรุป KS ไอดิลของกึ่งกรุป KS อย่างเข้ม ความสัมพันธ์สมภาคบนกึ่งกรุป KS และทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับสาทิสสัณฐานและสมสัณฐานบนกึ่งกรุป KS อีกด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. 2014 R.A.K Omar ได้ศึกษาโครงสร้างของพีชคณิต RG และทำให้ทราบถึงสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิต RG อีกด้วย ดังนั้นบทความวิจัยฉบับนี้จึงมีความสนใจที่จะศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของคลาสของพีชคณิตอีกคลาสหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิตอื่นและกึ่งกรุป ซึ่งบทความวิจัยนี้จะศึกษาโครงสร้างและสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุป RG (RG-semigroup) เมื่อพีชคณิต RG นิยามดังนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิตชนิด $(2, 0)$ จะเรียก $(X; *, 0)$ ว่าพีชคณิต RG (RG-algebra) ก็ต่อเมื่อ

- (i) $x * 0 = x$
 - (ii) $x * y = (x * z) * (y * z)$
 - และ (iii) ถ้า $x * y = y * x = 0$ แล้ว $x = y$
- สำหรับทุก $x, y, z \in X$

จากบทนิยาม 1.1 ทำให้ได้สมบัติพื้นฐานของพีชคณิต RG ดังนี้

บทตั้ง 1.1 (Omar, 2014) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต RG จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in X$

- (i) $0 * (y * x) = x * y$
- (ii) $0 * (0 * x) = x$
- (iii) $x * (x * y) = y$
- (iv) $x * y = (z * y) * (z * x)$
- (v) $x * y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $y * x = 0$

- (vi) $(x * y) * (0 * y) :$
 $= (x * (0 * y)) * y = x$
- (vii) $x * (x * (x * y)) = x * y$
- (viii) $(x * y) * z :$
 $= (x * y) * ((z * y) * (0 * y))$
 $= ((x * z) * z) * (y * z)$
 $= ((x * y) * y) * (z * y) = (x * z) * y$

บทตั้ง 1.2 (Omar, 2014) กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต RG จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y, z \in X$

- (i) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
- (ii) $(x * (x * y)) * y = 0$
- (iii) $x * x = 0$
- (iv) ถ้า $x * 0 = 0$ แล้ว $x = 0$

2. ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาโครงสร้างของกึ่งกรุป RG และสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุป RG เมื่อกึ่งกรุปนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต X จะเรียกระบบคณิตศาสตร์ $(X, \cdot)$ ว่ากึ่งกรุป (semigroup) ก็ต่อเมื่อ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

โดยตลอดบทความวิจัยนี้จะกำหนดให้ $(X; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิตชนิด $(2, 0)$ จะเรียก $(X; *, \cdot, 0)$ ว่ากึ่งกรุป RG (RG-semigroup) ก็ต่อเมื่อ

- (i) $(X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต RG
- (ii) $(X, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป
- และ (iii) การดำเนินการ “ $\cdot$ ” มีสมบัติการแจกแจง (ทั้งสองด้าน) บนการดำเนินการ “ $*$ ” กล่าวคือ

$$x \cdot (y * z) = (x \cdot y) * (x \cdot z) \text{ และ } (x * y) \cdot z = (x \cdot z) * (y \cdot z) \text{ สำหรับทุก } x, y, z \in X$$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกจะเขียนแทน $x \cdot y$ ด้วย xy และเขียนแทน $(X; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG ด้วย X เป็นกึ่งกรุป RG

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ $(R; +, \cdot)$ เป็นริงที่มี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ สำหรับการดำเนินการ $+$ และนิยามการดำเนินการ $*$ บน R ดังนี้ $x * y = x + (-y) = x - y$ สำหรับทุก $x, y \in R$ จะได้ว่า $(R; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG

พิสูจน์ ให้ $(R; +, \cdot)$ เป็นริงที่มี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ สำหรับการดำเนินการ $+$ และให้ $x, y, z \in R$ จะได้ว่า $x * 0 = x + (-0) = x$ และ $(x * z) * (y * z) = (x - z) - (y - z) = x - z - y + z = x - y = x * y$ และถ้า $x * y = 0 = y * x$ แล้ว $x - y = 0 = y - x$ ดังนั้น $x = y$ จึงได้ว่า $(R; *, 0)$ เป็นพีชคณิต RG และเนื่องจาก $(R; +, \cdot)$ เป็นริง ดังนั้น $(R, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป นอกจากนี้ยังได้ว่า $x(y * z) = x(y - z) = (xy) - (xz) = (xy) * (xz)$ และ $(x * y)z = (x - y)z = (xz) - (yz) = (xz) * (yz)$ ดังนั้น $(R; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า

- (i) $0x = x0 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
- (ii) ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $xz * yz = 0$ และ $zx * zy = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ จากบทตั้ง 1.2 และบทนิยาม 2.2 ทำให้ได้ว่า

- (i) ให้ $x \in X$ จะได้ว่า $0x = (x * x)x = (xx) * (xx) = 0$ และ $x0 = x(x * x) = (xx) * (xx) = 0$
- (ii) ให้ $x, y, z \in X$ และ $x * y = 0$ ดังนั้น $(x * y)z = 0z = 0$ และ $z(x * y) = z0 = 0$ นั่นคือ $xz * yz = 0$ และ $zx * zy = 0$

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง

ถ้า $xa \in A$ สำหรับทุก $x \in X$ และทุก $a \in A$ แล้วจะเรียก A ว่า *เสถียรทางซ้าย* (left stable) และ ถ้า $ax \in A$ สำหรับทุก $x \in X$ และทุก $a \in A$ แล้วจะเรียก A ว่า *เสถียรทางขวา* (right stable)

ในกรณีที่ A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้ายและเสถียรทางขวา จะเรียกว่า A ว่า *เสถียรสองด้าน* (two-sided stable) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *เสถียร* (stable) **หมายเหตุ** : จะได้ว่า $0 \in X$ และถ้า A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้าย (หรือทางขวา) ของ X แล้ว $0 \in A$

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก A ว่า *RG-ไอดิลทางซ้าย* (RG-left ideal) ของ X ก็ต่อเมื่อ

- (i) A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้ายของ X

และ (ii) ถ้า $x * y \in A$ และ $0 * x \in A$ แล้ว $0 * y \in A$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะเรียก A ว่า *RG-ไอดิลทางขวา* (RG-right ideal) ของ X ก็ต่อเมื่อ

- (i) A เป็นเซตที่เสถียรทางขวาของ X

และ (ii) ถ้า $x * y \in A$ และ $0 * x \in A$ แล้ว $0 * y \in A$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ในกรณีที่ A เป็น RG-ไอดิลทางซ้ายและ RG-ไอดิลทางขวาของ X จะเรียก A ว่า *RG-ไอดิลสองด้าน* (two-sided RG-ideal) ของ X หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *RG-ไอดิล* (RG-ideal) ของ X

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า A_1 และ A_2 เป็น RG-ไอดิลของ X แล้ว $A_1 \cap A_2$ เป็น RG-ไอดิลของ X

พิสูจน์ ให้ A_1 และ A_2 เป็น RG-ไอดิลของ X และให้ $x, y \in X$ และ $a \in A_1 \cap A_2$ ดังนั้น $a \in A_1$

และ $a \in A_2$ จะได้ว่า $xa, ax \in A_1$ และ $xa, ax \in A_2$ ดังนั้น $xa, ax \in A_1 \cap A_2$ และ $x * y \in A_1 \cap A_2$ เพราะฉะนั้น $x * y \in A_1$, $0 * x \in A_1$ และ $x * y \in A_2, 0 * x \in A_2$ จะเห็นว่า $0 * x \in A_1 \cap A_2$ และจะได้ว่า $0 * y \in A_1$ และ $0 * y \in A_2$ ดังนั้น $0 * y \in A_1 \cap A_2$ เพราะฉะนั้น $A_1 \cap A_2$ เป็น RG-ไอดิลของ X

บทนิยาม 2.5 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก A ว่าไอดิลพีทางซ้าย (left P-ideal) ของ X ก็ต่อเมื่อ

(i) A เป็นเซตที่เสถียรทางซ้ายของ X และ (ii) ถ้า $(x * y) * z \in A$ และ $0 * (x * z) \in A$ แล้ว $0 * (y * z) \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะเรียก A ว่าไอดิลพีทางขวา (right P-ideal) ของ X ก็ต่อเมื่อ

(i) A เป็นเซตที่เสถียรทางขวาของ X และ (ii) ถ้า $(x * y) * z \in A$ และ $0 * (x * z) \in A$ แล้ว $0 * (y * z) \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ในกรณีที่ A เป็นไอดิลพีทางซ้ายและไอดิลพีทางขวา จะเรียก A ว่าเป็นไอดิลพี (P-ideal) ของ X

ทฤษฎีบท 2.3 ทุกไอดิลพีของกึ่งกรุป RG เป็น RG-ไอดิล พิสูจน์ ให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ A เป็นไอดิลพีของ X สมมติให้ $x * y \in A$ และ $0 * x \in A$ จะได้ว่า $(x * y) * 0 = x * y \in A$ และ $0 * (x * 0) = 0 * x \in A$ เนื่องจาก $0 * (y * 0) = 0 * y \in A$ ดังนั้น A เป็น RG-ไอดิลของ X

บทนิยาม 2.6 กำหนดให้ $(X; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่าเป็นกึ่งกรุป RG ย่อย (Sub RG-semigroup) ของ X ก็ต่อเมื่อ $(S; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG

บทนิยาม 2.7 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียก $1 \in X$ ว่าเอกลักษณ์ (unity) ของ X ก็ต่อเมื่อ $1x = x1 = x$ สำหรับทุก $x \in X$ และจะเรียก $x \in X$ ว่ายูนิต (unit) ของ X ก็ต่อเมื่อ $x * X = X$ เมื่อ $x * X = \{x * y | y \in X\}$

บทตั้ง 2.2 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X และ A เป็น RG-ไอดิลของ X จะได้ว่า ถ้า $x \in A$ แล้ว $0 * x \in A$ พิสูจน์ ให้ $x \in A$ ดังนั้น $0 * 1 \in X$ จาก A เป็นเซตที่เสถียร ดังนั้น $0 * x = (x0) * (x1) = x \cdot (0 * 1) \in A$

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X จะได้ว่า

(i) ถ้า A เป็น RG-ไอดิลของ X แล้ว A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

(ii) ถ้า A เป็นไอดิลพีของ X แล้ว A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X พิสูจน์ (i) สมมติให้ A เป็น RG-ไอดิลของ X และ $x, y, z \in A$ ดังนั้น $0 = x \cdot 0 \in A$ และ $xy \in A$ โดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า $0 * y \in A$ จากบทตั้ง 1.1 (iii) จะได้ว่า $y * (y * x) = x \in A$ ทำให้ได้ว่า $0 * (y * x) \in A$ และจากบทตั้ง 1.1 (i) จะได้ว่า $0 * (y * x) = x * y$ ดังนั้น $x * y \in A$ เนื่องจาก $A \subseteq X$ จึงได้ว่า $x, y, z \in X$ ดังนั้น $(A; *, 0)$ เป็นพีชคณิต RG และ $(A, \cdot)$ เป็นกึ่งกรุป นอกจากนี้ยังได้ว่า $x \cdot (y * z) = (xy * xz)$ และ $(x * y) \cdot z = (xz * yz)$ จึงสรุปได้ว่า A เป็นกึ่งกรุป RG เพราะฉะนั้น A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

(ii) สมมติให้ A เป็นไอดิลพีของ X จะได้ว่า A เป็น RG-ไอดิลของ X อาศัยข้อ (i) จึงได้ว่า A เป็นกึ่งกรุป RG ย่อยของ X

บทนิยาม 2.8 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียก X ว่ากึ่งกรุป RG เชิงเดียว (simple RG-semigroup) ก็ต่อเมื่อ RG-ไอดิลทางซ้ายของ X มีเพียง $\{0\}$ และ X เท่านั้น และจะเรียก X ว่ากึ่งกรุป RG แท้ (proper RG-semigroup) ก็ต่อเมื่อ $x * X$ เป็น RG-ไอดิลทางซ้ายของ X สำหรับทุก $x \in X$ เมื่อ $x * X = \{x * y | y \in X\}$

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ $(X; *, \cdot, 0)$ เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียก X ว่ามีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน (weakly associative) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะมี $w \in X$ ที่ทำให้ $(x * y) * z = x * w$ จะเรียก X ว่ามีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative) ก็ต่อเมื่อ $(x * y) * z = x * (y * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อนแล้ว X เป็นกึ่งกรุป RG แท้ พิสูจน์ สมมติให้ X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน และ $x \in X$ สมมติให้ $a \in x * X$ และ $x', y' \in X$ จาก $a \in x * X$ จะมี $y \in X$ ที่ $a = x * y$ ดังนั้น $x'a = x'(x * y) = (x'x) * (x'y) = (x * (x'y)) * (x * (x'x))$ เนื่องจาก X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน จะได้ว่ามี $w \in X$ ที่ทำให้ $(x * (x'y)) * (x * (x'x)) = x * w$ นั่นคือ $x'a = x * w \in x * X$ จึงสรุปได้ว่า $x * X$ เป็นเซตที่เสถียรทางซ้าย

สมมติให้ $a * b \in x * X$ และ $0 * a \in x * X$ จะได้ว่า $a * b = x * z$ สำหรับบาง $z \in X$ ดังนั้น $0 * b = (a * b) * (a * 0) = (x * z) * a = x * u$ สำหรับบาง $u \in X$ นั่นคือ $0 * b \in x * X$ จึงได้ว่า $x * X$ เป็น RG-ไอดิลทางซ้ายของ X เพราะฉะนั้น X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า X เป็นกึ่งกรุป RG เชิงเดียวและเป็นกึ่งกรุป RG แท้ แล้วทุกสมาชิกของ X เป็นยูนิตของ X

พิสูจน์ สมมติให้ X เป็นกึ่งกรุป RG เชิงเดียวและเป็นกึ่งกรุป RG แท้ จะเห็นได้ว่า 0 เป็นยูนิตของ X ให้ $x \in X - \{0\}$ เนื่องจาก X เป็นกึ่งกรุป RG แท้ จะได้ว่า $x * X$ เป็น RG-ไอดิลทางซ้ายของ X เนื่องจาก X เป็นกึ่งกรุป RG เชิงเดียว จะได้ว่า $x * X = \{0\}$ หรือ $x * X = X$ อย่างใดอย่างหนึ่ง สมมติให้ $x * X = \{0\}$ จะได้ว่า $x * 0 = 0$ เนื่องจาก $x * 0 = x$ จะได้ว่า $x = 0$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $x * X \neq \{0\}$ จึงทำให้ $x * X = X$ นั่นคือ x เป็นยูนิตของ X

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้าทุกสมาชิกของ X เป็นยูนิตของ X แล้ว X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

พิสูจน์ สมมติให้ทุกสมาชิกของ X เป็นยูนิตของ X ดังนั้น $x * X = X$ สำหรับทุก $x \in X$ เนื่องจาก X เป็น RG-ไอดิลทางซ้ายของ X จึงได้ว่า $x * X$ เป็น RG-ไอดิลทางซ้ายของ X ดังนั้น X เป็นกึ่งกรุป RG แท้

ทฤษฎีบท 2.8 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อนและ $x, y \in X$ ถ้า $x * y$ เป็นยูนิตของ X แล้ว x เป็นยูนิตของ X

พิสูจน์ สมมติให้ $x * y$ เป็นยูนิตของ X นั่นคือ $(x * y) * X = X$ ให้ $a \in X$ จะได้ว่า $a \in (x * y) * X$ จึงได้ว่ามี $k \in X$ ที่ทำให้ $a = (x * y) * k$ เนื่องจาก X มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่อย่างอ่อน ดังนั้น จะมี $w \in X$ ที่ทำให้ $a = (x * y) * k = x * w$ นั่นคือ $a \in x * X$ ดังนั้น $X \subseteq x * X$ เพราะว่า $x * X \subseteq X$ จึงได้ว่า $x * X = X$ จึงสรุปได้ว่า x เป็นยูนิตของ X

บทนิยาม 2.10 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X

(i) ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางขวา (right compatible relation) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in \rho$ แล้ว

$(x * z, y * z) \in \rho$ และ $(xz, yz) \in \rho$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(ii) ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางซ้าย (left compatible relation) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in \rho$ แล้ว $(z * x, z * y) \in \rho$ และ $(zx, zy) \in \rho$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

(iii) ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ (compatible relation) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in \rho$ และ $(u, v) \in \rho$ แล้ว $(x * u, y * v) \in \rho$ และ $(xu, yv) \in \rho$ สำหรับทุก $x, y, u, v \in X$

(iv) ถ้า ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลที่เข้ากันได้ (compatible equivalence relation) แล้วจะเรียก ρ ว่าความสัมพันธ์สมภาค (congruence relation)

ทฤษฎีบท 2.9 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X จะได้ว่า ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาค ก็ต่อเมื่อ ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทั้งทางซ้ายและทางขวา

พิสูจน์ สมมติให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะได้ว่า ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้บน X กำหนดให้ $x, y \in X$ โดยที่ $(x, y) \in \rho$ และ $z \in X$ เนื่องจาก ρ มีสมบัติสะท้อน จึงได้ว่า $(z, z) \in \rho$ จากบทนิยาม 2.10 (iii) จะได้ว่า $(x * z, y * z) \in \rho$ และ $(xz, yz) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางขวา ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $(z * x, z * y) \in \rho$ และ $(zx, zy) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางซ้าย

ในทางกลับกันสมมติให้ ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทั้งทางขวาและทางซ้าย และกำหนดให้ $x, y, u, v \in X$ โดยที่ $(x, y) \in \rho$ และ $(u, u) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางขวา และ $(y, y) \in \rho$ จึงได้ว่า $(x * u, y * u) \in \rho$ และ $(xu, yu) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทางซ้าย และ $(y, y) \in \rho$ จึงได้ว่า $(y * u, y * v) \in \rho$ และ $(yu, yv) \in \rho$ เนื่องจาก ρ เป็นความ

สัมพันธ์สมมูลบน X ดังนั้น ρ มีสมบัติถ่ายทอด จึงได้ว่า $(x * u, y * v) \in \rho$ และ $(xu, yv) \in \rho$ ดังนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ นั่นคือ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาค

บทนิยาม 2.11 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะนิยาม $x\rho := \{y \in X \mid (x, y) \in \rho\}$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $X/\rho := \{x\rho \mid x \in X\}$ จะเรียก X/ρ ว่า กึ่งกรุป RG ผลหาร (quotient RG-semigroup)

ทฤษฎีบท 2.10 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะได้ว่า $(X/\rho; *, ', 0\rho)$ เป็นกึ่งกรุป RG เมื่อ $*$ และ $'$ เป็นการดำเนินการบน X/ρ ที่กำหนดโดย $x\rho *' y\rho = (x * y)\rho$ และ $(x\rho) \cdot' (y\rho) = (xy)\rho$ สำหรับทุก $x\rho, y\rho \in X/\rho$

พิสูจน์ กำหนดให้ $*': X/\rho \times X/\rho \rightarrow X/\rho$ และ $\cdot': X/\rho \times X/\rho \rightarrow X/\rho$ นิยามโดย

$$*'(x\rho, y\rho) = (x\rho) *' (y\rho) = (x * y)\rho \text{ สำหรับทุก } x\rho, y\rho \in X/\rho$$

$$\text{และ } \cdot'(x\rho, y\rho) = (x\rho) \cdot' (y\rho) = (xy)\rho \text{ สำหรับทุก } x\rho, y\rho \in X/\rho$$

กำหนดให้ $(x_1\rho, y_1\rho), (x_2\rho, y_2\rho) \in X/\rho \times X/\rho$ โดยที่ $(x_1\rho, y_1\rho) = (x_2\rho, y_2\rho)$

นั่นคือ $x_1\rho = x_2\rho$ และ $y_1\rho = y_2\rho$

$$\text{ดังนั้น } *'(x_1\rho, y_1\rho) = x_1\rho *' y_1\rho = x_2\rho *' y_2\rho = *'(x_2\rho, y_2\rho)$$

$$\text{และ } \cdot'(x_1\rho, y_1\rho) = x_1\rho \cdot' y_1\rho = x_2\rho \cdot' y_2\rho = \cdot'(x_2\rho, y_2\rho)$$

ดังนั้น $*$ และ $\cdot'$ เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ $*$ และ $\cdot'$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X/ρ

จะเห็นได้ว่า $0\rho \in X/\rho$ โดยที่ $0\rho = \{y \in X \mid (0, y) \in \rho\}$

กำหนดให้ $x\rho, y\rho, z\rho \in X/\rho$

จะได้ว่า $x, y, z \in X$

$$(i) \quad x\rho *' 0\rho = (x*0)\rho = x\rho$$

$$(ii) \quad x\rho *' y\rho = (x*y)\rho = ((x*z) *' (y*z))\rho = (x*z)\rho *' (y*z)\rho = (x\rho *' z\rho) *' (y\rho *' z\rho)$$

$$(iii) \quad \text{สมมติให้ } x\rho *' y\rho = 0\rho = y\rho *' x\rho$$

ดังนั้น $(x*y)\rho = 0\rho = (y*x)\rho$ จึงได้ว่า $0 \in (x*y)\rho$ นั่นคือ $(x*y, 0) \in \rho$

จาก ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จึงได้ว่า $(x*(x*y), x*0) \in \rho$ โดยบทตั้ง 1.1 (iii) จะได้ว่า $(y, x) \in \rho$ ดังนั้น $(x, y) \in \rho$ และ $y \in x\rho$ จึงได้ว่า $x\rho = y\rho$

จาก (i) – (iii) จะได้ว่า $(X/\rho; *, \cdot, 0\rho)$ เป็นพีชคณิต RG

$$(iv) \quad \text{เนื่องจาก } xy \in X \text{ ดังนั้น } (x\rho) \cdot' (y\rho) = (xy)\rho \in X/\rho$$

$$(v) \quad ((x\rho) \cdot' (y\rho)) \cdot' (z\rho) = (xyz)\rho = (x(yz))\rho = x\rho \cdot' (yz)\rho = (x\rho) \cdot' ((y\rho) \cdot' (z\rho))$$

จาก (iv) และ (v) จะได้ว่า $(X/\rho, \cdot')$ เป็นกึ่งกรุป

$$(vi) \quad (x\rho) \cdot' (y\rho *' z\rho) = (x\rho) \cdot' ((y*z)\rho) = (x(y*z))\rho = (xy*xz)\rho = (xy)\rho *' (xz)\rho = ((x\rho) \cdot' (y\rho)) *' ((x\rho) \cdot' (z\rho))$$

$$\text{และ } (x\rho *' y\rho) \cdot' (z\rho) = ((x*y)\rho) \cdot' (z\rho) = ((x*y)z)\rho = (xz*y)z\rho = (xz)\rho *' (yz)\rho = ((x\rho) \cdot' (z\rho)) *' ((y\rho) \cdot' (z\rho))$$

จากข้างต้นจึงสรุปได้ว่า X/ρ เป็นกึ่งกรุป RG

บทนิยาม 2.12 กำหนดให้ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียกฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X'$ ว่า *สัทิสต์ฐานของกึ่งกรุป RG* (RG-semigroup homomorphism) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *สัทิสต์ฐาน* (homomorphism) ก็ต่อเมื่อ $f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$ และ $f(xy) = f(x)\circ f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 2.13 กำหนดให้ $f: X \rightarrow X'$ เป็นสัทิสต์ฐาน เมื่อ X และ X' เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า *อันตรสัทิสต์ฐานของกึ่งกรุป RG* (RG-semigroup epimorphism) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปทั่วถึง X' และจะเรียก f ว่า *สมสัทิสต์ฐานของกึ่งกรุป RG* (RG-semigroup isomorphism) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก X ไปทั่วถึง X'

ในกรณีที่มีฟังก์ชันสมสัทิสต์ฐาน $f: X \rightarrow X'$ จะกล่าวว่า X *สมสัทิสต์ฐาน* (isomorphic) กับ X' และเขียนแทนด้วย $X \cong X'$

บทตั้ง 2.3 กำหนดให้ $f: X \rightarrow X'$ เป็นสัทิสต์ฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า $f(0) = 0'$

พิสูจน์ สมมติให้ $x \in X$ จะได้ว่า $f(0) = f(x*x) = f(x)\Delta f(x) = 0'$

บทนิยาม 2.14 กำหนดให้ $f: X \rightarrow X'$ เป็นสัทิสต์ฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะเรียกเซต $\ker f = \{x \in X \mid f(x) = 0'\}$ ว่า *เคอร์เนล* (kernel) ของ f และจะเรียกเซต $\text{im } f = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ ว่า *ภาพ* (image) ของ f

ทฤษฎีบท 2.11 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG และ ρ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะได้ว่า ρ^* เป็นอันตรสัทิสต์ฐาน โดยที่ $\ker \rho^* = 0\rho$ เมื่อ $\rho^*: X \rightarrow X/\rho$ กำหนดโดย $\rho^*(x) = x\rho$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in X$

ถ้า $x = y$ แล้วจะได้ว่า $x\rho = y\rho$ นั่นคือ $\rho^*(x) = x\rho = y\rho = \rho^*(y)$ ดังนั้น ρ^* เป็นฟังก์ชัน

เนื่องจาก $\rho^*(x*y) = (x*y)\rho = x\rho *' y\rho = \rho^*(x) *' \rho^*(y)$ และ $\rho^*(xy) = (xy)\rho = (x\rho) \cdot' (y\rho) = \rho^*(x) \cdot' \rho^*(y)$ ดังนั้น ρ^*

เป็นสาคิสสัณฐาน และสำหรับทุก $x\rho \in X/\rho$ จะได้ว่ามี $x \in X$ ที่ซึ่ง $\rho^*(x) = x\rho$ ดังนั้น ρ^* เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก X ไป X/ρ จึงได้ว่า ρ^* เป็นอันตรสัณฐานและ

$$\begin{aligned}\ker \rho^* &= \{x \in X \mid \rho^*(x) = 0\rho\} \\ &= \{x \in X \mid x\rho = 0\rho\} \\ &= \{x \in X \mid x \in 0\rho\} = 0\rho\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนดให้ $f: X \rightarrow X'$ เป็นสาคิสสัณฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า $K_f = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X และจะมีฟังก์ชัน $\bar{f}: X/K_f \rightarrow X'$ ที่เป็นสาคิสสัณฐานและเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่ซึ่ง $\bar{f} \circ K_f^* = f$ เมื่อ $K_f^*: X \rightarrow X/K_f$ ที่กำหนดโดย $K_f^*(x) = xK_f$ สำหรับทุก $x \in X$ **พิสูจน์** กำหนดให้ $x, y, z \in X$ เนื่องจาก $f(x) = f(x)$ ดังนั้น $(x, x) \in K_f$ ถ้า $(x, y) \in K_f$ แล้ว $f(x) = f(y)$ นั่นคือ $f(y) = f(x)$ จึงได้ว่า $(y, x) \in K_f$ และถ้า $(x, y), (y, z) \in K_f$ แล้ว $f(x) = f(y) = f(z)$ จึงได้ว่า $(x, z) \in K_f$ เพราะฉะนั้น K_f เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X

กำหนดให้ $x, y, u, v \in X$ โดยที่ $(x, y), (u, v) \in K_f$ ดังนั้น $f(x) = f(y)$ และ $f(u) = f(v)$ จะได้ว่า $f(x * u) = f(x) \Delta f(u) = f(y) \Delta f(v) = f(y * v)$ และ $f(xu) = f(x) \circ f(u) = f(y) \circ f(v) = f(yv)$

จึงได้ว่า $(x * u, y * v) \in K_f$ และ $(xu, yv) \in K_f$ ดังนั้น K_f เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X กำหนดให้ $\bar{f}: X/K_f \rightarrow X'$ นิยามโดย $\bar{f}(xK_f) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ และให้ $xK_f, yK_f \in X/K_f$ โดยที่ $xK_f = yK_f$ จาก K_f เป็นความสัมพันธ์สมมูล จึงได้ว่า $y \in yK_f$

ดังนั้น $y \in xK_f$ นั่นคือ $(x, y) \in K_f$ ดังนั้น $f(x) = f(y)$ นั่นคือ $\bar{f}(xK_f) = \bar{f}(yK_f)$ เพราะฉะนั้น $\bar{f}$ เป็นฟังก์ชัน และสำหรับทุก $xK_f, yK_f \in X/K_f$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\bar{f}(xK_f * yK_f) &= \bar{f}((x * y)K_f) \\ &= f(x * y) = f(x) \Delta f(y) \\ &= \bar{f}(xK_f) \Delta \bar{f}(yK_f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } \bar{f}(xK_f \cdot yK_f) &= \bar{f}((xy)K_f) \\ &= f(xy) = f(x) \circ f(y) \\ &= \bar{f}(xK_f) \circ \bar{f}(yK_f)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{f}$ เป็นสาคิสสัณฐาน นอกจากนี้ ถ้า $\bar{f}(xK_f) = \bar{f}(yK_f)$ เมื่อ $xK_f, yK_f \in X/K_f$ แล้วจะได้ว่า $f(x) = f(y)$ ดังนั้น $(x, y) \in K_f$ นั่นคือ $xK_f = yK_f$ จึงได้ว่า $\bar{f}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจาก $(\bar{f} \circ K_f^*)(x) = \bar{f}(K_f^*(x)) = \bar{f}(xK_f) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ดังนั้น $\bar{f} \circ K_f^* = f$ สมมติให้ $g: X/K_f \rightarrow X'$ โดยที่ $g \circ K_f^* = f$ จะได้ว่า $g(xK_f) = g(K_f^*(x)) = (g \circ K_f^*)(x) = f(x) = \bar{f}(xK_f)$ สำหรับทุก $xK_f \in X/K_f$ ดังนั้น $g = \bar{f}$ จึงสรุปได้ว่า $\bar{f}$ เป็นฟังก์ชันสาคิสสัณฐานเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่ซึ่ง $\bar{f} \circ K_f^* = f$

บทแทรก 2.1 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ถ้า ρ และ σ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X โดยที่ $\rho \subseteq \sigma$ จะได้ว่า $\sigma/\rho = \{(x\rho, y\rho) \in X/\rho \times X/\rho \mid (x, y) \in \sigma\}$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X/ρ และจะมีฟังก์ชันสาคิสสัณฐาน φ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $(X/\rho)/(\sigma/\rho)$ ไปทั่วถึง X/ρ **พิสูจน์** กำหนดให้ $g: X/\rho \rightarrow X/\sigma$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $g(x\rho) = x\sigma$ สำหรับทุก $x\rho \in X/\rho$ สำหรับทุก $x\sigma \in X/\sigma$ จะได้ว่า $x \in X$ นั่นคือมี

$x\rho \in X/\rho$ ที่ทำให้ $g(x\rho) = x\sigma$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ $x\rho, y\rho \in X/\rho$ จะได้ว่า $g((x\rho)'(y\rho)) = g((x*y)\rho) = (x*y)\sigma = x\sigma *' y\sigma = g(x\rho)' g(y\rho)$ และ $g((x\rho)'(y\rho)) = g((xy)\rho) = (xy)\sigma = (x\sigma)'(y\sigma) = g(x\rho)' g(y\rho)$ ดังนั้น g เป็นสาคิสสัณฐาน

ต่อไปจะแสดงว่า $K_g = \sigma/\rho$ เมื่อ $K_g = \{(x\rho, y\rho) \in X/\rho \times X/\rho \mid g(x\rho) = g(y\rho)\}$ กำหนดให้ $(x\rho, y\rho) \in K_g$ จะได้ว่า $g(x\rho) = g(y\rho)$ นั่นคือ $x\sigma = g(x\rho) = g(y\rho) = y\sigma$ ดังนั้น $(x, y) \in \sigma$ จึงได้ว่า $(x\rho, y\rho) \in \sigma/\rho$ นั่นคือ $K_g \subseteq \sigma/\rho$ ในทางกลับกัน ให้ $(x\rho, y\rho) \in \sigma/\rho$ จะได้ว่า $(x, y) \in \sigma$ ดังนั้น $x\sigma = y\sigma$ นั่นคือ $g(x\rho) = x\sigma = y\sigma = g(y\rho)$ ดังนั้น $(x\rho, y\rho) \in K_g$ จึงได้ว่า $\sigma/\rho \subseteq K_g$ เพราะฉะนั้น $K_g = \sigma/\rho$ จึงทำให้ได้ว่า K_g เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X/ρ และจะมี $\varphi: (X/\rho)/K_g \rightarrow K/\sigma$ (นั่นคือ $\varphi: (X/\rho)/(\sigma/\rho) \rightarrow X/\sigma$) ซึ่งนิยามโดย $\varphi((x\rho)K_g) = x\sigma$ สำหรับทุก $x\rho \in X/\sigma$ ที่เป็นสาคิสสัณฐานและเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเพียงฟังก์ชันเดียว โดยที่ $\varphi \circ K_g^* = g$ เมื่อ $K_g^*: (X/\rho) \rightarrow (X/\rho)/K_g$ สำหรับทุก $x\sigma \in X/\sigma$ จะได้ว่ามี $x\rho \in X/\rho$ ที่ทำให้ $g(x\rho) = x\sigma$ นั่นคือจะมี $(x\rho)K_g \in (X/\rho)/K_g$ ที่ทำให้ $\varphi((x\rho)K_g) = g(x\rho) = x\sigma$ ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนดให้ $f: X \rightarrow X'$ เป็นสาคิสสัณฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$ เป็นกึ่งกรุป RG จะได้ว่า $\ker f$ เป็น RG-ไอดิลของ X พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in X$ และ $a \in \ker f$ ดังนั้น $a \in X$ และ $f(a) = 0'$ เนื่องจาก $f(ax) = f(a) \circ f(x) = 0' \circ f(x) = 0'$ และ $f(xa) = f(x) \circ f(a) = f(x) \circ 0' = 0'$

ดังนั้น $ax, xa \in \ker f$ สมมติให้ $x*y \in \ker f$ และ $0*x \in \ker f$ จะได้ว่า $f(x*y) = 0' = f(0*x)$ โดยบทตั้ง 1.1 จะได้ว่า $f(0*y) = f((x*y)*(x*0)) = f(x*y)\Delta f(x*0) = f(x*0) = f(0)\Delta f(x) = f(0*x) = 0'$ ดังนั้น $0*y \in \ker f$ จึงสรุปได้ว่า $\ker f$ เป็น RG-ไอดิลของ X

กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X และ A เป็น RG-ไอดิลของ X กำหนดความสัมพันธ์ " $\sim_A$ " บน X ดังนี้ $x \sim_A y$ ก็ต่อเมื่อ $x*y \in A$ และ $y*x \in A$ จะได้ว่า $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X และ $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์เข้ากันได้ทั้งทางขวาและทางซ้าย

โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน X จะเขียนแทนชั้นสมมูลของ $x \in X$ ภายใต้ความสัมพันธ์ $\sim_A$ ด้วย A_x กล่าวคือ $A_x = \{y \in X \mid x \sim_A y\}$ และจะเขียนแทนเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดของ X ภายใต้ความสัมพันธ์ $\sim_A$ ด้วย X/A กล่าวคือ $X/A := \{A_x \mid x \in X\}$ จะเห็นได้ว่า $A_x = A_y$ ก็ต่อเมื่อ $x \sim_A y$ และจะได้ว่า

$$A_0 = \{y \in X \mid 0 \sim_A y\} = \{y \in X \mid 0*y \in A \text{ และ } y*0 \in A\}$$

จะเห็นว่า ถ้า A เป็น RG-ไอดิล ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ A แล้ว $1 \in A$ ดังนั้น $0*1 \in A$ และ $1*0 = 1 \in A$ จึงได้ว่า $1 \in A_0$ นอกจากนี้ยังได้อีกว่าถ้า X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X และ A เป็น RG-ไอดิลของ X แล้ว $(X/A; \otimes, \odot, A_0)$ เป็นกึ่งกรุป RG เมื่อ $\otimes$ และ $\odot$ เป็นการดำเนินการบน X/A ที่กำหนดโดย

$$A_x \otimes A_y = A_{x*y} \text{ และ } A_x \odot A_y = A_{x \cdot y}$$

สำหรับทุก $A_x, A_y \in X/A$

ทฤษฎีบท 2.14 กำหนดให้ $f: X \rightarrow X'$ เป็นสาคิส
สัณฐาน เมื่อ $(X; *, \cdot, 0)$ และ $(X'; \Delta, \circ, 0')$
เป็นกึ่งกรุป RG ที่มีเอกลักษณ์คือ 1 และ 1' ตามลำดับ
จะได้ว่า ถ้า A เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $1 \in A$
แล้ว $A/\ker(f \cap A) \cong f(A)$

พิสูจน์ กำหนดให้ A เป็น RG-ไอดิลของ X และ
 $B = \ker f \cap A$

สมมติให้ $b \in B$ และ $x, y \in A$ จะได้ว่า $b \in \ker f$
และ $b \in A$ จาก A เป็น RG-ไอดิลของ X

ดังนั้น $xb \in A$ และ $bx \in A$ จาก $b \in \ker f$
จึงได้ว่า $f(b) \in X'$ โดยที่ $f(b) = 0'$

เนื่องจาก $f(xb) = f(x) \circ f(b) = f(x) \circ 0' = 0'$
และ $f(bx) = f(b) \circ f(x) = 0' \circ f(x) = 0'$

ดังนั้น $xb, bx \in \ker f$ จึงได้ว่า $xb \in \ker f \cap A$
และ $bx \in \ker f \cap A$ นั่นคือ $xb \in B$ และ $bx \in B$

สมมติให้ $x * y \in B$ และ $0 * x \in B$ จะได้ว่า
 $x * y, 0 * x \in \ker f$ และ $x * y, 0 * x \in A$

นั่นคือ $f(x * y) = 0' = f(0 * x)$ จาก A เป็น
RG-ไอดิลของ X จึงได้ว่า $0 * y \in A$

และจะได้ว่า $f(0 * y) = f((x * y) * (x * 0))$
 $= f(x * y) \Delta f(x * 0) = f(0) \Delta f(x)$

$= f(0 * x) = 0'$

นั่นคือ $0 * y \in \ker f$ ดังนั้น $0 * y \in \ker f \cap A$
 $= B$ ฉะนั้น B เป็น RG-ไอดิลของ A

กำหนดให้ $\psi: A/B \rightarrow X'$ นิยามโดย
 $\psi(B_x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า $B_x, B_y \in A/B$ โดยที่ $B_x = B_y$ แล้วจะได้ว่า
 $x \in B_y$ นั่นคือ $x \sim_B y$

เนื่องจาก $x * y \in B$ และ $y * x \in B$ ดังนั้น $x * y \in$
 $\ker f$ และ $y * x \in \ker f$ โดยที่ $x * y, y * x \in A$
จึงได้ว่า $f(x * y) = 0 = f(y * x)$ นั่นคือ $f(x) \Delta f(y)$
 $= 0' = f(y) \Delta f(x)$

จึงทำให้ $f(x) = f(y)$ ดังนั้น $\psi(B_x) = f(x)$
 $= f(y) = \psi(B_y)$ นั่นคือ ψ เป็นฟังก์ชัน และจะเห็นว่า

$$\psi(B_x \otimes B_y) = \psi(B_{x * y}) = f(x * y)$$

$$= f(x) \Delta f(y) = \psi(B_x) \Delta \psi(B_y)$$

$$\text{และ } \psi(B_x \odot B_y) = \psi(B_{xy}) = f(xy) \\ = f(x) \circ f(y) = \psi(B_x) \circ \psi(B_y) \text{ สำหรับทุก } \\ B_x, B_y \in A/B$$

ดังนั้น ψ เป็นสาคิสสัณฐาน

$$\text{ถ้า } B_x, B_y \in A/B \text{ โดยที่ } \psi(B_x) = \psi(B_y)$$

จะได้ว่า $f(x) = f(y)$ เมื่อ $x, y \in A$

จาก $f(x) = f(y)$ จะได้ว่า $f(x) \Delta f(y) = 0$

และ $f(y) \Delta f(x) = 0$

ดังนั้น $f(x * y) = 0$ และ $f(y * x) = 0$ จะได้ว่า

$x * y \in \ker f$ และ $y * x \in \ker f$

เนื่องจาก $x * y \in \ker f, y * x \in \ker f$ จะได้

$x * y \in A$ จาก $x * y \in A$ จะได้ว่า $0 * (x * y) \in A$

นั่นคือ $y * x \in A$ ดังนั้น $x * y \in \ker f \cap A$ และ

$y * x \in \ker f \cap A$ นั่นคือ $x * y \in B$ และ

$y * x \in B$

จึงได้ว่า $x \sim_B y$ นั่นคือ $y \in B_x$ จึงทำให้ $B_x = B_y$

ดังนั้น ψ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สำหรับทุก $a \in \text{im } \psi$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $a = \psi(B_x)$

นั่นคือมี $B_x \in A/B$ โดยที่ $\psi(B_x) = a$

ดังนั้น ψ เป็นฟังก์ชันจาก A/B ไปทั่วถึง $\text{im } \psi$

เพราะฉะนั้น $A/B \cong \text{im } \psi$

เนื่องจาก $\text{im } \psi = \{\psi(B_x) | x \in A\} = \{f(x) |$
 $x \in A\} = f(A)$ ดังนั้น $A/\ker(f \cap A) \cong f(A)$

บทแทรก 2.2 กำหนดให้ X และ X' เป็นกึ่งกรุป RG

ถ้า $f: X \rightarrow X'$ เป็นสาคิสสัณฐานจาก X ไปทั่วถึง

X' แล้ว $X/\ker f \cong \text{im } f$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\ker f \subseteq X$ จะได้ว่า $\ker f$

$= \ker f \cap X$ โดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $X/\ker$

$(f \cap X) \cong f(X) \cong \text{im } f$ นั่นคือ $X/\ker$

$f \cong \text{im } f$

บทตั้ง 2.4 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X ถ้า M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$ แล้ว MN เป็น RG-ไอดิลของ X เมื่อ $MN = \{mn \mid m \in M \text{ และ } n \in N\}$

พิสูจน์ สมมติให้ M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$

ให้ $x, y \in X$ และ $mn \in MN$ จึงได้ว่า $m \in M$ และ $n \in N$ เนื่องจาก $nx \in N$ และ $xm \in M$ จะได้ว่า $(mn)x = m(nx) \in MN$ และ $x(mn) = (xm)n \in MN$ ดังนั้น MN เป็นเซตที่เสถียรของ X

สมมติให้ $x * y \in MN$ และ $0 * x \in MN$ ดังนั้น $x * y = m_1 n_1$ และ $0 * x = m_2 n_2$ สำหรับบาง $m_1, m_2 \in M$ และ $n_1, n_2 \in N$ เนื่องจาก M และ N เป็นเซตที่เสถียร จะได้ว่า $x * y, 0 * x \in M$ และ $x * y, 0 * x \in N$ เนื่องจาก M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X จะได้ว่า $0 * y \in M$ และ $0 * y \in N$ จะเห็นได้ว่าถ้า $1 \in M$ แล้ว $0 * y = 1(0 * y) \in MN$ และถ้า $1 \in N$ แล้ว $0 * y = (0 * y)1 \in MN$

ดังนั้น MN เป็น RG-ไอดิลของ X

ทฤษฎีบท 2.15 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X ถ้า M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$ แล้ว $M/(M \cap N) \cong MN/N$

พิสูจน์ สมมติให้ M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $1 \in M$ หรือ $1 \in N$ จะได้ว่า MN เป็น RG-ไอดิลของ X กำหนดให้ $f: M \rightarrow MN/N$ นิยามโดย $f(m) = N_m$ สำหรับทุก $m \in M$

ถ้า $x, y \in M$ โดยที่ $x = y$ แล้วจะได้ว่า $x * y = x * x = 0 \in N$ และ $y * x = x * x = 0 \in N$ นั่นคือ $x \sim_N y$ และ $N_x = N_y$ จึงได้ว่า $f(x) = N_x = N_y = f(y)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

เนื่องจาก $f(x * y) = N_{x*y} = N_x \otimes N_y$

$$= f(x) \otimes f(y) \text{ และ } f(xy) = N_{xy} = N_x \odot N_y = f(x) \odot f(y)$$

ดังนั้น f เป็นสาคูสัจฐาน โดยบทแทรก 2.2 จะได้ว่า $\text{im} f \cong M/\ker f$

ให้ $x \in \ker f$ จะได้ว่า $N_x = f(x) = N_0$

นั่นคือ $x \sim_N 0$ ดังนั้น $x * 0 = x \in N$

เนื่องจาก $x \in \ker f \subseteq M$ จะได้ว่า $x \in M \cap N$ ในทางกลับกันถ้าให้ $y \in M \cap N$ จะได้ว่า $y \in M$ และ $y \in N$ โดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า $0 * y \in N$ นั่นคือ $y * 0 = y \in N$ และ $0 * y \in N$ ดังนั้น $y \sim_N 0$ และ $N_y = N_0$ นั่นคือ $f(y) = N_0$ และ $y \in \ker f$ จึงได้ว่า $M \cap N \subseteq \ker f$ ดังนั้น $M \cap N = \ker f$

ให้ $N_y \in MN/N$ จะได้ว่า $N_y = N_{mn}$

สำหรับบาง $m \in M$ และ $n \in N$

เนื่องจาก M เป็น RG-ไอดิลของ X และ $mn \in M$ จะได้ว่า $mn = m_1$ สำหรับบาง $m_1 \in M$ ดังนั้น $N_y = N_{mn} = N_{m_1} = f(m_1)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก M ไปทั่วถึง MN/N

ดังนั้น $\text{im} f = MN$ จึงสรุปได้ว่า $M/(M \cap N) \cong MN/N$

ทฤษฎีบท 2.16 กำหนดให้ X เป็นกึ่งกรุป RG ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ของ X ถ้า M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $M \subseteq N$ แล้ว $\frac{X/M}{N/M} \cong X/N$

พิสูจน์ สมมติให้ M และ N เป็น RG-ไอดิลของ X โดยที่ $M \subseteq N$ และกำหนดให้ $f: X/M \rightarrow X/N$ นิยามโดย $f(M_x) = N_x$ สำหรับทุก $M_x \in X/M$ ให้ $M_x, M_y \in X/M$ ถ้า $M_x = M_y$ แล้ว $x \sim_M y$ นั่นคือ $x * y \in M$ และ $y * x \in M$ เนื่องจาก $M \subseteq N$ ดังนั้น $x * y \in N$ และ $y * x \in N$ นั่นคือ $x \sim_N y$ ดังนั้น $N_x = N_y$ จึงได้ว่า $f(M_x) = N_x = N_y = f(M_y)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน เนื่องจาก $f(M_x \otimes M_y) = f(M_{x*y}) = N_{x*y} = N_x \otimes N_y = f(M_x) \otimes f(M_y)$

และ $f(M_x \odot M_y) = f(M_{xy}) = N_{xy}$
 $= N_x \odot N_y = f(M_x) \odot f(M_y)$
 ดังนั้น f เป็นสาคิสมฐาน โดยบทแทรก 2.2 จะได้ว่า
 $\text{im} f \cong (X/M)/\ker f$
 ให้ $M_x \in \ker f$ จะได้ว่า $N_0 = f(M_x)$
 $= N_x$ นั่นคือ $0 \sim_N x$ จึงได้ว่า $x = x * 0 \in N$ และ
 ทำให้ได้ว่า $M_x \in N/M$ ดังนั้น $\ker f \subseteq N/M$
 ในทางกลับกัน ถ้า $M_x \in N/M$ จะได้ว่า $x \in N$
 โดยบทตั้ง 2.2 จึงได้ว่า $0 * x \in N$ และ $x = x * 0 \in N$
 นั่นคือ $x \sim_N 0$ ดังนั้น $N_0 = N_x \in f(M_x)$ นั่นคือ
 $M_x \in \ker f$ จึงทำให้ได้ว่า $N/M \subseteq \ker f$ ดังนั้น
 $N/M = \ker f$ สมมติให้ $N_x \in X/N$ จะได้ว่า

$x \in X$ และ $M_x \in X/M$ โดยที่ $f(M_x) = N_x$
 นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันจาก X/M ไปทั่วถึง X/N ดังนั้น
 $\text{im} f \cong X/N$ จึงสรุปได้ว่า $\frac{X/M}{N/M} \cong X/N$

6. References

- [1] Kim, K.H., 2006, On structure of KS-semigroups, International Mathematical Forum. 1(2): 67-76.
- [2] Omar, R.A.K., 2014, On RG-Algebra, Pure Mathematical Sciences. 3(2): 59-70.