P-ISSN 0858-4435
E-ISSN 2651-1231

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี Homepage : *http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj*
ปีที่ 31 ฉบับที่ 3 (พฤษภาคม-มิถุนายน 2566) หน้า [46-56]

สูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 บางรูปแบบ
Formulas of the Exponential Matrix for Some Real Semi Skew-Symmetric Matrices of Order 4

ปุณชญา พัฒนางกูร*, กรกนก พร้อมจะบก, กชพร พร้อมจะบก, วรัญญา วงษ์อุรา
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120
Poonchayar Patthanangkoor*, Konkanok Promjabok, Kotchaporn Promjabok, Warunya Wong-u-ra
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 1 February 2023; Received in revised 25 May 2023; Accepted 12 June 2023

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 บางรูปแบบ

คำสำคัญ: เมทริกซ์เลขชี้กำลัง; เมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือน; สูตรของซิลเวสเตอร์

Abstract

In this paper the formula of the exponential matrix e^A for some real semi skew-symmetric matrix A of order 4 is derived.

Keywords: Exponential matrix; Semi skew–symmetric matrix; Sylvester's formula

***ผู้รับผิดชอบบทความ:** poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th **doi:** 10.14456/tstj.2023.44

1. บทนำ

การคำนวณฟังก์ชันเมทริกซ์เป็นหนึ่งในปัญหาที่ท้าทายมากที่สุดในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข ฟังก์ชันเมทริกซ์หนึ่งที่น่าสนใจ คือ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ A ที่เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ (หรือเรียก A สั้น ๆ ว่าเมทริกซ์อันดับ n) เมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A (the exponential of A) นิยามโดย

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

เมื่อ $A^0 = I_n$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n

ในปี ค.ศ. 1978 C. Moler และ C. Van Loan ได้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีประมาณค่าของ e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์อันดับ n ต่อมาในปี ค.ศ. 1998 E. Celledoni และ A. Iserles ได้เผยแพร่ผลงานวิจัย 2 ชิ้น เกี่ยวกับการประมาณค่าของเมทริกซ์เลขชี้กำลังในกรุปลี และเมื่อปี ค.ศ. 2000 ปัญหาดังกล่าวได้ถูกนำมาศึกษาอีกครั้งเมื่อวิธีการกรุปลี (Lie group method) ถูกนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งวิธีการนี้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามารถหาผลเฉลยได้ในพีชคณิตลี โดยอาศัยฟังก์ชันพิกัดที่นิยามจากพีชคณิตไปยังกรุปที่สัมพันธ์กัน ในการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลังนั้น สูตรของโรดรีก (Rodrigues formula) ([2]) เป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณ e^A เมื่อ $A \neq \overline{0}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน (นั่นคือ $A^T = -A$) อันดับ 3 ที่มีสมาชิกจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ -u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

แล้วสูตรของโรดรีก คือ

$$e^A = I_3 + \frac{\sin\alpha}{\alpha} A + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} A^2$$

เมื่อ $\alpha = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

เมื่อปี ค.ศ. 2001 T. Politi ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ซึ่งพบว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ในรูปต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ -u_6 & 0 & u_4 & u_2 \\ -u_5 & -u_4 & 0 & u_1 \\ -u_3 & -u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แตกต่างกันทั้งหมด แล้วจะสามารถหาสูตรของ e^A ได้โดยอาศัยสูตรของซิลเวสเตอร์ (Sylvester's formula) ซึ่งจะได้ว่า

$$e^A = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$$

เมื่อ $a = \cos\alpha + c\alpha^2, b = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + d\alpha^2$

, $c = \dfrac{\cos\mu - \cos\alpha}{\alpha^2 - \mu^2}$ และ

$$d = \frac{\alpha\sin\mu - \mu\sin\alpha}{\alpha\mu(\alpha^2 - \mu^2)}$$

โดยที่ I_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ 4,

$$\alpha = \sqrt{\left|\frac{a_2 - \sqrt{a_2{}^2 - 4a_0}}{2}\right|}$$ และ

$$\mu = \sqrt{\frac{a_2 + \sqrt{a_2{}^2 - 4a_0}}{2}}$$

เมื่อ $a_2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2$

และ $a_0 = \left(u_1u_6 + u_3u_4 - u_2u_5\right)^2$

สำหรับบทความวิจัยฉบับนี้จะศึกษาการหาสูตรเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือนในบางรูปแบบ ดังบทนิยามต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 1.1</u> กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n จะเรียก A ว่าเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือน (semi skew-symmetric matrix) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์เครื่องหมาย (อันดับ n) ε ที่ $A^T=-\varepsilon A\varepsilon$ เมื่อเมทริกซ์เครื่องหมาย (signature matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 หรือ – 1 เท่านั้น ส่วนสมาชิกอื่นเป็น 0

ในทำนองเดียวกัน สูตรของโรดรีกยังเป็นสูตรแบบชัดแจ้งที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์กึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ที่มีสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กล่าวคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 3 ในรูปต่อไปนี้

$$A=\begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือ $A^T=-\varepsilon A\varepsilon$ เมื่อ

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วโดยอาศัยสูตรของโรดรีก ([3]) จะได้ว่า

ถ้า $\alpha=-u_1^2+u_2^2+u_3^2>0$ แล้ว

$$e^A=\mathrm{I}_3+\frac{\sinh\alpha}{\alpha}A+\frac{(\cosh\alpha-1)}{\alpha^2}A^2$$

และ ถ้า $\alpha=-u_1^2+u_2^2+u_3^2<0$ แล้ว

$$e^A=\mathrm{I}_3+\frac{\sin\alpha}{\alpha}A+\frac{(1-\cos\alpha)}{\alpha^2}A^2$$

ในปี ค.ศ. 2005 L. Kula, M.K. Karacan และ Y. Yayli ได้ศึกษาการหาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ในรูปต่อไปนี้

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -u_6 & u_5 & u_3 \\ u_6 & 0 & u_4 & -u_2 \\ u_5 & u_4 & 0 & -u_1 \\ u_3 & -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือ $A^T=-\varepsilon A\varepsilon$ เมื่อ

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าในกรณีที่ ε เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 ที่อยู่ในรูป

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

และ A เป็นเมทริกซ์อันดับ 4 ที่ซึ่ง $A^T=-\varepsilon A\varepsilon$ จะได้ว่าเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 รูปแบบเดียวกันกับเมทริกซ์ A ในงานวิจัยของ L. Kula, M.K. Karacan และ Y. Yayli

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง สำหรับเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ในรูปแบบอื่น กล่าวคือ จะศึกษาสูตรของ e^A เมื่อ $A\neq\overline{0}$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่

มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด โดยที่ $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 ที่กำหนดโดย

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. ผลงานวิจัย

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 โดยที่ $A \neq \overline{0}$ นั่นคือ $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 จะได้ว่า A จะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ u_6 & 0 & u_4 & -u_2 \\ -u_5 & u_4 & 0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

เมื่อ $$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

และ A จะอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & u_6 & u_5 & u_3 \\ u_6 & 0 & u_4 & u_2 \\ u_5 & -u_4 & 0 & u_1 \\ -u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

เมื่อ $$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$ โดยการคำนวณจึงทำให้ได้บทตั้งดังต่อไปนี้

<u>บทตั้ง 2.1</u> กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) จะได้ว่า พหุนามลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A คือ

$$p(\lambda)=\lambda^4+k_2\lambda^2+k_0$$

เมื่อ (i) ถ้า A เป็นเมทริกซ์นิยามดัง (2.1) แล้ว $k_2=u_2^2+u_5^2-u_1^2-u_3^2-u_4^2-u_6^2$ และ $k_0=(u_1u_6-u_2u_5-u_3u_4)^2$

และ (ii) ถ้า A เป็นเมทริกซ์นิยามดัง (2.2) แล้ว $k_2=u_3^2+u_4^2-u_1^2-u_2^2-u_5^2-u_6^2$ และ $k_0=(u_1u_6-u_2u_5+u_3u_4)^2$

<u>บทตั้ง 2.2</u> ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) แล้ว $p(-\lambda)=p(\lambda)$

จากบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า ถ้า $p(\lambda)=\lambda^4+k_2\lambda^2+k_0=0$ แล้ว λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าเฉพาะทั้ง 4 ค่าของเมทริกซ์ A นั้นจะอยู่ในรูปของ k_0 และ k_2 ดังนั้นตลอดการศึกษาบทความวิจัยฉบับนี้ จึงกำหนดค่าของ k_0 และ k_2 ดังบทตั้ง 2.1 นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่า $k_0\geq 0$ ดังนั้น ถ้า $k_2^2-4k_0>0$ แล้ว $k_2\neq 0$

<u>บทตั้ง 2.3</u> กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) จะได้ว่า ค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 ของเมทริกซ์ A เป็นดังนี้

(1) ถ้า $k_2^2-4k_0>0$ และ $k_2>0$ แล้ว $\lambda_1=i\alpha_1, \lambda_2=-i\alpha_1, \lambda_3=i\mu_1$ และ $\lambda_4=-i\mu_1$ เมื่อ $\alpha_1=\sqrt{\dfrac{k_2-\sqrt{k_2^2-4k_0}}{2}}$ และ $\mu_1=\sqrt{\dfrac{k_2+\sqrt{k_2^2-4k_0}}{2}}$

(2) ถ้า $k_2^2-4k_0>0$ และ $k_2<0$ แล้ว $\lambda_1=\alpha_2, \lambda_2=-\alpha_2, \lambda_3=\mu_2$ และ $\lambda_4=-\mu_2$ เมื่อ $\alpha_2=\sqrt{\dfrac{-k_2+\sqrt{k_2^2-4k_0}}{2}}$ และ $\mu_2=\sqrt{\dfrac{-k_2-\sqrt{k_2^2-4k_0}}{2}}$

(3) ถ้า $k_2^2-4k_0<0$ แล้ว $\lambda_1=z, \lambda_2=-z, \lambda_3=\overline{z}$ และ $\lambda_4=-\overline{z}$ เมื่อ $z=u+iv$ โดยที่ $u=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0}-k_2}$ และ $v=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0}+k_2}$

(4) ถ้า $k_2^2-4k_0=0$ และ $k_2>0$ แล้ว $\lambda_1=\lambda_3=i\mu$ และ $\lambda_2=\lambda_4=-i\mu$ เมื่อ $\mu=\sqrt{\dfrac{k_2}{2}}$

(5) ถ้า $k_2^2-4k_0=0$ และ $k_2>0$ แล้ว $\lambda_1=\lambda_3=\alpha$ และ $\lambda_2=\lambda_4=-\alpha$ เมื่อ $\alpha=\sqrt{\dfrac{-k_2}{2}}$

(6) ถ้า $k_2^2-4k_0=0$ และ $k_2>0$ แล้ว $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

บทความวิจัยนี้จะศึกษาสูตรของ e^A เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด กล่าวคือ จะศึกษาในกรณีที่ $k_2^2 - 4k_0 > 0$ โดยที่ $k_0 \neq 0$ และในกรณีที่ $k_2^2 - 4k_0 < 0$ เท่านั้น การพิจารณาหาสูตรของ e^A เมื่อ A มีค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 ที่แตกต่างกันทั้งหมดนั้น เราสามารถใช้สูตรของซิลเวสเตอร์ (Sylvester's formula) ([6]) ได้ ซึ่งจะได้ว่า

$$e^A = \sum_{i=1}^{4} e^{\lambda_i} A_i \tag{2.3}$$

เมื่อ A_i คือ โฟรเบนิอุสโคแวเรียนต์ของ A ที่กำหนดโดย $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\left(A - \lambda_j \mathrm{I}_4\right)$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ จะเห็นได้ว่า A_i อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ A สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ ซึ่งทำให้ e^A อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ A เช่นกัน จากสมการ (2.3) จะเห็นว่าการคำนวณหา e^A นั้น ต้องคำนวณหาสัมประสิทธิ์ A_1, A_2, A_3 และ A_4 แต่เนื่องจาก e^A อยู่ในรูปพหุนามดีกรี 3 ของ A ดังนั้น จึงจะคำนวณหา e^A โดยสมมติให้ $e^A = a\mathrm{I}_4 + bA + cA^2 + dA^3$ และถ้า x_i เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_i สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ (นั่นคือ $Ax_i = \lambda_i x_i$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$) แล้วจะได้ว่า

$$e^A x_i = ax_i + b\lambda_i x_i + c\lambda_i^{\,2} x_i + d\lambda_i^{\,3} x_i \qquad \text{สำหรับทุก } i = 1,2,3,4$$

เนื่องจาก $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \mathrm{I}_4 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$

ดังนั้น สำหรับทุก $i = 1,2,3,4$ จะได้ว่า

$$e^A x_i = \left(\mathrm{I}_4 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\right)x_i = \left(\mathrm{I}_4 + \lambda_i + \frac{1}{2!}\lambda_i^{\,2} + \frac{1}{3!}\lambda_i^{\,3} + \ldots\right)x_i = e^{\lambda_i} x_i$$

จึงได้ว่า $$e^{\lambda_i} x_i = e^A x_i = ax_i + b\lambda_i x_i + c\lambda_i^2 x_i + d\lambda_i^3 x_i$$

$$= \left(a + b\lambda_i + c\lambda_i^2 + d\lambda_i^3\right)x_i \qquad \text{สำหรับทุก } i = 1,2,3,4$$

ดังนั้น $$e^{\lambda_i} = a + b\lambda_i + c\lambda_i^2 + d\lambda_i^3 \qquad \text{สำหรับทุก } i = 1,2,3,4 \tag{2.4}$$

จากการใช้สูตรของซิลเวสเตอร์นี้ จะนำไปสู่การพิสูจน์สูตรของ e^A เมื่อ A มีค่าเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) และ $k_2^2 - 4k_0 > 0$ โดยที่ $k_2 > 0$ และ $k_0 > 0$ จะได้ว่า

$$e^A = a_1 I_4 + b_1 A + c_1 A^2 + d_1 A^3 \tag{2.5}$$

เมื่อ $$a_1=\frac{\alpha_1^2\cos\mu_1-\mu_1^2\cos\alpha_1}{\alpha_1^2-\mu_1^2},\qquad b_1=\frac{\alpha_1^3\sin\mu_1-\mu_1^3\sin\alpha_1}{\alpha_1\mu_1\left(\alpha_1^2-\mu_1^2\right)}$$

$$c_1=\frac{\cos\mu_1-\cos\alpha_1}{\alpha_1^2-\mu_1^2}\quad \text{และ}\quad d_1=\frac{\alpha_1\sin\mu_1-\mu_1\sin\alpha_1}{\alpha_1\mu_1\left(\alpha_1^2-\mu_1^2\right)} \tag{2.6}$$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ $k_2^2-4k_0>0$ โดยที่ $k_2>0$ และ $k_0>0$ โดยบทตั้ง 2.3 (1) จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้ $\lambda_1=i\alpha_1$, $\lambda_2=-i\alpha_1$, $\lambda_3=i\mu_1$ และ $\lambda_4=-i\mu_1$ โดยที่

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{k_2-\sqrt{k_2^2-4k_0}}{2}}\quad \text{และ}\quad \mu_1=\sqrt{\frac{k_2+\sqrt{k_2^2-4k_0}}{2}}$$

เมื่อแทนค่า λ_i เมื่อ $i=1,2,3,4$ ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1}=e^{i\alpha_1}=a_1+ib_1\alpha_1-c_1\alpha_1^2-id_1\alpha_1^3 \tag{1}$$

$$e^{\lambda_2}=e^{-i\alpha_1}=a_1-ib_1\alpha_1-c_1\alpha_1^2+id_1\alpha_1^3 \tag{2}$$

$$e^{\lambda_3}=e^{i\mu_1}=a_1+ib_1\mu_1-c_1\mu_1^2-id_1\mu_1^3 \tag{3}$$

$$e^{\lambda_4}=e^{-i\mu_1}=a_1-ib_1\mu_1-c_1\mu_1^2+id_1\mu_1^3 \tag{4}$$

โดยสูตรของออยเลอร์ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ และ $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ จะได้ว่า

$$\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1=a_1+ib_1\alpha_1-c_1\alpha_1^2-id_1\alpha_1^3 \tag{5}$$

$$\cos\alpha_1-i\sin\alpha_1=a_1-ib_1\alpha_1-c_1\alpha_1^2+id_1\alpha_1^3 \tag{6}$$

$$\cos\mu_1+i\sin\mu_1=a_1+ib_1\mu_1-c_1\mu_1^2-id_1\mu_1^3 \tag{7}$$

$$\cos\mu_1-i\sin\mu_1=a_1-ib_1\mu_1-c_1\mu_1^2+id_1\mu_1^3 \tag{8}$$

นำสมการ (5) + (6) จะได้ $2\cos\alpha_1=2a_1-2c_1\alpha_1^2$ หรือ $\cos\alpha_1=a_1-c_1\alpha_1^2$ (9)

นำสมการ (7) + (8) จะได้ $2\cos\mu_1=2a_1-2c_1\mu_1^2$ หรือ $\cos\mu_1=a_1-c_1\mu_1^2$ (10)

นำสมการ (5) – (6) จะได้ $2i\sin\alpha_1=2ib_1\alpha_1-2id_1\alpha_1^3$ หรือ $\sin\alpha_1=b_1\alpha_1-d_1\alpha_1^3$ (11)

นำสมการ (7) – (8) จะได้ $2i\sin\mu_1=2ib_1\mu_1-2id_1\mu_1^3$ หรือ $\sin\mu_1=b_1\mu_1-d_1\mu_1^3$ (12)

จากการแก้ระบบสมการ (9) - (12) จะได้

$$a_1=\frac{\alpha_1^2\cos\mu_1-\mu_1^2\cos\alpha_1}{\alpha_1^2-\mu_1^2},\qquad b_1=\frac{\alpha_1^3\sin\mu_1-\mu_1^3\sin\alpha_1}{\alpha_1\mu_1\left(\alpha_1^2-\mu_1^2\right)}$$

$$c_1=\frac{\cos\mu_1-\cos\alpha_1}{\alpha_1^2-\mu_1^2}\quad \text{และ}\quad d_1=\frac{\alpha_1\sin\mu_1-\mu_1\sin\alpha_1}{\alpha_1\mu_1\left(\alpha_1^2-\mu_1^2\right)}$$

__ทฤษฎีบท 2.5__ กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) และ $k_2^2 - 4k_0 > 0$ โดยที่ $k_2 < 0$ และ $k_0 > 0$ จะได้ว่า $e^A = a_2 \mathrm{I}_4 + b_2 A + c_2 A^2 + d_2 A^3$ (2.7)

เมื่อ $$a_2 = \frac{\mu_2^2 \cosh\alpha_2 - \alpha_2^2 \cosh\mu_2}{\mu_2^2 - \alpha_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2^3 \sinh\mu_2 - \mu_2^3 \sinh\alpha_2}{\alpha_2\mu_2\left(\alpha_2^2 - \mu_2^2\right)}$$

$$c_2 = \frac{\cosh\alpha_2 - \cosh\mu_2}{\alpha_2^2 - \mu_2^2} \quad \text{และ} \quad d_2 = \frac{\mu_2 \sinh\alpha_2 - \alpha_2 \sinh\mu_2}{\alpha_2\mu_2\left(\alpha_2^2 - \mu_2^2\right)} \tag{2.8}$$

__บทพิสูจน์__ กำหนดให้ $k_2^2 - 4k_0 > 0$ โดยที่ $k_2 < 0$ และ $k_0 > 0$ โดยบทตั้ง 2.3 (2) จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้ $\lambda_1 = \alpha_2$, $\lambda_2 = -\alpha_2$, $\lambda_3 = \mu_2$ และ $\lambda_4 = -\mu_2$ โดยที่

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}} \quad \text{และ} \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_0}}{2}}$$

เมื่อแทนค่า λ_i เมื่อ $i = 1,2,3,4$ ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^{\alpha_2} = a_2 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_2^2 + d_2\alpha_2^3 \tag{13}$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-\alpha_2} = a_2 - b_2\alpha_2 + c_2\alpha_2^2 - d_2\alpha_2^3 \tag{14}$$

$$e^{\lambda_3} = e^{\mu_2} = a_2 + b_2\mu_2 + c_2\mu_2^2 + d_2\mu_2^3 \tag{15}$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-\mu_2} = a_2 - b_2\mu_2 + c_2\mu_2^2 - d_2\mu_2^3 \tag{16}$$

นำสมการ (13) + (14) จะได้ $e^{\alpha_2} + e^{-\alpha_2} = 2a_2 + 2c_2\alpha_2^2$ หรือ $\cosh\alpha_2 = a_2 + c_2\alpha_2^2$ (17)

นำสมการ (15) + (16) จะได้ $e^{\mu_2} + e^{-\mu_2} = 2a_2 + 2c_2\mu_2^2$ หรือ $\cosh\mu_2 = a_2 + c_2\mu_2^2$ (18)

นำสมการ (17) - (18) จะได้ $e^{\alpha_2} - e^{-\alpha_2} = 2b_2\alpha_2 + 2d_2\alpha_2^3$ หรือ $\sinh\alpha_2 = b_2\alpha_2 + d_2\alpha_2^3$ (19)

นำสมการ (15) - (16) จะได้ $e^{\mu_2} - e^{-\mu_2} = 2b_2\mu_2 + 2d_2\mu_2^3$ หรือ $\sinh\mu_2 = b_2\mu_2 + d_2\mu_2^3$ (20)

จากการแก้ระบบสมการ (17) - (20) จะได้

$$a_2 = \frac{\mu_2^2 \cosh\alpha_2 - \alpha_2^2 \cosh\mu_2}{\mu_2^2 - \alpha_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2^3 \sinh\mu_2 - \mu_2^3 \sinh\alpha_2}{\alpha_2\mu_2\left(\alpha_2^2 - \mu_2^2\right)}$$

$$c_2 = \frac{\cosh\alpha_2 - \cosh\mu_2}{\alpha_2^2 - \mu_2^2} \quad \text{และ} \quad d_2 = \frac{\mu_2 \sinh\alpha_2 - \alpha_2 \sinh\mu_2}{\alpha_2\mu_2\left(\alpha_2^2 - \mu_2^2\right)}$$

<u>ทฤษฎีบท 2.6</u> กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่นิยามดัง (2.1) หรือ (2.2) และ $k_2^2 - 4k_0 < 0$

จะได้ว่า
$$e^A = a_3 \mathrm{I}_4 + b_3 A + c_3 A^2 + d_3 A^3 \tag{2.9}$$

เมื่อ $a_3 = \dfrac{1}{2uv}\left(2uv\cosh u\cos v - \left(u^2 - v^2\right)\sinh u\sin v\right)$

$$b_3 = \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\left(v\left(-v^2+3u^2\right)\sinh u\cos v + u\left(-u^2+3v^2\right)\cosh u\sin v\right)$$

$$c_3 = \frac{1}{2uv}\left(\sinh u\sin v\right)$$

และ
$$d_3 = \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\left(u\cosh u\sin v - v\sinh u\cos v\right) \tag{2.10}$$

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ $k_2^2 - 4k_0 < 0$ โดยบทตั้ง 2.3 (3) จะได้ว่า ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A นั้นแตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้ $\lambda_1 = z$, $\lambda_2 = -z$, $\lambda_3 = \overline{z}$ และ $\lambda_4 = -\overline{z}$ เมื่อ $z = u + iv$

โดยที่ $u = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0} - k_2}$ และ $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0} + k_2}$

นั่นคือ $\lambda_1 = u + iv, \lambda_2 = -\left(u+iv\right), \lambda_3 = u - iv$ และ $\lambda_4 = -\left(u - iv\right)$

เมื่อแทนค่า λ_i เมื่อ $i = 1,2,3,4$ ลงในสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$e^{\lambda_1} = e^{u+iv} = a_3 + b_3\left(u+iv\right) + c_3\left(u+iv\right)^2 + d_3\left(u+iv\right)^3 \tag{21}$$

$$e^{\lambda_2} = e^{-(u+iv)} = a_3 - b_3\left(u+iv\right) + c_3\left(u+iv\right)^2 - d_3\left(u+iv\right)^3 \tag{22}$$

$$e^{\lambda_3} = e^{u-iv} = a_3 + b_3\left(u-iv\right) + c_3\left(u-iv\right)^2 + d_3\left(u-iv\right)^3 \tag{23}$$

$$e^{\lambda_4} = e^{-(u-iv)} = a_3 - b_3\left(u-iv\right) + c_3\left(u+iv\right)^2 - d_3\left(u-iv\right)^3 \tag{24}$$

นำสมการ (21) + (22) จะได้ $e^{u+iv} + e^{-(u+iv)} = 2a_3 + 2c_3\left(u+iv\right)^2$

หรือ
$$\cosh\left(u+iv\right) = a_3 + c_3\left(u+iv\right)^2 \tag{25}$$

นำสมการ (23) + (24) จะได้ $e^{u-iv} + e^{-(u-iv)} = 2a_3 + 2c_3\left(u-iv\right)^2$

หรือ
$$\cosh\left(u-iv\right) = a_3 + c_3\left(u-iv\right)^2 \tag{26}$$

นำสมการ (21) – (22) จะได้ $e^{u+iv} - e^{-(u+iv)} = 2b_3\left(u+iv\right) + 2d_3\left(u+iv\right)^3$

หรือ
$$\sinh\left(u+iv\right) = b_3\left(u+iv\right) + d_3\left(u+iv\right)^3 \tag{27}$$

นำสมการ (23) – (24) จะได้ $e^{u-iv} - e^{-(u-iv)} = 2b_3\left(u-iv\right) + 2d_3\left(u-iv\right)^3$

หรือ
$$\sinh\left(u-iv\right) = b_3\left(u-iv\right) + d_3\left(u-iv\right)^3 \tag{28}$$

จากการแก้ระบบสมการ (25) - (28) จะได้

$$a_3 = \frac{1}{2uv}\left(2uv\cosh u\cos v - \left(u^2 - v^2\right)\sinh u\sin v\right)$$

$$b_3 = \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\left(v\left(-v^2+3u^2\right)\sinh u\cos v + u\left(-u^2+3v^2\right)\cosh u\sin v\right)$$

$$c_3 = \frac{1}{2uv}\left(\sinh u\sin v\right)$$

และ $$d_3 = \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\left(u\cosh u\sin v - v\sinh u\cos v\right)$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.6 จะเห็นได้ว่า ถ้า $k_2^2 - 4k_0 < 0$ โดยที่ $k_2 = 0$ แล้ว

$$e^A = a_3 \mathrm{I}_4 + b_3 A + c_3 A^2 + d_3 A^3$$

เมื่อ $a_3 = \cosh u\cos u$, $b_3 = \frac{1}{2u}\left(\sinh u\cos u + \cosh u\sin u\right)$

$c_3 = \frac{1}{2u^2}\left(\sinh u\sin u\right)$ และ $d_3 = \frac{1}{4u^3}\left(\cosh u\sin u - \sinh u\cos u\right)$

โดยที่ $u = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{k_0}}$

3. สรุปผล

บทความวิจัยฉบับนี้ ได้ศึกษาสูตรของเมทริกซ์เลขชี้กำลัง e^A เมื่อ $A \neq \overline{0}$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด โดยที่ $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นเมทริกซ์เครื่องหมายอันดับ 4 ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักของ ε นั้นเป็น 1 จำนวน 2 ตำแหน่งและเป็น -1 จำนวน 2 ตำแหน่ง ส่วนสมาชิกอื่นเป็น 0 และเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบที่แตกต่างกับเมทริกซ์ A ในงานวิจัยของ L. Kula, M.K. Karacan และ Y. Yayli จึงเป็นผลให้สูตรของ e^A เมื่อ $A \neq \overline{0}$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงกึ่งสมมาตรเสมือนอันดับ 4 ที่มีค่าเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมดนั้นครบถ้วนทุกกรณี

4. References

[1] Celledoni, E. and Iserles, A., 1998, Approximating the exponential from a Lie algebra to a Lie group, Tech. Report DAMTP 1998/ NA03. Numerical Analysis: Cambridge University. Cambridge. England.

[2] Kula, L., 2003, Split Quaternions and Geometrical Applications, Ph.D Thesis: Graduate School and The Natural Science. Ankara University.

[3] Kula, L., Karacan, M. K. and Yayli, Y., 2005, Formulas for the exponential of a semi

skew-symmetric matrix of order 4, Mathematical and Computational Applications. 10(1): 99-104.

[4] Moler, C. and Van Loan, C., 1978, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM Review. 20(4): 801-836.

[5] Politi, T., 2001, A formula for the exponential of a real skew-symmetric matrix of order 4, BIT Numerical Mathematics. 41(4): 842-845.

[6] Sylvester, J. J., 1883, On the equation to the secular inequalities in the planetary theory, Philosophical Magazine. 16:267–269.