



สมบัติบางประการของเมทริกซ์โทพลิตซ์ $P_n(a,b,c)$

Some Properties of a Toeplitz Matrix $P_n(a,b,c)$

ปณชญา พัฒนางกูร*, ปรียวรา ธิเชียว, จินเจตน์ บุญมาเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Preewara Thikeaw, Chinchet Boonmalert

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 9 February 2023; Received in revised 5 July 2023; Accepted 12 July 2023

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิตซ์ชนิดพิเศษชนิดหนึ่ง ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์กับพจน์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด และยังศึกษาเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบแบบแอลยู นอกจากนี้ ยังได้ศึกษาเกี่ยวกับผกผันของเมทริกซ์ และคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของผกผันของเมทริกซ์อีกด้วย

คำสำคัญ: เมทริกซ์โทพลิตซ์; ความสัมพันธ์เวียนเกิด

Abstract

In this paper, we consider a matrix $P_n(a,b,c)$ which is a special type of Toeplitz matrices. We obtain some relationships between the determinant of the matrix and terms of a certain recurrence relation. We give LU factorization. Furthermore, we determine the inverse of the matrix and then compute the determinant of the inverse of the matrix.

Keywords: Toeplitz matrix; Recurrence relation

1. บทนำ

เมทริกซ์โทพลิตซ์ (Toeplitz Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็นค่าคงตัวเดียวกัน และแนวขนานเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าคงตัว

เดียวกันในแต่ละแนว กล่าวคือ เมทริกซ์จัตุรัส $A_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ จะเป็นเมทริกซ์โทพลิตซ์ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = a_{i-j}$ สำหรับทุก $1 \leq i, j \leq n$ เมื่อ a_{i-j} เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \alpha_{-3} & \dots & \alpha_{-(n-1)} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \dots & \alpha_{-(n-2)} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \dots & \alpha_{-(n-3)} \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_{-(n-4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-1)} & \alpha_{(n-2)} & \alpha_{(n-3)} & \alpha_{(n-4)} & \dots & \alpha_0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

เมทริกซ์โทพลิตซ์มักพบในการศึกษาทางด้านทฤษฎีในเนื้อหาของพีชคณิตเชิงเส้นหรือการวิเคราะห์เชิงตัวเลข นอกจากนี้ยังพบในการศึกษาทางด้านการประยุกต์อีกด้วย เช่น ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลา

การประมวลผลสัญญาณและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น ปี ค.ศ. 1998 Tili [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์โทพลิตซ์สามแนวเฉียง ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิตซ์ในรูปแบบต่อไปนี้

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2003 Capizzano [1] ได้ประยุกต์เมทริกซ์โทพลิตซ์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากนั้นในปี ค.ศ. 2007 Witula และ Stola [4] ได้ศึกษาเมทริกซ์โทพลิตซ์ พร้อมทั้งให้ตัวอย่างเกี่ยวกับ

ดีเทอร์มิแนนต์ และเมทริกซ์ผกผันสำหรับกรณีเฉพาะบางกรณี และปี ค.ศ. 2008 Kilic [2] ได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์โทพลิตซ์ $H_n(a, b, c)$ ที่กำหนดโดย

$$H_n(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n > 2$ ซึ่งผลงานวิจัยชิ้นนี้ได้คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $H_n(a, b, c)$ ผ่านการแยกตัวประกอบแบบแอลยู และคำนวณค่าเฉพาะของเมทริกซ์ นอกจากนี้ ยังใช้ผลที่ได้ในการหาตัวแทนตรีโกณมิติสำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิดอีกด้วย

โดยอาศัยแนวคิดจากการศึกษาผลงานวิจัยของ Kilic ดังกล่าว บทความวิจัยฉบับนี้จึงทำการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์โทพลิตซ์ $P_n(a, b, c)$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์โทพลิตซ์อีกรูปแบบหนึ่ง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n > 3$ นิยามเมทริกซ์โทพลิตซ์ $P_n(a, b, c) = [p_{ij}]_{n \times n}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} p_{ii} &= a & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n \\ p_{i, i+3} &= b & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-3 \\ p_{i+3, i} &= c & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-3 \\ \text{และ} \quad p_{ij} &= 0 & \text{สำหรับกรณีอื่น ๆ} \end{aligned}$$

กล่าวคือ

$$P_n(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

2. ผลงานวิจัย

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงการคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $P_n(a, b, c)$ (ดังบทนิยาม 1.1) ในรูปแบบของความสมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง โดยดำเนินการขั้นมูลฐานในการคำนวณ

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง $\{u_n\}$ ดังนี้

$$u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2} \quad (1)$$

สำหรับทุก $n \geq 2$ เมื่อ $u_0 = 0$ และ $u_1 = 1$

จะเห็นได้ว่า $u_2 = a$, $u_3 = a^2 - bc$, $u_4 = a^3 - 2abc$ และ $u_5 = a^4 - 3a^2bc + b^2c^2$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสองข้างต้น
จะทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างดีเทอร์มิแนนต์ของ

เมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ กับพจน์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด
เชิงเส้นอันดับสอง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 3$ จะได้ว่า

$$\det(P_n(a,b,c)) = \begin{cases} u_{k+1}^3 & ; \quad n = 3k \\ u_{k+1}^2 u_{k+2} & ; \quad n = 3k + 1 \\ u_{k+1} u_{k+2}^2 & ; \quad n = 3k + 2 \end{cases}$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 3$ จะเห็นว่า $a = \frac{a}{1} = \frac{u_2}{u_1}$
จากบทนิยาม 1.1 จะกำหนดให้ R_i แทนแถวที่ i ของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$
กรณี $n = 3k$ เมื่อ $k > 1$ จะใช้การดำเนินการขั้นมูลฐาน ต่อไปนี้

$$-c \frac{u_{k-1}}{u_k} R_{n-5} + R_{n-2} \longrightarrow R_{n-2}, \quad -c \frac{u_{k-1}}{u_k} R_{n-4} + R_{n-1} \longrightarrow R_{n-1}$$

$$\text{และ } -c \frac{u_{k-1}}{u_k} R_{n-3} + R_n \longrightarrow R_n \quad \text{เมื่อ } n \geq 6$$

$$\text{และเนื่องจาก } a - \frac{bcu_k}{u_{k+1}} = \frac{au_{k+1} - bcu_k}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \text{ จึงเห็นได้ว่า}$$

$$\begin{aligned} \det(P_n(a,b,c)) &= \det(P_{3k}(a,b,c)) = \frac{u_2}{u_1} \frac{u_2}{u_1} \frac{u_2}{u_1} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_4}{u_3} \frac{u_4}{u_3} \frac{u_4}{u_3} \dots \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+1}}{u_k} \\ &= \frac{u_{k+1}^3}{u_1^3} = \frac{u_{k+1}^3}{1^3} = u_{k+1}^3 \end{aligned}$$

กรณี $n = 3k + 1$ เมื่อ $k \geq 1$ จะใช้การดำเนินการขั้นมูลฐานเพื่อคำนวณหา $\det(P_n(a,b,c))$ เช่นเดียวกับกรณีที่
 $n = 3k$ เมื่อ $k > 1$ และใช้การดำเนินการขั้นมูลฐาน $-c \frac{u_k}{u_{k+1}} R_{n-3} + R_n \longrightarrow R_n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(P_n(a,b,c)) &= \det(P_{3k+1}(a,b,c)) \\ &= \frac{u_2}{u_1} \frac{u_2}{u_1} \frac{u_2}{u_1} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_4}{u_3} \frac{u_4}{u_3} \frac{u_4}{u_3} \dots \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+2}}{u_k} \\ &= \frac{u_{k+1}^2 u_{k+2}}{u_1^3} = \frac{u_{k+1}^2 u_{k+2}}{1^3} = u_{k+1}^2 u_{k+2} \end{aligned}$$

กรณี $n = 3k + 2$ เมื่อ $k \geq 1$ จะใช้การดำเนินการขั้นมูลฐานเพื่อคำนวณหา $\det(P_n(a, b, c))$ เช่นเดียวกับกรณีที่ $n = 3k + 1$ เมื่อ $k \geq 1$ และใช้การดำเนินการขั้นมูลฐาน $-c \frac{u_k}{u_{k+1}} R_{n-3} + R_n \rightarrow R_n$ จะทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(P_n(a, b, c)) &= \det(P_{3k+2}(a, b, c)) \\ &= \frac{u_2}{u_1} \frac{u_2}{u_1} \frac{u_2}{u_1} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_3}{u_2} \frac{u_4}{u_3} \frac{u_4}{u_3} \frac{u_4}{u_3} \dots \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+1}}{u_k} \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \\ &= \frac{u_{k+1} u_{k+2}^2}{u_1^3} = \frac{u_{k+1} u_{k+2}^2}{1^3} = u_{k+1} u_{k+2}^2 \end{aligned}$$

ต่อไปจะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบแบบแอลยูโดยวิธีการของ Doolittle (Doolittle's method of LU factorization) ของ $P_n(a, b, c)$ กำหนดให้ฟังก์ชันขั้น (floor function) คือฟังก์ชัน $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ที่นิยามโดย $[x] = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$

กำหนดให้ $L_0 = [l_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างมิติ $n \times n$ โดยที่ l_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ L_0 สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$\begin{aligned} l_{3m+1, 3m-2} &= l_{3m+2, 3m-1} = l_{3m+3, 3m} = \frac{cu_m}{u_{m+1}} \text{ สำหรับทุก } 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \\ l_{ii} &= 1 \text{ สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

และสมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

และกำหนดให้ $U_0 = [q_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนมิติ $n \times n$ โดยที่ q_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ U_0 สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$\begin{aligned} q_{3m-2, 3m-2} &= q_{3m+1, 3m-1} = q_{3m, 3m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} \text{ สำหรับทุก } 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \\ q_{i, i+3} &= b \text{ สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-3 \end{aligned}$$

และสมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

เมื่อ u_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับ $\{u_n\}$ ที่กำหนดโดย $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ โดยที่ $u_0 = 0$ และ $u_1 = 1$

จากบทนิยามของเมทริกซ์ L_0 และ U_0 ดังกล่าว ทำให้ได้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 การแยกตัวประกอบแบบแอลยูของ $P_n(a, b, c)$ จะอยู่ในรูป

$$P_n(a, b, c) = L_0 U_0$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยาม L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 l_{ij} &= 0 & \text{สำหรับทุก } j > i \\
 l_{i+1,i} &= 0 & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-1 \\
 l_{i+2,i} &= 0 & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-2 \\
 l_{ij} &= 0 & \text{สำหรับทุก } i \geq j+4 \\
 \text{และ } q_{ij} &= 0 & \text{สำหรับทุก } j < i \\
 q_{i,i+1} &= 0 & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-1 \\
 q_{i,i+2} &= 0 & \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-2 \\
 q_{ij} &= 0 & \text{สำหรับทุก } i \geq j+4
 \end{aligned}$$

พิจารณา

$$L_0 U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{n \times n}$$

พิจารณากรณี $i = j$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 p_{ii} &= \sum_k l_{ik} q_{ki} \\
 &= l_{i1} q_{1i} + l_{i2} q_{2i} + \cdots + l_{i,i-4} q_{i-4,i} + l_{i,i-3} q_{i-3,i} + l_{i,i-2} q_{i-2,i} + l_{i,i-1} q_{i-1,i} + l_{ii} q_{ii} \\
 &\quad + l_{i,i+1} q_{i+1,i} + l_{i,i+2} q_{i+2,i} + \cdots + l_{in} q_{ni}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \cdots = l_{in} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+1,i} = 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$ ดังนั้น $l_{i,i-1} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+2,i} = 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n-2$ ดังนั้น $l_{i,i-2} = 0$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $i \geq j+4$ ดังนั้น ในกรณีที่ $i \geq 5$ จะได้ว่า ถ้า $1 \leq k \leq i-4$

แล้ว $5 \leq k+4 \leq i$ ซึ่งทำให้ $l_{ik} q_{ki} = (0) q_{ki} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq k \leq i-4$

ดังนั้น $p_{ii} = l_{i,i-3} q_{i-3,i} + l_{ii} q_{ii}$

พิจารณาค่า i

ถ้า $i = 3t$ เมื่อ $t > 1$ แล้ว $p_{3t,3t} = l_{3t,3t-3} q_{3t-3,3t} = l_{3t,3t} q_{3t,3t}$

เนื่องจาก $l_{3t,3t-3} = l_{3(t-1)+3,3(t-1)} = \frac{cu_{t-1}}{u_{(t-1)+1}} = \frac{cu_{t-1}}{u_t}$, $l_{3t,3t} = 1$, $q_{3t-3,3t} = b$ และ $q_{3t,3t} = \frac{u_{t+1}}{u_t}$ จึงได้

ว่า $p_{3t,3t} = \left[\frac{cu_{t-1}}{u_t} \right] (b) + (1) \left[\frac{u_{t+1} + bu_{t-1}}{u_t} \right]$ จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{u_n\}$ เมื่อ $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ จึงได้ว่า

$$p_{3t,3t} = \left[\frac{au_t - bcu_{t-1} - bcu_{t-1}}{u_t} \right]$$

ถ้า $i = 3t + 1$ เมื่อ $t \geq 1$ แล้ว

$$\begin{aligned}
 p_{3t+1, 3t+1} &= l_{3t+1, (3t+1)-3} q_{(3t+1)-3, 3t+1} + l_{3t+1, 3t+1} q_{3t+1, 3t+1} \\
 \text{เนื่องจาก } l_{3t+1, (3t+1)-3} &= l_{3t+1, 3t-2} = \frac{cu_t}{u_{t+1}}, l_{3t+1, 3t+1} = 1, \\
 q_{(3t+1)-3, 3t+1} &= q_{3t-2, 3t+1} = q_{(3t-2), (3t-2)+3} = b \\
 \text{และ } q_{3t+1, 3t+1} &= q_{3(t+1)-2, 3(t+1)-2} = \frac{u_{(t+1)+1}}{u_{t+1}} = \frac{u_{t+2}}{u_{t+1}} \\
 \text{ดังนั้น } p_{3t+1, 3t+1} &= \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}} \right] (b) + (1) \left[\frac{u_{t+2}}{u_{t+1}} \right] = \frac{bcu_t + u_{t+2}}{u_{t+1}}
 \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{u_n\}$ เมื่อ $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
 p_{3t+1, 3t+1} &= \frac{bcu_t + au_{t+1} - bcu_t}{u_{t+1}} = a \\
 \text{ถ้า } i &= 3t + 2 \text{ เมื่อ } t \geq 1 \text{ แล้ว}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{3t+2, 3t+2} &= l_{3t+2, (3t+2)-3} q_{(3t+2)-3, 3t+2} + l_{3t+2, 3t+2} q_{3t+2, 3t+2} \\
 \text{เนื่องจาก } l_{3t+2, (3t+2)-3} &= l_{3t+2, 3t-1} = \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}} \right], l_{3t+2, 3t+2} = 1, \\
 q_{(3t+2)-3, 3t+2} &= q_{3t-1, 3t+2} = q_{3t-1, (3t-1)+3} = b \\
 \text{และ } q_{3t+2, 3t+2} &= q_{3(t+1)-1, 3(t+1)-1} = \frac{u_{(t+1)+1}}{u_{t+1}} = \frac{u_{t+2}}{u_{t+1}} \\
 \text{ดังนั้น } p_{3t+2, 3t+2} &= \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}} \right] (b) + (1) \left[\frac{u_{t+2}}{u_{t+1}} \right] = \frac{bcu_t + u_{t+2}}{u_{t+1}}
 \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{u_n\}$ เมื่อ $u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 2$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
 p_{3t+2, 3t+2} &= \frac{bcu_t + au_{t+1} - bcu_t}{u_{t+1}} = a \\
 \text{นอกจากนี้ } p_{11} &= (1) q_{11} = q_{11} = q_{3(1)-2, 3(1)-2} = \frac{u_{1+1}}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{a}{1} = a \\
 p_{22} &= (0) q_{12} + (1) q_{22} = q_{22} = q_{3(1)-1, 3(1)-1} = \frac{u_{1+1}}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{a}{1} = a \\
 \text{และ } p_{33} &= l_{31} q_{13} + l_{32} q_{23} + l_{33} q_{33} = 0 + 0 \frac{u_2}{u_1} = \frac{a}{1} = a \\
 \text{ดังนั้น } p_{ii} &= a \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{_____ (2.1)}
 \end{aligned}$$

พิจารณากรณี $j = i + 3$ โดยนิยามการคูณเมทริกซ์ L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 p_{i, i+3} &= \sum_{k=1}^n l_{ik} q_{k, i+3} \\
 &= l_{i1} q_{1, i+3} + l_{i2} q_{2, i+3} + \dots + l_{i, i-3} q_{i-3, i+3} + l_{i, i-2} q_{i-2, i+3} + l_{i, i-1} q_{i-1, i+3} + \dots + l_{in} q_{n, i+3} \text{ เนื่องจาก } l_{ij} \\
 &= 0 \text{ เมื่อ } j > i = 0 \text{ จะได้ } l_{i, i+1} = l_{i, i+2} = l_{i, i+3} = \dots = l_{in} = 0 \text{ สำหรับ } i \geq 2 \text{ ดังนั้น ถ้า } 1 \leq k \leq i-1 \text{ แล้ว} \\
 &5 \leq k+4 \leq i+3 \text{ และเนื่องจาก } q_{ij} = 0 \text{ สำหรับ } j \geq i+4 \text{ จึงทำให้ } l_{ik} q_{k, i+3} = l_{ik} (0) = 0 \text{ สำหรับทุก } 1 \leq k \\
 &\leq i-4 \text{ ดังนั้น } p_{i, i+3} = l_{ii} q_{i, i+3} \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \dots, n-3 \text{ เนื่องจาก } l_{ii} = 1 \text{ และ } q_{i, i+3} = b \text{ จึงได้ว่า} \\
 p_{i, i+3} &= (1)(b) = b \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \dots, n-3 \quad \text{_____ (2.2)}
 \end{aligned}$$

พิจารณากรณี $i = j + 3$ โดยนิยามการคูณเมทริกซ์ L_0 และ U_0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_{i+3,i} &= \sum_{k=1}^n l_{i+3,k} q_{ki} \\ &= l_{i+3,1} q_{1i} + l_{i+3,2} q_{2i} + \dots + l_{i+3,i-3} q_{i-3,i} + l_{i+3,i-2} q_{i-2,i} + l_{i+3,i-1} q_{i-1,i} + l_{i+3,i} q_{ii} + l_{i+3,i+1} q_{i+1,i} + \dots + \\ &\quad l_{i+3,n} q_{ni} \\ &\text{สำหรับ } i \geq 2 \text{ ถ้า } 1 \leq k \leq i-1 \text{ แล้ว } 5 \leq k+4 \leq i+3 \text{ เนื่องจาก } l_{ij} = 0 \text{ เมื่อ } i \geq j+4 \text{ จึงทำให้ } l_{i+3,k} q_{ki} \\ &= (0) q_{ki} = 0 \text{ สำหรับทุก } 1 \leq k \leq i-1 \text{ และเนื่องจาก } q_{ij} = 0 \text{ สำหรับ } j > i \text{ จึงทำให้ } q_{i+1,i} = q_{i+2,i} = \dots = \\ &q_{ni} = 0 \text{ เพราะฉะนั้น } p_{i+3,i} = l_{i+3,i} q_{ii} \end{aligned}$$

พิจารณาค่า i :

$$\text{ถ้า } i = 3s \text{ เมื่อ } s \geq 1 \text{ แล้ว } l_{i+3,i} = l_{3s+3,3s} = \frac{cu_s}{u_{s+1}} \text{ และ } q_{ii} = q_{3s,3s} = \frac{u_{s+1}}{u_s} \text{ ดังนั้น } l_{i+3,i} q_{ii} = \left(\frac{cu_s}{u_{s+1}} \right) \left(\frac{u_{s+1}}{u_s} \right) = c$$

$$\text{ถ้า } i = 3s+1 \text{ เมื่อ } s \geq 1 \text{ แล้ว } l_{i+3,i} = l_{(3s+1)+3,3s+1} = l_{3(s+1)+1,3(s+1)-2} \left(\frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}} \right) \text{ และ } q_{ii} = q_{3s+1,3s+1} \\ = q_{3(s+1)-2,3(s+1)-2} = \frac{u_{(s+1)+1}}{u_{s+1}} = \frac{u_{s+2}}{u_{s+1}} \text{ จึงได้ว่า } l_{i+3,i} q_{ii} = \left(\frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}} \right) \left(\frac{u_{s+2}}{u_{s+1}} \right) = c$$

$$\text{ถ้า } i = 3s+2 \text{ เมื่อ } s \geq 1 \text{ แล้ว } l_{i+3,i} = l_{(3s+2)+3,3s+2} = l_{3(s+1)+2,3(s+1)-1} \frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}} \text{ และ } q_{ii} = q_{3s+2,3s+2} \\ = q_{3(s+1)-1,3(s+1)-1} = \frac{u_{(s+1)+1}}{u_{s+1}} = \frac{u_{s+2}}{u_{s+1}} \text{ จึงได้ว่า } l_{i+3,i} q_{ii} = \left(\frac{cu_{s+1}}{u_{s+2}} \right) \left(\frac{u_{s+2}}{u_{s+1}} \right) = c$$

$$\text{ดังนั้น } p_{i+3,i} = l_{i+3,i} q_{ii} = c \text{ สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-3 \quad \text{_____} (2.3)$$

จากสมการ (2.1) - (2.3) จึงสรุปได้ว่า $p_{ii} = a$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$

$$p_{i,i+3} = b \quad \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-3$$

$$p_{i+3,i} = c \quad \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n-3$$

ต่อไปจะแสดงว่า $p_{ij} = 0$ ในกรณีอื่น โดยพิจารณา p_{ij} เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $j \neq i+3$ และ $i \neq j+3$

กรณี $i > j$ โดยที่ $j \neq i+3$ จะพบว่า

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \sum_{k=1}^n l_{ik} q_{kj} \\ &= l_{i1} q_{1j} + l_{i2} q_{2j} + \dots + l_{i,i-4} q_{i-4,j} + l_{i,i-3} q_{i-3,j} + l_{i,i-2} q_{i-2,j} + l_{i,i-1} q_{i-1,j} + l_{ii} q_{ij} + l_{i,i+1} q_{i+1,j} + \dots + l_{i,j-1} q_{j-1,j} \\ &\quad + l_{i,j-1} q_{j-1,j} + l_{ij} q_{jj} + l_{i,j+1} q_{j+1,j} + \dots + l_{in} q_{nj} \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า

1. $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = \dots = l_{in} = 0$ เพราะว่า $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$
2. $l_{i,i-1} = 0$ เพราะว่า $l_{i+1,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-1$
3. $l_{i,i-2} = 0$ เพราะว่า $l_{i+2,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-2$
4. $l_{ik} q_{kj} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq k \leq i-4$ เพราะว่า $l_{ik} = 0$ เมื่อ $5 \leq k+4 \leq i$
5. $l_{i,i-3} q_{i-3,j} = l_{ii} q_{ij} = 0$ เพราะว่า
ถ้า $j = i+1$ แล้ว $q_{i-3,j} = q_{i-3,i+1} = 0$ และ $q_{ij} = q_{i,i+1} = 0$
ถ้า $j = i+2$ แล้ว $q_{i-2,j} = q_{i-2,i+2} = 0$ และ $q_{ij} = q_{i,i+2} = 0$

และ ถ้า $j \geq i + 4$ แล้ว $q_{ij} = 0$ และ $(i - 3) + 4 = i + 1 < i + 4 \leq j$ ซึ่งทำให้ $q_{i-3,j} = 0$

ดังนั้น สามารถสรุปผลได้ว่า

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} q_{kj} = \left[\sum_{k=4}^{i-4} l_{ik} q_{kj} \right] + \left[\sum_{k=i+1}^n l_{ik} q_{kj} \right] + (l_{i,i-3} q_{i-3,j} + l_{i,i-2} q_{i-2,j} + l_{i,i-1} q_{i-1,j} + l_{ii} q_{ij}) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $p_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ โดยที่ $i \neq j + 3$

จึงสรุปได้ว่า $[p_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ โดยที่ $p_{ii} = a$ สำหรับ $1 \leq i \leq n$

$$p_{i,i+3} = b \quad \text{สำหรับ } 1 \leq i \leq n-3$$

$$p_{i+3,i} = c \quad \text{สำหรับ } 1 \leq i \leq n-3$$

และ

$$p_{ij} = 0 \quad \text{สำหรับกรณีอื่น}$$

ดังนั้น

$$P_n(a,b,c) = [p_{ij}]_{n \times n} = L_0 U_0$$

จากบทนิยาม 1.1 และทฤษฎีบท 2.1 จะเห็น

ได้ว่าเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$

โดยที่ $\det P_n(a,b,c) \neq 0$ ดังนั้นเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$

จึงมีตัวผกผัน กล่าวคือ จะมีเมทริกซ์ $P_n^{-1}(a,b,c)$

ที่ซึ่ง $P_n(a,b,c) P_n^{-1}(a,b,c) = P_n^{-1}(a,b,c) P_n(a,b,c)$

$= I_n$ เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$

ดังนั้น จึงจะกล่าวถึงการหาตัวผกผันของเมทริกซ์

$P_n(a,b,c)$ และการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของตัวผกผัน

ของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ ในรูปแบบของความสัมพันธ์

เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง $\{u_n\}$ ดังนี้

$$u_n = a u_{n-1} - b c u_{n-2} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq 2$$

เมื่อ $u_0 = 0$ และ $u_1 = 1$ จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$P_n(a,b,c) = L_0 U_0$ โดยที่ $\det(L_0) = 1$ และ $\det$

$(U_0) \neq 0$ จึงได้ว่า $P_n^{-1}(a,b,c) = (L_0 U_0)^{-1} U_0^T E_0^T$

$=$ ก่อนอื่นจะหารูปแบบทั่วไปของ E_0^T และ U_0^T ดังนี้

กำหนดให้ $X = [x_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์แบบ

สามเหลี่ยมล่างมิติ $n \times n$ โดยที่ x_{ij} เป็นสมาชิกของเม

ทริกซ์ X สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่

นิยามดังนี้

$$x_{ii} = 1 \quad \text{สำหรับทุก } 1 \leq i \leq n$$

$$x_{3(m+d)-2, 3m-2} = x_{3(m+d)-1, 3m-1} = x_{3(m+d), 3m} = \frac{(-c)^d u_m}{u_{m+d}}$$

สำหรับทุก $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ และ $1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ และ สมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

และกำหนดให้ $Y = [y_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนมิติ $n \times n$ โดยที่ y_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ Y สำหรับ

ทุก $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq n$ ที่นิยามดังนี้

$$y_{3m-2, 3(m+d)-5} = y_{3m-1, 3(m+d)-4} = y_{3m, 3(m+d)-3} = \frac{(-b)^{(d-1)} u_m}{u_{m+d}}$$

สำหรับทุก $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ และ $1 \leq d \leq \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ และ สมาชิกตัวอื่นมีค่าเท่ากับ 0

จากบทนิยามของเมทริกซ์ X และ Y ดังกล่าว ทำให้ได้
ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่
 $n > 3$ จะได้ว่า

$$P_n^{-1}(a,b,c) = YX$$

เมื่อ $\det(P_n(a,b,c)) \neq 0$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $\det(P_n(a,b,c)) \neq 0$ จาก
ทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $P_n(a,b,c) = L_0 U_0$ ดังนั้น

$$P_n^{-1}(a,b,c) = (L_0 U_0)^{-1} = U_0^{-1} L_0^{-1}$$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $L_0 X = X L_0 = I_n$ จากนิยาม L_0
และ X จะได้ว่า

$$l_{ii} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad j > i$$

$$l_{i+1,i} = 0 \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$l_{i+2,i} = 0 \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

$$l_{ij} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad i \geq j+4$$

และ $x_{ij} = 0$ สำหรับ $j > i$

พิจารณา $L_0 X \begin{bmatrix} w_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n}$

กรณี $i = j$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{ii} &= \sum_{f=1}^n l_{if} x_{fi} \\ &= l_{i1} x_{1i} + l_{i2} x_{2i} + \dots + l_{i,i-4} x_{i-4,i} + l_{i,i-3} x_{i-3,i} \\ &\quad + l_{i,i-2} x_{i-2,i} + l_{i,i-1} x_{i-1,i} + l_{ii} x_{ii} \\ &\quad + l_{i,i+1} x_{i+1,i} + l_{i,i+2} x_{i+2,i} + \dots + l_{in} x_{ni} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \dots = l_{in} = 0$

เนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1i} = x_{2i} = x_{3i} = \dots = x_{i-1,i} = 0$

จึงทำให้ได้ว่า $w_{ii} = l_{ii} x_{ii}$

เนื่องจาก $l_{ii} = 1 = x_{ii}$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n$ ดังนั้น

$$w_{ii} = (1)(1) = 1 \quad \text{สำหรับทุก} \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.4)$$

กรณี $j = i + 3$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{i,i+3} &= \sum_{f=1}^n l_{if} x_{f,i+3} \\ &= l_{i1} x_{1,i+3} + l_{i2} x_{2,i+3} + \dots + l_{i,i-3} x_{i-3,i+3} + \\ &\quad l_{i,i-2} x_{i-2,i+3} + l_{i,i-1} x_{i-1,i+3} + l_{ii} x_{i,i+3} + \\ &\quad l_{i,i+1} x_{i+1,i+3} + \dots + l_{in} x_{n,i+3} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = l_{i,i+3} = \dots = l_{in} = 0$

เนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1,i+3} = x_{2,i+3} = x_{3,i+3} = \dots = x_{i+2,i+3} = 0$

ดังนั้น $w_{i,i+3} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-3$ (2.5)

กรณี $j = i - 3$ จากนิยามการคูณของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w_{i,i-3} &= \sum_{f=1}^n l_{i+3,f} x_{fi} \\ &= l_{i+3,1} x_{1i} + l_{i+3,2} x_{2i} + \dots + l_{i+3,i-3} x_{i-3,i} \\ &\quad + l_{i+3,i-2} x_{i-2,i} + l_{i+3,i-1} x_{i-1,i} + l_{i+3,i} x_{ii} \\ &\quad + l_{i+3,i+1} x_{i+1,i} + \dots + l_{i+3,n} x_{ni} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $l_{i+3,i+4} = l_{i+3,i+5} = l_{i+3,i+6} = \dots = l_{i+3,n} = 0$

เนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1i} = x_{2i} = x_{3i} = \dots = x_{i-1,i} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+2,i} = 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n-2$ ดังนั้น $l_{i+3,i+1} x_{i-1,i} = (0) x_{i+1,i} = 0$

เนื่องจาก $l_{i+1,i} = 0$ เมื่อ $1 \leq i \leq n-1$ ดังนั้น $l_{i+3,i+2} x_{i-2,i} = (0) x_{i+2,i} = 0$

เนื่องจาก $x_{ii} = 1 = l_{i+3,i+3}$ ดังนั้น $w_{i+3,i} = l_{i+3,i} (1) + (1) x_{i+3,i} = l_{i+3,i} + x_{i+3,i}$

ดังนั้น $w_{i+3,i} = l_{i+3,i} + x_{i+3,i}$

พิจารณาค่า i :

ถ้า $i = 3t$ เมื่อ $t \geq 1$ แล้ว $w_{3t+3,3t} = l_{3t+3,3t} + x_{3t+3,3t}$
 เนื่องจาก $l_{3t+3,3t} = \frac{cu_t}{u_{t+1}}$ และ $x_{3t+3,3t} = x_{3(t+1),3t} = \frac{(-c)^1 u_t}{u_{t+1}} = \frac{-cu_t}{u_{t+1}}$
 จะได้ว่า $w_{3t+3,3t} = \left[\frac{cu_t}{u_{t+1}} \right] + \left[\frac{-cu_t}{u_{t+1}} \right] = 0$
 ถ้า $i = 3t + 1$ เมื่อ $t \geq 0$ แล้ว $w_{(3t+1)+3,3t+1} = l_{(3t+1)+3,3t+1} + x_{(3t+1)+3,3t+1}$
 เนื่องจาก $l_{(3t+1)+3,3t+1} = l_{3(t+1)+1,3(t+1)-2} = \frac{cu_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}}$
 และ $x_{(3t+1)+3,3t+1} = x_{3((t+1)+1)-2,3(t+1)-2} = \frac{(-c)^1 u_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}}$
 จะได้ว่า $w_{(3t+1)+3,3t+1} = \left[\frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}} \right] + \left[\frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}} \right] = 0$
 ถ้า $i = 3t + 2$ เมื่อ $t \geq 0$ แล้ว $w_{(3t+2)+3,3t+2} = l_{(3t+2)+3,3t+2} + x_{(3t+2)+3,3t+2}$
 เนื่องจาก $l_{(3t+2)+3,3t+2} = l_{3(t+1)+2,3(t+1)-1} = \frac{cu_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}}$
 และ $x_{(3t+2)+3,3t+2} = x_{3((t+1)+1)-1,3(t+1)-1} = \frac{(-c)^1 u_{t+1}}{u_{(t+1)+1}} = \frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}}$
 นั่นคือ $w_{(3t+2)+3,3t+2} = \left[\frac{cu_{t+1}}{u_{t+2}} \right] + \left[\frac{-cu_{t+1}}{u_{t+2}} \right] = 0$
 ดังนั้น $w_{i+3,i} = 0$ สำหรับทุก $1 \leq i \leq n-3$ _____(2.6)

จากสมการ (2.4) - (2.6) จึงสรุปได้ว่า $w_{ii} = 1$ สำหรับ $1 \leq i \leq n$
 $w_{i,i+3} = 0$ สำหรับ $1 \leq i \leq n-3$
 $w_{i+3,i} = 0$ สำหรับ $1 \leq i \leq n-3$ _____(2.7)

ต่อไปจะแสดงว่า $w_{ij} = 0$ ในกรณีอื่น โดยพิจารณา w_{ij}

เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $j \neq i+3$ และ $j \neq i-3$

กรณีที่ $i < j$ โดยที่ $i+3 \neq j$ พบว่า

$$w_{ij} = \sum_{f=1}^n l_{ij} x_{fi} \\ = l_{i1} x_{1j} + l_{i2} x_{2j} + \dots + l_{i,i-4} x_{i-4,j} + l_{i,i-3} x_{i-3,j} + \\ l_{i,i-2} x_{i-2,j} + l_{i,i-1} x_{i-1,j} + l_{ii} x_{ij} + l_{i,i+1} x_{i+1,j} + \\ \dots + l_{i,j-1} x_{j-1,j} + l_{ij} x_{jj} + l_{i,j+1} x_{j+1,j} + \dots + \\ l_{in} x_{nj}$$

เนื่องจาก $l_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ ดังนั้น $l_{i,i+1} = l_{i,i+2} = \dots = l_{in} = 0$

และเนื่องจาก $x_{ij} = 0$ เมื่อ $j > i$ ดังนั้น $x_{1j} = x_{2j} =$

$\dots = x_{ij} = 0$ จะได้ว่า $w_{ij} = \sum_{f=1}^n l_{ij} x_{fi} = 0$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $w_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ โดยที่ $i \neq j+3$ เพราะฉะนั้น โดยความสัมพันธ์ (2.7) และผลจากทั้งสองกรณีข้างต้น จึงสรุปได้ว่า $L_0 X = [w_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณะ และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า XL_0 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณะ เพราะฉะนั้น $L_0 X = XL_0 = I_n$ นั่นคือ $L_0^i = X$ นั่นเอง

โดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ข้างต้น ทำให้ได้ว่า $U_0 Y = YU_0 = I_n$ นั่นคือ $U_0^i = Y$ ดังนั้น

$$P_n^{-1}(a,b,c) = (L_0 U_0)^{-1} = U_0^i L_0^i = YX$$

บทแทรก 2.4 กำหนดให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยที่ $n > 3$ จะได้ว่า

$$\det P_n^{-1}(a,b,c) \begin{cases} \frac{1}{u_{k+1}^3} & ; \quad n = 3k \\ \frac{1}{u_{k+1}^2 u_{k+2}} & ; \quad n = 3k + 1 \\ \frac{1}{u_{k+1} u_{k+2}^2} & ; \quad n = 3k + 2 \end{cases}$$

เมื่อ $\det P_n^{-1}(a,b,c) \neq 0$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $\det P_n^{-1}(a,b,c) \neq 0$

เนื่องจาก $P_n^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{\det P_n(a,b,c)}$ และโดยอาศัยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่าบทแทรกนี้เป็นจริง

3. สรุปผล

บทความวิจัยฉบับนี้ได้กำหนดบทนิยามของเมทริกซ์ $P_n(a,b,c)$ ดังบทนิยาม 1.1 ซึ่งเป็นเมทริกซ์ทอพลิซชนิดหนึ่ง และพบว่าสามารถคำนวณหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ดังกล่าวได้จากพจน์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด นอกจากนี้โดยอาศัยการแยกตัวประกอบแบบแอลยูจะทำให้ได้ผกผันของเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ของผกผันของเมทริกซ์ อีกด้วย

4. References

- [1] Capizzano, S.S., 2003, Generalized locally Toeplitz sequences spectral analysis and applications to discretized partial differential equations, Linear Algebra Appl. 366: 371-402.
- [2] Kilic, E., 2008, On a constant-diagonals matrix, Applied Mathematics and Computation. 204(1): 184-190.
- [3] Tilli, P., 1998, Locally Toeplitz sequences spectral properties and applications, Linear Algebra Appl. 278: 91-120.
- [4] Witula, R. and Slota, D., 2007, On computing the determinants and inverses of some special type of tridiagonal and constant-diagonals matrices., Appl. Math. Comput. 189(1): 514-527.