

ตัวแบบเชิงการแปรผันที่ปรับปรุงสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจาก ภาพที่เกิดจากสัญญาณรบกวนแบบผสม

An Improve Variational Model for Removal of Combined Additive and Multiplicative Noise

ศิริวรรณ จันทร์แก่น¹, โสภิดา สุขญาณกิจ^{2,*}

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี กาญจนบุรี 71190

²สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา

พระนครศรีอยุธยา 13000

Siriwan Chankan¹, Sopida Sukyankij^{2,*}

¹Division of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,

Kanchanaburi Rajabhat University, Kanchanaburi 71190

²Division of Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology,

Phranakhon Si Ayutthaya Rajabhat University, Phranakhon Si Ayutthaya 13000

Received 14 December 2023; Received in revised 20 April 2024; Accepted 30 April 2024

บทคัดย่อ

การลดสัญญาณรบกวนออกจากภาพเป็นงานพื้นฐานที่สำคัญในการฟื้นฟูภาพ โดยมีเป้าหมายเพื่อกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพถ่ายดิจิทัลที่เสียหายและปรับปรุงคุณภาพของภาพก่อนการนำภาพไปประยุกต์ใช้ โดยทั่วไปสัญญาณรบกวนถูกแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณ ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับกำจัดทั้งสัญญาณรบกวนแบบการบวกและการคูณออกจากภาพในขั้นตอนเดียว จำนวน 3 ตัวแบบ ได้แก่ ตัวแบบ KKWV-TV ตัวแบบ KKWV-TL และตัวแบบ KKWV-TVL พร้อมทั้งวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง ผลการทดลองเชิงตัวเลขกับทั้งภาพสังเคราะห์ ภาพจริง และภาพถ่ายทางการแพทย์แสดงให้เห็นว่าตัวแบบทั้งสามสามารถให้ผลลัพธ์จากการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่มีความแม่นยำ และน่าเชื่อถือ นอกจากนี้ขั้นตอนวิธีเชิงตัวเลขที่ได้นำเสนอสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยตัวแบบ KKWV-TVL มีความแม่นยำสูงกว่าตัวแบบ KKWV-TV และตัวแบบ KKWV-TL

คำสำคัญ: การซ่อมแซมภาพ; การกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ; ตัวแบบเชิงการแปรผัน

Abstract

Image denoising is one of the most important tasks in image restoration. The goal is to remove noise from a given corrupted digital image to improve its quality before use. In general, there are two types of noise models: additive noise models and multiplicative noise models. In this paper, we present three variational models, KKVV-TV, KKVV-TL, and KKVV-TVL models, for the restoration of images with combined additive and multiplicative noise in a single step, together with numerical methods for solving the associated differential equations. Numerical tests with synthetic, realistic and medical images confirm that our three models deliver accurate and reliable results. Moreover, the proposed numerical algorithm can work efficiently with the KKVV-TVL model and provides higher quality results than the KKVV-TV model and the KKVV-TL models.

Keywords: Image restoration; Image denoising; Variational method

1. บทนำ

ภาพถ่ายถือเป็นสิ่งที่มีบทบาทและมีความสำคัญเป็นอย่างมากในการประยุกต์เพื่อใช้งานจริง ทั้งการประยุกต์ทางด้านศิลปะ ดาราศาสตร์ ฟิสิกส์ ชีววิทยา เคมี และศาสตร์แขนงอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการใช้และสร้างภาพถ่าย แต่ภาพถ่ายมักถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนจากกระบวนการรับและส่งสัญญาณภาพ ดังนั้นเพื่อให้ได้ข้อมูลบนภาพที่มีความคมชัดสูงขึ้นและสามารถนำไปใช้ในทางปฏิบัติได้อย่างสะดวกและแม่นยำ การกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพหรือการซ่อมแซมภาพจึงเป็นขั้นตอนสำคัญในการสร้างภาพที่คมชัดจากภาพที่มีสัญญาณรบกวน [1]

โดยทั่วไปตัวแบบสัญญาณรบกวนมี 2 ประเภท คือตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการบวก (Additive Noise Model) และตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการคูณ (Multiplicative Noise Model) ตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการบวก เป็นหนึ่งในรูปแบบของการแจกแจงของสัญญาณรบกวนที่พบได้ทั่วไปมากที่สุดในธรรมชาติ ซึ่งถูกพบในกระบวนการบันทึกสัญญาณภาพด้วยเครื่องมือดิจิทัล และในทางปฏิบัติสัญญาณรบกวนแบบการคูณหรือสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิล (Speckle Noise) ถูกพบในภาพที่ได้จากระบบการสร้างภาพแบบโคฮีเลนต์ (Coherent Imaging System) เช่น ภาพถ่ายคลื่นเสียง ความถี่สูง ภาพเลเซอร์ และภาพจากระบบเรดาร์ที่ติดตั้งบนเครื่องบินหรือดาวเทียม เป็นต้น

ในด้านการประยุกต์ การสมมติว่าภาพที่มีสัญญาณรบกวนเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการบวกหรือแบบการคูณแบบใดแบบหนึ่งนั้นไม่เป็นจริงเสมอไป ตัวอย่างเช่น ผลการศึกษาในงานวิจัยของ Hirakawa และ Park [2] และคณะวิจัยของ Lukin [3] ได้ยืนยันข้อเท็จจริงดังกล่าว และผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่าส่วนประกอบของสัญญาณรบกวนแบบการบวกไม่สามารถตัดทิ้งได้ ดังนั้นการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพแบบผสมจึงเป็นเรื่องจำเป็นอย่างมาก เพื่อให้ข้อมูลบนภาพมีความคมชัดสูงขึ้น และสามารถนำข้อมูลดังกล่าวไปใช้ในทาง

ปฏิบัติได้อย่างสะดวกและแม่นยำมากยิ่งขึ้น

เทคนิควิธีการแก้ปัญหาคำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพมีหลากหลายวิธี ได้แก่ วิธีการกรองภาพ วิธีการเวฟเลต วิธีการสโตรแคสติก วิธีการที่ใช้วิธีการวิเคราะห์องค์ประกอบหลัก วิธีการใช้ชุดข้อมูลมาฝึกสอนให้กับโมเดล และวิธีการเชิงการแปรผัน เป็นต้น ซึ่งวิธีการเชิงการแปรผัน (variational method) เป็นเทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ที่น่าเชื่อถือและมีความแม่นยำสูงในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ แนวคิดสำคัญของวิธีการเชิงการแปรผันคือการเปลี่ยนรูปแบบของปัญหาเดิมซึ่งอยู่ในรูปของการอินทิกรัลให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้วิธีการหาค่าเฉลยด้วยวิธีการอื่น ๆ ได้ง่ายกว่า ในที่นี้วิธีการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพโดยวิธีการเชิงการแปรผันเริ่มต้นจากการพิจารณาภาพเป็นฟังก์ชัน และสร้างตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ โดยทั่วไปอยู่ในรูปปัญหาการหาค่าต่ำสุด

$$\min_{u \in U} \{J(u) = \alpha D(u) + R(u)\}$$

เมื่อ $D(u)$ แทนพจน์วัดความผิดปกติของข้อมูล $R(u)$ แทนพจน์เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชัน และ α แทนพารามิเตอร์ที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนัก จากนั้นทำการประยุกต์แคลคูลัสของการแปรผัน (calculus of variations) ในการสร้างสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมมูลกับตัวแบบดังกล่าว ขั้นตอนสุดท้ายคือการใช้เทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ วิธีการเชิงตัวเลขสำหรับแก้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งโดยทั่วไปสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้จากตัวแบบเชิงการแปรผันมักเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้น

จากภาพรวมดังกล่าวข้างต้น แนวทางงานวิจัยที่ใช้ในการศึกษาปัญหาการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แนวทางกว้าง ๆ คือแนวทางแรกเป็นการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่มีความน่าเชื่อถือและแม่นยำ [4] ส่วนแนวทางที่สองคือ การพัฒนาวิธี

การเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสูงและรวดเร็วสำหรับแก้สมการ [5] ดังนั้นทั้งสองแนวทางจึงเป็นสิ่งจำเป็นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

งานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะทำการศึกษาดูแบบที่พัฒนาสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสมออกจากภาพและพัฒนาเทคนิควิธีการเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสำหรับแก้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่ได้จากตัวแบบการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสม ทั้งนี้เนื่องจากผลของการดิสครีไทซ์เซชันได้นำไปสู่การแก้ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่มีจำนวนตัวไม่ทราบค่าเท่ากับจำนวนของกริดในการประมวลผลภาพดิจิทัลที่มีความละเอียดสูง จำนวนของตัวไม่ทราบค่าในระบบสมการจะมีมากกว่า 2 แสนตัวขึ้นไป ทำให้วิธีการทำซ้ำพื้นฐานทั่วไปสำหรับการแก้ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น เช่น วิธีการ nonlinear Gauss-Seidel relaxation method หรือวิธีการแบบนิวตัน (Newton method) มีประสิทธิภาพน้อยและไม่เหมาะสมสำหรับการนำไปใช้ในทางปฏิบัติ ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยเล็งเห็นว่าการพัฒนาวิธีการทำซ้ำที่มีประสิทธิภาพสูงสำหรับแก้ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นขนาดใหญ่ที่เกิดจากตัวแบบกำจัดสัญญาณรบกวน จึงเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการประมวลผลภาพที่มีความละเอียดสูง และเนื่องจากภาพถ่ายบางประเภท เช่น ภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง มักปรากฏสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิล เพื่อพัฒนาตัวแบบที่เหมาะสมกับการแก้ปัญหาดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้ทำการพัฒนาตัวแบบเชิงการแปรผันที่ปรับปรุงขึ้นสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสมออกจากภาพถ่ายทางการแพทย์ และพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับแก้ตัวแบบเชิงการแปรผันที่ปรับปรุงอีกด้วย

ในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพโดยวิธีการเชิงการแปรผัน วิธีการนี้เริ่มต้นจากการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับภาพถ่ายดิจิทัลซึ่งในทางคณิตศาสตร์ ภาพเชิงสเกลาร์แบบสองมิติสามารถเขียนตัวแบบโดยพิจารณาภาพเป็นฟังก์ชัน $I: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset [0, \infty)$ ที่ถูกนิยามบนโดเมนภาพ

(Image Domain) Ω ที่มีรูปร่างเป็นรูปสี่เหลี่ยม ในที่นี้การกำหนดให้เรนจ์ของภาพ $R(I) \subset [0, \infty)$ เพื่อระบุว่า I เป็นภาพที่มีความเข้มของภาพ (Image Intensity) อยู่ในอัตราส่วนความเข้มของภาพในโทนสีเทา (Grayscale) 8 บิต กล่าวคือ ภาพ I เกี่ยวข้องกับแต่ละสมาชิก $x \in \Omega$ ด้วยค่าความเข้มโทนสีเทา $I(x) \in V$ ซึ่งในที่นี้ เราสามารถสมมติได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญว่า $\Omega = [1, M] \times [1, N] \subset \mathbb{R}^2$ และ $V = [0, 255]$ เมื่อ M และ N เป็นจำนวนเต็มบวก

สัญญาณรบกวนแบบการรบกวนถูกพบในกระบวนการบันทึกสัญญาณภาพด้วยเครื่องมือดิจิทัล มีงานวิจัยจำนวนมากที่ใช้ตัวแบบการสร้างภาพ (Image Formation Model) ด้วยสัญญาณรบกวนชนิดนี้ ในตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการรบกวน เรามิได้หมายถึงการสุ่มหรือซ่อมแซมภาพต้นฉบับ (ไม่ทราบ) $u: \Omega \rightarrow V$ จากภาพที่มีสัญญาณรบกวน (ทราบ) $z: \Omega \rightarrow V$ ซึ่งเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการรบกวน ดังนี้

$$z = u + \eta \quad (1)$$

โดยทั่วไป η แทนสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนซึ่งมีค่าเฉลี่ยศูนย์ [1, 4, 5]

สัญญาณรบกวนแบบการคูณหรือสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิลถูกพบในภาพที่ได้จากระบบการสร้างภาพแบบโคฮีเลนต์ เช่น ภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง และภาพเลเซอร์ เป็นต้น ในตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการคูณ ภาพต้นฉบับถูกเจือปนด้วยสัญญาณรบกวนแบบการคูณ η ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$z = u\eta \quad (2)$$

เราสามารถสมมติได้โดยไม่เสียหลักการสำคัญว่า $u, \eta > 0$ ในการกำจัดสัญญาณรบกวนชนิดนี้ออกจากภาพทำได้ค่อนข้างยากกว่าการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการรบกวน ทั้งนี้เนื่องจากการคูณระหว่างสัญญาณรบกวนและภาพต้นฉบับส่งผลให้มีความถี่สูง รวมทั้งการแจกแจงของสัญญาณรบกวนชนิดนี้ไม่เป็นแบบเกาส์เซียน [1, 5, 6] โดยทั่วไป การแจกแจงของสัญญาณรบกวนชนิดนี้เป็นการแจกแจงแบบแกมมา (Gamma) หรือแบบ

เรย์ลี (Rayleigh) สำหรับการศึกษาเกี่ยวกับการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวกและการคูณเพียงอย่างเดียวที่ได้รับความนิยมถูกคิดค้นโดยคณะวิจัยของ Rudin [4] และคณะวิจัยของ Jin Yang [6] ตามลำดับ

ในงานวิจัยของ Hirakawa และ Park [2] และคณะวิจัยของ Lukin [3] ได้ยืนยันข้อเท็จจริงว่า ตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการบวกหรือแบบการคูณแบบใดแบบหนึ่งนั้นไม่เป็นจริงเสมอไป และผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่าส่วนประกอบของสัญญาณรบกวนแบบการบวกไม่สามารถตัดทิ้งได้ ซึ่งตัวแบบการสร้างภาพที่เหมาะสมสำหรับปัญหาดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น

$$z = u + k_0\eta + k_1u\zeta \quad (3)$$

โดยที่ k_0 และ k_1 แทนค่าคงที่ η และ ζ แทนส่วนประกอบของสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณตามลำดับ

Rudin Osher และ Fatemi [4] เป็นนักวิจัยกลุ่มแรกที่นำเสนอตัวแบบในการกำจัดสัญญาณแบบการบวกซึ่งเป็นตัวแบบที่มีชื่อเสียงในการให้ผลลัพธ์ที่มีความคมชัดดี โดยตัวแบบ ROF กำหนดดังนี้

$$\min_{u \in U} \{J^{TV}(u) = \alpha D_{AN}(u) + R^{TV}(u)\} \quad (4)$$

เมื่อ $R^{TV}(u) = \int |\nabla u| d\Omega$ แทนเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวม $D_{AN}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u-z)^2 d\Omega$ แทนพจน์วัดความผิดพลาดของข้อมูล แต่เนื่องจากเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวมทำให้เกิดปรากฏการณ์ขั้นบันได คือ แปลงสัญญาณที่เรียบให้เป็นขั้นบันได

เพื่อแก้ปัญหานี้ You และ Kaveh [7] ได้นำเสนอเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบลาปลาซ

$$R^{TL}(u) = \int_{\Omega} |\Delta u| d\Omega$$

เมื่อ Δu แทนการดำเนินการลาปลาซ และนำเสนอตัวแบบ TL ดังนี้

$$\min_{u \in U} \{J^{TL}(u) = \alpha D_{AN}(u) + R^{TL}(u)\} \quad (5)$$

และนอกจากนี้ยังมีคณะวิจัยของ Zheng [8] คณะวิจัยของ Wang [9] และคณะวิจัยของ Chan [10] ได้นำเสนอเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวมแบบ

ลาปลาซ ที่ได้รวมเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวมกับเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันแบบลาปลาซเข้าด้วยกัน เพื่อใช้ข้อดีของเร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันทั้งสองแบบ

$$R^{TVL}(u) = \sigma_1 R^{TV}(u) + \sigma_2 R^{TL}(u)$$

และนำเสนอตัวแบบ TVL ดังนี้

$$\min_{u \in U} \{J^{TVL}(u) = \alpha D_{AN}(u) + R^{TVL}(u)\} \quad (6)$$

แนวทางในการแก้ปัญหาการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพซึ่งถูกเจือปนด้วยการผสมของสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบการคูณดังตัวแบบ (3) ที่เป็นไปได้คือประยุกต์ใช้วิธีการแบบสองขั้นตอน โดยเริ่มจากการใช้เทคนิคการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการบวกแล้วตามด้วยการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบการคูณหรือในทางกลับกัน อย่างไรก็ตามวิธีการสองขั้นตอนนี้ใช้ทรัพยากรในการคำนวณค่อนข้างสูง เพื่อแก้ปัญหานี้ในงานวิจัยของคณะวิจัยของ Chumchob [5] จึงได้นำเสนอวิธีการกำจัดสัญญาณรบกวนโดยใช้วิธีการแบบขั้นตอนเดียว โดยนำเสนอตัวแบบการกำจัดสัญญาณรบกวนซึ่งใช้ข้อดีในการให้ความคมชัดของเส้นที่ปรากฏในภาพสูงและสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพได้เป็นอย่างดี ดังนี้

$$\min_{u \in U} \{J_{\alpha_1, \alpha_2}(u) = R^{TV}(u) + \alpha_1 D_{AN}(u) + \alpha_2 D_{JY}(u)\} \quad (7)$$

เมื่อ $D_{AN}(u)$ และ $D_{JY}(u) = \int (u + ze^{-u}) d\Omega$ เป็นพจน์วัดความเหมาะสมของข้อมูลระหว่างภาพที่กำลังถูกซ่อมแซม u กับภาพที่มีสัญญาณรบกวน z และ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ แทนพารามิเตอร์เร็กกิวลาร์ไรซ์เซชันที่ใช้ปรับสมดุลระหว่างพจน์วัดความเหมาะสมของข้อมูลจากสัญญาณรบกวนแบบการบวก (พจน์ที่ 2) และแบบการคูณ (พจน์ที่ 3) ตามลำดับ

คณะวิจัยของ Loupas [11] ได้แสดงให้เห็นว่าสัญญาณรบกวนที่ปรากฏในภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูงซึ่งเรียกว่าสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิลสามารถเขียนอยู่ในรูปของตัวแบบการสร้างภาพดังต่อไปนี้

$$z = u + u^{\zeta} \quad (8)$$

เมื่อ ζ แทนสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนซึ่งมีค่าเฉลี่ย

ศูนย์ และจากการทดลองพบว่า $m = 0.5$ เป็นตัวแบบที่เหมาะสมที่สุด

ต่อมาได้มีคณะวิจัยของ Krissian [12] ได้นำเสนอตัวแบบสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิลออกจากภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง เรียกว่าตัวแบบ KKWW ดังนี้

$$\min_{u \in U} \{J^{KKWW}(u) = \alpha_1 D_{KKWW}(u) + R^{TV}(u)\} \quad (9)$$

เมื่อ $D_{KKWW}(u) = \int \frac{(u-z)^2}{u} d\Omega$ และนอกจากนี้คณะวิจัยของ Jin และ Yang [6] ได้พิสูจน์การมีจริงและมีหนึ่งเดียวของคำตอบ

เมื่อไม่นานมานี้ Goldstein และ Osher [13] ได้คิดค้นวิธีการสปริตเบรกแมน (Split Bregman (SB) Method) ซึ่งเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพสูงในการแก้ปัญหาเชิงการแปรผัน และแสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้เข้าสู่คำตอบได้อย่างรวดเร็วอีกด้วย

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยมุ่งเน้นพัฒนาการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพซึ่งถูกเจือปนด้วยการผสมของสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบสเปกเคิล โดยการปรับปรุงตัวแบบซึ่งใช้ข้อดีของตัวแบบ KKWW และตัวแบบ ROF และเพื่อแก้ปัญหาปรากฏการณ์ขั้นบันได ผู้วิจัยได้ปรับปรุงและเปรียบเทียบตัวแบบดังกล่าว กับตัวแบบที่ได้รับการพัฒนาโดยใช้ $R^{TL}(u)$ และ $R^{TV}(u)$ พร้อมทั้งพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพ โดยในการหาคำตอบของปัญหาเชิงการแปรผันผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการ SB

2. วิธีการดำเนินการวิจัย

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการปรับปรุงตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสมในขั้นตอนเดียว และพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาตัวแบบที่ได้นำเสนอ ดังนี้

2.1 ตัวแบบการกำจัดสัญญาณรบกวนที่นำเสนอ

เนื่องจากตัวแบบสัญญาณรบกวนแบบการบวกหรือแบบการคูณแบบใดแบบหนึ่งนั้นไม่เป็นจริงเสมอไป

[2, 3] ในกรณีเฉพาะภาพถ่ายทางการแพทย์มักมีสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิล [11] ผู้วิจัยจึงได้พัฒนาตัวแบบการสร้างภาพดังนี้

$$z = u + k_0 \eta + k_1 \sqrt{u} \zeta \quad (10)$$

โดยที่ η และ ζ แทนส่วนประกอบของสัญญาณรบกวนแบบการบวกและแบบสเปกเคิลตามลำดับ

ในการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสม (10) ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบซึ่งใช้ข้อดีในการกำจัดสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิลของตัวแบบ KKWW และแบบการบวกของตัวแบบ ROF ซึ่งพจน์เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันของตัวแบบทั้งสองเป็นเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวม $R^{TV}(u)$ ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\min_{u \in U} \{J^{KKWW-TV}(u) = R^{TV}(u) + \alpha_1 D_{AN}(u) + \alpha_2 D_{KKWW}(u)\} \quad (11)$$

แม้ว่าเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันแบบการแปรผันรวม $R^{TV}(u)$ จะมีประสิทธิภาพในการรักษาขอบของภาพในการกำจัดสัญญาณรบกวน แต่ก็มีผลกระทบสัญญาณให้มีความเรียบเป็นขั้นบันไดโดยไม่จำเป็น เพื่อแก้ปัญหานี้ You และ Kaveh [7] จึงนำเสนอเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันแบบลาปลาซ ซึ่งยังคงคุณสมบัติการรักษาขอบของภาพได้เป็นอย่างดี ด้วยเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึงได้ปรับปรุงตัวแบบเชิงการแปรผันสำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสมซึ่งกำหนดโดย

$$\min_{u \in U} \{J^{KKWW-TL}(u) = R^{TL}(u) + \alpha_1 D_{AN}(u) + \alpha_2 D_{KKWW}(u)\} \quad (12)$$

หลากหลายคณะวิจัย [4, 8, 9, 10, 14] แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพในการกำจัดสัญญาณรบกวนจากการผสมพจน์เร็กคิวลาร์ไรซ์เซชันทั้งสองแบบ โดยใช้ข้อดีของทั้งเร็กคิวลาร์ไรซ์เซชัน $R^{TV}(u)$ และ $R^{TL}(u)$ ผู้วิจัยจึงได้ปรับปรุงตัวแบบที่ได้นำเสนอกำหนดโดย

$$\min_{u \in U} \{J^{KKWW-TL}(u) = \sigma_1 R^{TV}(u) + \sigma_2 R^{TL}(u) + \alpha_1 D_{AN}(u) + \alpha_2 D_{KKWW}(u)\} \quad (13)$$

เมื่อ σ_1 และ σ_2 แทนพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนักที่ใช้ปรับสมดุลระหว่างพจน์ $R^{TV}(u)$ และ $R^{TL}(u)$

2.2 วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

กำหนดให้ $\Omega_h = \{(x, y) \in \Omega \mid (x, y) = (x_i, y_j), x_i = i, y_j = j, i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N\}$ แทนโดเมนแบบดิสครีต เพื่อความสะดวก สำหรับแต่ละจุดกริด $(x_i, y_j) \in \Omega_h$ เราจะเขียนแทนด้วย (i, j) โดยที่พิกัด x และ y จะวางแนวตามคอลัมน์และแถว ตามลำดับ เพื่อความรวดเร็วในการคำนวณ ในงานวิจัยนี้ทุกตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์แบบดิสครีตใช้เงื่อนไขค่าขอบแบบคาบ

ในที่นี้ สำหรับการประมาณค่าแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ u ที่แต่ละจุดกริด (i, j) สามารถกำหนดโดย

$$\begin{aligned}\partial_x^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j+1} - (u)_{i,j}, & 1 \leq i \leq M, 1 \leq j < N \\ (u)_{i,1} - (u)_{i,j}, & 1 \leq i \leq M, j = N \end{cases} \\ \partial_y^+(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i+1,j} - (u)_{i,j}, & 1 \leq i < M, 1 \leq j \leq N \\ (u)_{1,j} - (u)_{i,j}, & i = M, 1 \leq j \leq N \end{cases} \\ \partial_x^-(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j} - (u)_{i,j-1}, & 1 \leq i \leq M, 1 < j \leq N \\ (u)_{i,j} - (u)_{i,N}, & 1 \leq i \leq M, j = 1 \end{cases} \\ \partial_y^-(u)_{i,j} &= \begin{cases} (u)_{i,j} - (u)_{i-1,j}, & 1 < i \leq M, 1 \leq j \leq N \\ (u)_{i,j} - (u)_{M,j}, & i = 1, 1 \leq j \leq N \end{cases}\end{aligned}$$

2.3 วิธีการ SB สำหรับตัวแบบที่ได้นำเสนอ

2.3.1 ตัวแบบ KKWW-TV

วิธีการ SB เริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรเวกเตอร์เสริม $w = (w_I, w_2)^T$ พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน (Bregman iterative parameter) $b = (b_I, b_2)^T$ และพารามิเตอร์ตัวโทษ (penalty parameter) $\theta > 0$ เพื่อแปลงปัญหาเชิงการแปรผัน (11) เป็น

$$\min_{u \in U} \left\{ J^{KKWW-TV}(w; b) = \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u - b)^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \frac{(u - z)^2}{u} d\Omega \right\} \quad (14)$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาเชิงการแปรผัน (14) สามารถทำได้โดยใช้เทคนิคการทำซ้ำแบบสลับ ซึ่งจะเป็นการแก้ปัญหาย่อยสองปัญหาสำหรับ u และ w โดยจะดำเนินการทำซ้ำแบบสลับจนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด

$$\frac{\|u^{[new]} - u^{[old]}\|_{L_2}^2}{\|u^{[new]}\|_{L_2}^2} < \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad \text{จำนวนรอบการทำซ้ำสูงสุด } k \text{ รอบ} \quad (15)$$

เมื่อ $u^{[new]}$ และ $u^{[old]}$ แทนเวกเตอร์ของ u ที่ได้จากการทำซ้ำรอบปัจจุบันและการทำซ้ำรอบก่อนหน้า และ $\varepsilon > 0$ แทนค่าความแม่นยำ โดยในงานวิจัยนี้กำหนด $\varepsilon = 10^{-4}$ และ $k = 200$ สำหรับ u และ w และทำการปรับปรุงพารามิเตอร์ b ดังนี้

$$u^{[new]} = \arg \min_u \left\{ \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w^{[old]} - \nabla u - b^{[old]})^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \frac{(u - z)^2}{u} d\Omega \right\} \quad (16)$$

$$w^{[new]} = \arg \min_w \left\{ \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u^{[new]} - b^{[old]})^2 d\Omega \right\} \quad (17)$$

$$b^{[new]} = b^{[old]} + \nabla u^{[new]} - w^{[new]} \quad (18)$$

สังเกตว่า ปัญหาย่อย u สามารถแก้ได้ด้วยวิธีการหาคำตอบที่มีรูปแบบปิด ในขณะที่การหาคำตอบของปัญหาย่อย w สามารถหาได้จากสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาย่อย u เมื่อตรงตัวแปร $(w; b)$ ใน (16) แล้วใช้แคลคูลัสของการแปรผันเพื่อแก้ปัญหาค่าต่ำที่สุดจะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ดังนี้

$$u - \frac{\theta}{\alpha_1} \Delta u = z - \frac{\theta}{\alpha_1} \operatorname{div}(w - b) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{z^2}{u^2} \right) \quad (19)$$

เมื่อทำการดิสครีไทซ์เซชันโดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ จะได้ว่า

$$(u)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} - \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j} \right) = (G)_{i,j} \quad (20)$$

โดยที่

$$(G)_{i,j} = (z)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- ((w_1)_{i,j} - (b_1)_{i,j}) - \partial_y^- ((w_2)_{i,j} - (b_2)_{i,j}) \right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{(z)_{i,j}^2}{(u)_{i,j}^2} \right)$$

เพื่อแก้ปัญหามาตรการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (20) เราใช้วิธีการทำซ้ำภายในและภายนอกดังนี้ สำหรับการทำซ้ำภายนอก เริ่มต้นจากการกำหนดคำตอบเริ่มต้น $u^{[0]}$ (ในกรณีเฉพาะ $u^{[0]} = z$) จากนั้นคำนวณหาลำดับของคำตอบ $u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[v]}, u^{[v+1]}, \dots$ โดยดำเนินการแก้ระบบสมการของสมการเชิงเส้น

$$\left(u^{[v+1]} \right)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\Delta u^{[v+1]} \right)_{i,j} = G \left(u^{[v]} \right)_{i,j} \quad (21)$$

จนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด (15) สังเกตว่า (21) ถูกทำให้เป็นเชิงเส้นโดยวิธีการทำซ้ำแบบจุดตรง และทำการดิสครีไทซ์เซชันโดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ โดยที่ v แทนดัชนีสำหรับขั้นตอนการทำซ้ำภายนอกและ

$$\left(G^{[v]} \right)_{i,j} = (z)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- ((w_1)_{i,j} - (b_1)_{i,j}) - \partial_y^- ((w_2)_{i,j} - (b_2)_{i,j}) \right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{(z)_{i,j}^2}{(u^{[v]})_{i,j}^2} \right)$$

เมื่อใช้การแปลงฟูเรียร์แบบดิสครีต F พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าขอบแบบคาบกับ (20) จะได้

$$F \left((u)_{i,j} - \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} - \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j} \right) \right) = F \left((G)_{i,j} \right) \quad (22)$$

หรือ

$$\underbrace{1 - 2 \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right)}_{\varsigma} F \{ (u)_{i,j} \} = F \{ (G)_{i,j} \} \quad (23)$$

เมื่อ $i \in [1, M]$ และ $j \in [1, N]$ แทนดัชนีในโดเมนเวลา $r \in [0, M)$ และ $s \in [0, N)$ แทนดัชนีในโดเมนความถี่ ดังนั้นผลเฉลยของ (20) ถูกกำหนดโดย

$$(u)_{i,j} = \operatorname{Re} \left(F^{-1} \left(\frac{F \left((G)_{i,j} \right)}{\varsigma} \right) \right) \quad (24)$$

ในที่นี้ F^{-1} แทนการแปลงฟูเรียร์ผกผันแบบดิสครีต และ Re เป็นส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

ปัญหาย่อย w การคำนวณเวกเตอร์ w สามารถคำนวณได้จาก [14]

$$\frac{w}{|w|} + \theta(w - \nabla u - b) = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) คือ

$$(w)_{i,j} = \max\left(|\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}| - \frac{1}{\theta}, 0\right) \frac{\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}}{|\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}|} \quad (25)$$

และขั้นตอนสุดท้ายคือการปรับปรุงพารามิเตอร์การทำซ้ำแบร็กแมน โดยกำหนดให้ $b \leftarrow b + \nabla u - w$

2.3.2 ตัวแบบ KKVV-TL

เพื่อที่จะแก้ปัญหาค่าต่ำสุดของตัวแบบ KKVV-TL เราเริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรเวกเตอร์เสริม $w = (w_1, w_2)^T$ พารามิเตอร์การทำซ้ำแบร็กแมน $b = (b_1, b_2)^T$ และพารามิเตอร์ตัวโทษ $\theta > 0$ เพื่อแปลงปัญหาเชิงการแปรผัน (12) เป็น

$$\min_{u \in U} \left\{ J^{KKVV-TL}(w; b) = \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \Delta u - b)^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \frac{(u - z)^2}{u} d\Omega \right\} \quad (26)$$

ในทำนองเดียวกัน การแก้ปัญหาก็สามารถทำได้โดยใช้เทคนิคการทำซ้ำแบบสลับ ซึ่งจะเป็นการแก้ปัญหาย่อยสองปัญหาสำหรับ u และ w โดยจะดำเนินการทำซ้ำแบบสลับจนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด (15) สำหรับ u และ w และทำการปรับปรุงพารามิเตอร์ b ดังนี้

$$u^{[new]} = \arg \min_u \left\{ \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w^{[old]} - \Delta u - b^{[old]})^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \frac{(u - z)^2}{u} d\Omega \right\} \quad (27)$$

$$w^{[new]} = \arg \min_w \left\{ \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (w - \Delta u^{[new]} - b^{[old]})^2 d\Omega \right\} \quad (28)$$

$$b^{[new]} = b^{[old]} + \Delta u^{[new]} - w^{[new]} \quad (29)$$

ปัญหาย่อย u เมื่อตรึงตัวแปร $(w; b)$ ใน (27) แล้วใช้แคลคูลัสของการแปรผันเพื่อแก้ปัญหาค่าต่ำที่สุดจะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ดังนี้

$$u + \frac{\theta}{\alpha_1} \Delta(\Delta u) = z + \frac{\theta}{\alpha_1} \Delta(w - b) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{z^2}{u^2}\right) \quad (30)$$

เมื่อทำการดิสครีตไทป์เซชันโดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ จะได้ว่า

$$(u)_{i,j} + \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ \partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} + \partial_x^- \partial_x^+ \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j} + \partial_y^- \partial_y^+ \partial_x^- \partial_x^+ (u)_{i,j} + \partial_y^- \partial_y^+ \partial_y^- \partial_y^+ (u)_{i,j} \right) = (G)_{i,j} \quad (31)$$

โดยที่

$$(G)_{i,j} = (z)_{i,j} + \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ ((w)_{i,j} - (b)_{i,j}) + \partial_y^- \partial_y^+ ((w)_{i,j} - (b)_{i,j}) \right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{(z)_{i,j}^2}{(u^{[v]})_{i,j}^2} \right)$$

เพื่อแก้ปัญหาค่าต่ำสุดเชิงอนุพันธ์อย่างง่ายไม่เชิงเส้น (31) เราใช้วิธีการทำซ้ำภายในและภายนอกดังนี้ สำหรับการซ้ำภายนอก เริ่มต้นจากการกำหนดคำตอบเริ่มต้น $u^{[0]}$ (ในกรณีเฉพาะ $u^{[0]} = z$) จากนั้นคำนวณหาลำดับของคำตอบ $u^{[1]}, u^{[2]}, \dots, u^{[v]}, u^{[v+1]}, \dots$ โดยดำเนินการแก้ระบบสมการของสมการเชิงเส้น

$$\left(u^{[v+1]}\right)_{i,j} + \frac{\theta}{\alpha_1} \Delta \left(\Delta u^{[v+1]}\right)_{i,j} = G \left(u^{[v]}\right)_{i,j} \quad (32)$$

จนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด (15) สังเกตว่า (32) ถูกทำให้เป็นเชิงเส้นโดยวิธีการทำซ้ำแบบจุดตรึง และทำการดิสครีไทซ์เซชันโดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ โดยที่ v แทนดัชนีสำหรับขั้นตอนการทำซ้ำภายนอกและ

$$\left(G^{[v]}\right)_{i,j} = (z)_{i,j} + \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ \left((w)_{i,j} - (b)_{i,j} \right) + \partial_y^- \partial_y^+ \left((w)_{i,j} - (b)_{i,j} \right) \right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{(z)_{i,j}^2}{\left(u^{[v]}\right)_{i,j}^2} \right)$$

เมื่อใช้การแปลงฟูเรียร์แบบดิสครีต F พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าขอบแบบคาบ กับ (31) จะได้

$$F \left(\left(u\right)_{i,j} + \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\partial_x^- \partial_x^+ \partial_x^- \partial_x^+ \left(u\right)_{i,j} + \partial_x^- \partial_x^+ \partial_y^- \partial_y^+ \left(u\right)_{i,j} + \partial_y^- \partial_y^+ \partial_x^- \partial_x^+ \left(u\right)_{i,j} + \partial_y^- \partial_y^+ \partial_y^- \partial_y^+ \left(u\right)_{i,j} \right) \right) = F \left((G)_{i,j} \right)$$

หรือ

$$\underbrace{\left(1 + 4 \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right)^2 \right)}_{\text{}} F \{ (u)_{i,j} \} = F \{ (G)_{i,j} \}$$

เมื่อ $i \in [1, M]$ และ $j \in [1, N]$ แทนดัชนีในโดเมนเวลา $r \in [0, M]$ และ $s \in [0, N]$ แทนดัชนีในโดเมนความถี่ ดังนั้นผลเฉลยของ (31) ถูกกำหนดโดย

$$(u)_{i,j} = \text{Re} \left(F^{-1} \left(\frac{F((G)_{i,j})}{\varsigma} \right) \right)$$

ในที่นี้ F^{-1} แทนการแปลงฟูเรียร์ผกผันแบบดิสครีต และ Re เป็นส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

ปัญหย่อย w การคำนวณเวกเตอร์ w สามารถคำนวณได้จาก

$$\frac{w}{|w|} + \theta(w - \Delta u - b) = 0$$

ซึ่งผลเฉลยแน่นอนตรงคือ

$$(w)_{i,j} = \max \left(\left| \Delta(u)_{i,j} + (b)_{i,j} \right| - \frac{1}{\theta}, 0 \right) \text{sign} \left(\Delta(u)_{i,j} + (b)_{i,j} \right)$$

และขั้นตอนสุดท้ายคือการปรับปรุงพารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน โดยกำหนดให้ $b \leftarrow b + \Delta u - w$

2.3.3 ตัวแบบ KKWW-TV L

ในทำนองเดียวกัน เราเริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรเวกเตอร์เสริม (w, v) พารามิเตอร์การทำซ้ำเบรกแมน (b, c) และพารามิเตอร์ตัวโทษ (θ_1, θ_2) และแปลงปัญหาเชิงการแปรผัน (13) ได้เป็น

$$\min_{u \in U} \left\{ J^{KKWW-TV L}(w; b) = \sigma_1 \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta_1}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u - b)^2 d\Omega + \sigma_2 \int_{\Omega} |v| d\Omega + \frac{\theta_2}{2} \int_{\Omega} (v - \Delta u - c)^2 d\Omega \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \frac{(u - z)^2}{u} d\Omega \right\} \quad (33)$$

จากนั้นใช้เทคนิคการทำซ้ำแบบสลับในการแก้ปัญหย่อย โดยจะดำเนินการทำซ้ำแบบสลับจนกระทั่งลำดับของ u สอดคล้องกับเกณฑ์การหยุด (15)

เพื่อแก้ปัญหาค่าต่ำที่สุด เราตรึงตัวแปร $(w; b, v; c)$ แล้วใช้แคลคูลัสของการแปรผันจะได้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์

ดังนั้น

$$u - \frac{\theta_1}{\alpha_1} \Delta u + \frac{\theta_2}{\alpha_1} \Delta(\Delta u) = z - \frac{\theta_1}{\alpha_1} \operatorname{div}(w - b) + \frac{\theta_2}{\alpha_1} \Delta(v - c) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{z^2}{u^2}\right) \quad (34)$$

สำหรับ u, w และ v และทำการปรับปรุงพารามิเตอร์ b และ c ดังนี้

$$u^{[new]} = \arg \min_u \left\{ \frac{\theta_1}{2} \int_{\Omega} (w^{[old]} - \nabla u - b^{[old]})^2 d\Omega + \frac{\theta_2}{2} \int_{\Omega} (v^{[old]} - \Delta u - c^{[old]})^2 d\Omega + \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} (u - z)^2 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \frac{(u - z)^2}{u} d\Omega \right\}$$

$$w^{[new]} = \arg \min_w \left\{ \sigma_1 \int_{\Omega} |w| d\Omega + \frac{\theta_1}{2} \int_{\Omega} (w - \nabla u^{[new]} - b^{[old]})^2 d\Omega \right\}$$

$$v^{[new]} = \arg \min_v \left\{ \sigma_2 \int_{\Omega} |v| d\Omega + \frac{\theta_2}{2} \int_{\Omega} (v - \Delta u^{[new]} - c^{[old]})^2 d\Omega \right\}$$

$$b^{[new]} = b^{[old]} + \nabla u^{[new]} - w^{[new]}$$

$$c^{[new]} = c^{[old]} + \Delta u^{[new]} - v^{[new]}$$

จากนั้นทำการดิสครีไทซ์เซชันโดยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และใช้การแปลงฟูเรียร์แบบดิสครีต F พร้อมด้วยเงื่อนไขค่าขอบแบบคาบกับ (34) จะได้คำตอบกำหนดโดย

$$(u)_{i,j} = \operatorname{Re} \left(F^{-1} \left(\frac{F((G)_{i,j})}{\varsigma} \right) \right)$$

ในที่นี้ F^{-1} แทนการแปลงฟูเรียร์ผกผันแบบดิสครีต, Re เป็นส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน, $\varsigma = 1 + \varsigma_1 + \varsigma_2$ และ G เป็นพจน์ทางขวามือของ (34) โดยที่

$$\varsigma_1 = -2 \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right) \text{ และ } \varsigma_2 = 4 \frac{\theta}{\alpha_1} \left(\cos \frac{2\pi s}{N} + \cos \frac{2\pi r}{M} - 2 \right)^2$$

สำหรับปัญหาดิสครีไทซ์สำหรับเวกเตอร์ w และ v มีผลเฉลยแน่นอนตรง คือ

$$(w)_{i,j} = \max \left(\left| \nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j} \right| - \frac{\sigma_1}{\theta_1}, 0 \right) \frac{\nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j}}{\left| \nabla(u)_{i,j} + (b)_{i,j} \right|}$$

$$(v)_{i,j} = \max \left(\left| \Delta(u)_{i,j} + (c)_{i,j} \right| - \frac{\sigma_2}{\theta_2}, 0 \right) \operatorname{sign}(\Delta(u)_{i,j} + (c)_{i,j})$$

และขั้นตอนสุดท้ายคือการปรับปรุงพารามิเตอร์การทำซ้ำแบร็กแมน โดยกำหนดให้ $b \leftarrow b + \nabla u - w$ และ $c \leftarrow c + \Delta u - v$

3. ผลการวิจัย

คณะวิจัยได้ออกแบบการทดลองเชิงตัวเลขสำหรับทดสอบการจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพทั้งภาพสังเคราะห์และภาพจริง เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวแบบเชิงการแปรผันอันดับสูงที่ได้นำเสนอทั้ง 3 ตัวแบบ ได้แก่ ตัวแบบ KKWV-TV ตัวแบบ KKWV-TL และตัวแบบ KKWV-TVL และแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการเชิงตัวเลขที่ได้นำเสนอ โดยทดสอบประสิทธิภาพของตัวแบบและวิธีการที่ได้นำเสนอจะถูกประเมินด้วยเครื่องมือการประเมินประสิทธิภาพของการปรับปรุงคุณภาพของภาพเปรียบเทียบกับภาพต้นฉบับ คือ ค่าอัตราส่วนของสัญญาณรบกวนสูงสุด (Peak Signal to Noise Ratio : PSNR)

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \text{ (หน่วยเป็นเดซิเบล)}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองโดยเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE)

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left((u^*)_{i,j} - (u)_{i,j} \right)^2$$

และค่าการวัดดัชนีความคล้ายคลึงของโครงสร้าง (Structure Similarity Index Map : SSIM)

$$SSIM = \frac{4\mu_u \cdot \mu_u \sigma_u \cdot \sigma_u}{(\mu_u^2 + \mu_u^2)(\sigma_u^2 + \sigma_u^2)}$$

โดยที่

$$\mu_u^* = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u^*)_{i,j},$$

$$\mu_u = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u)_{i,j},$$

$$\sigma_u^* = \left(\frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left((u^*)_{i,j} - \mu_u^* \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{และ } \sigma_u = \left(\frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left((u)_{i,j} - \mu_u \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ในที่นี้ u^* และ u แทนเวกเตอร์ของภาพต้นฉบับซึ่งไม่มีสัญญาณรบกวนและเวกเตอร์ของภาพผลลัพธ์ที่ได้จากการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพด้วยตัวแบบเชิง

การแปรผัน ตามลำดับ การวัดประสิทธิภาพของผลลัพธ์จากค่า PSNR และค่า SSIM ถ้ามีค่าสูงจะแสดงให้เห็นถึงคุณภาพที่ใกล้เคียงกับภาพต้นฉบับ และการวัดประสิทธิภาพของผลลัพธ์จากค่า MSE ถ้ามีค่าต่ำแสดงให้เห็นถึงคุณภาพของภาพที่ใกล้เคียงกับภาพต้นฉบับ สำหรับการประเมินประสิทธิภาพของการกำจัดสัญญาณรบกวนที่ได้นำเสนอทุกการทดลองเชิงตัวเลขใช้ภาพที่มีความคมชัดขนาด 512×512 และในการประเมินประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีเชิงตัวเลขที่ได้พัฒนาขึ้นผู้วิจัยเลือกใช้พารามิเตอร์สำหรับแต่ละตัวแบบที่ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดและทำซ้ำจนกระทั่งเวกเตอร์ผลเฉลยคู่เข้าด้วยเกณฑ์การหยุดจำนวนรอบการทำซ้ำสูงสุดหรือค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (15)

เพื่อเป็นการแสดงให้เห็นประสิทธิภาพของตัวแบบที่ได้นำเสนอทั้ง 3 ตัวแบบ คือ ตัวแบบ KKWV-TV ตัวแบบ KKWV-TL และตัวแบบ KKWV-TVL พร้อมด้วยวิธีการ SB ผู้วิจัยจึงได้ทำการทดลองการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่มีสัญญาณรบกวนแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ดังตัวแบบการสร้างภาพ (10) และทำการทดลองโดยพิจารณาค่า (k_0, k_1) เป็น 9 กรณีนภาพสังเคราะห์ (ภาพ Constant และภาพ Smooth) และภาพจริง (ภาพ Boat) ดัง Table 1 โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพจากค่า PSNR ค่า SSIM และค่า MSE ผลการวิเคราะห์จาก Table 1 - 4 แสดงให้เห็นว่าตัวแบบ KKWV-TVL ให้ค่า PSNR และค่า SSIM ที่สูงกว่าตัวแบบ KKWV-TV และตัวแบบ KKWV-TL และเมื่อพิจารณาค่า MSE จะเห็นว่าตัวแบบ KKWV-TVL ให้ค่า MSE ที่ต่ำกว่าตัวแบบ KKWV-TV และตัวแบบ KKWV-TL ในทุกกรณี ซึ่งแสดงให้เห็นว่าตัวแบบที่ได้นำเสนอพร้อมด้วยวิธีการ SB สามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพได้เป็นอย่างดี มีความแม่นยำ และให้คุณภาพของภาพผลลัพธ์ที่ดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัดในทุกกรณี โดยตัวแบบ KKWV-TVL มีความแม่นยำสูงกว่าตัวแบบ KKWV-TV และตัวแบบ KKWV-TL

Table 1 PSNR of three noisy images (Constant image, Smooth image and Boat image).

(k_0, k_1)	(1,0.5)	(1,1)	(1,1.5)	(3,0.5)	(3,1)	(3,1.5)	(5,0.5)	(5,1)	(5,1.5)
ภาพ Constant	33.5208	27.5928	24.1136	32.4542	27.3052	23.9409	30.8907	26.7308	23.6731
ภาพ Smooth	33.4708	27.6207	24.1878	32.6290	27.3612	24.0607	31.3156	26.9786	23.8327
ภาพ Boat	32.9476	27.0173	23.5498	32.0023	26.7510	23.3727	30.5592	26.2677	23.1495

Table 2 Comparison of PSNR with synthetic images (Constant image and Smooth image) and real images (Boat image).

(k_0, k_1)	Constant Image			Smooth Image			Boat Image		
	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL
(1,0.5)	55.0181	40.3589	55.8542	40.9914	37.1588	41.1807	38.8764	39.3688	39.9535
(1,1)	47.0716	37.7800	48.3463	35.8185	32.6871	35.8692	34.4915	35.4983	35.8453
(1,1.5)	44.5809	33.9487	44.6465	31.9040	29.9454	32.2259	32.3069	33.0444	33.4194
(3,0.5)	54.2503	40.1349	54.9604	40.3740	36.2165	40.5862	38.2408	38.6275	39.2512
(3,1)	46.5075	37.6118	47.8764	35.6398	32.6851	35.6647	34.4211	35.3033	35.6773
(3,1.5)	44.7752	33.8729	44.9001	31.7489	30.0224	32.0778	32.8467	33.2672	33.2918
(5,0.5)	53.5012	39.7020	53.9060	39.555	34.7869	39.565	37.0794	37.7588	38.0420
(5,1)	45.3800	37.2385	47.1720	35.3476	32.4388	35.3536	34.2974	34.9300	35.3582
(5,1.5)	44.5011	33.5884	44.5514	31.4526	29.8117	31.8021	32.7502	33.1655	33.2240

Table 3 Comparison of SSIM with synthetic images (Constant image and Smooth image) and real images (Boat image).

(k_0, k_1)	Constant Image			Smooth Image			Boat Image		
	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL
(1,0.5)	0.9997	0.9866	0.9998	0.9825	0.9072	0.9893	0.9560	0.9628	0.9664
(1,1)	0.9934	0.9548	0.9973	0.9725	0.9491	0.9807	0.9179	0.9140	0.9261
(1,1.5)	0.9972	0.8541	0.9972	0.9098	0.8747	0.9407	0.8654	0.8763	0.8924
(3,0.5)	0.9996	0.9856	0.9997	0.9676	0.8726	0.9740	0.9470	0.9477	0.9598
(3,1)	0.9924	0.9527	0.9970	0.9656	0.9446	0.9658	0.9172	0.9106	0.9234
(3,1.5)	0.9973	0.8671	0.9973	0.8929	0.8712	0.9238	0.8855	0.8974	0.9003
(5,0.5)	0.9995	0.9830	0.9996	0.9602	0.9508	0.9603	0.9288	0.9397	0.9469
(5,1)	0.9884	0.9449	0.9955	0.9487	0.9248	0.9491	0.9152	0.9014	0.9167
(5,1.5)	0.9970	0.8572	0.9970	0.8692	0.8487	0.9046	0.8816	0.8939	0.8978

Table 4 Comparison of MSE with synthetic images (Constant image and Smooth image) and real images (Boat image).

(k_0, k_1)	Constant Image			Smooth Image			Boat Image		
	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL	KKWV-TV	KKWV-TL	KKWV-TVL
(1,0.5)	0.2038	5.9857	0.1679	5.1743	12.5073	4.9537	8.4215	7.5187	6.5715
(1,1)	1.2752	10.8404	0.9506	17.0298	35.0232	16.832	23.1157	18.3329	16.9249
(1,1.5)	2.2636	26.1936	2.2296	41.9437	65.847	38.9478	38.2282	32.2576	29.5884
(3,0.5)	0.2434	6.3026	0.2065	5.9650	15.5381	5.6805	9.7490	8.9183	7.7251
(3,1)	1.4522	11.2684	1.0593	17.7450	35.0397	17.6434	23.4935	19.1747	17.5926
(3,1.5)	2.1645	26.6549	2.1031	43.4687	64.6889	40.2982	33.7599	30.6441	30.4711
(5,0.5)	0.2894	6.9633	0.2635	7.2032	21.5960	7.1865	12.7381	10.8933	10.2057
(5,1)	1.8830	12.2800	1.2460	18.9799	37.0841	18.9540	24.1724	20.8961	18.9339
(5,1.5)	2.3056	28.4591	2.2790	46.5383	67.9049	42.9397	34.5181	31.3704	30.9504

นอกจากนี้เพื่อเป็นการแสดงให้เห็นประสิทธิภาพของตัวแบบทั้ง 3 ตัวแบบ พร้อมด้วยวิธีการ SB ดังกล่าวผู้วิจัยได้แสดงผลภาพจากการกำจัดสัญญาณรบกวนในกรณีสัญญาณรบกวน $(k_0, k_1) = (5, 1.5)$ ดังแสดงใน Figure 1

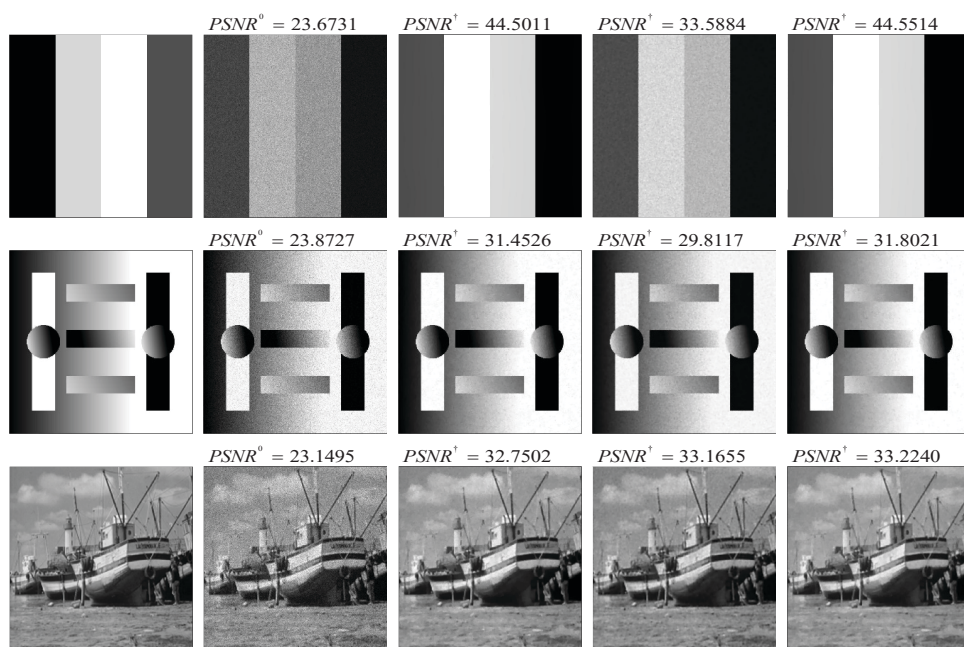


Figure 1 Results of the restoration of the synthetic and real images. The original image (the first column), the noisy images (the second column), the results are obtained by the KKWV-TV model, the results are obtained by the KKWV-TL model, and the results are obtained by the KKWV-TVL model.

นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้ทดสอบประสิทธิภาพของตัวแบบที่ได้นำเสนอ พร้อมด้วยวิธีการ SB ในการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง (ภาพ Baby) ซึ่งผลการกำจัดสัญญาณรบกวนแสดงให้เห็นว่า ตัวแบบที่ได้นำเสนอพร้อมด้วยวิธีการ SB สามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพได้เป็นอย่างดีและให้

คุณภาพของภาพผลลัพธ์ที่ดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัด เมื่อพิจารณาจากภาพขยายในกรอบสีแดงพบว่า การกำจัดสัญญาณรบกวนจากทั้ง 3 ตัวแบบ ยังคงรักษาองค์ประกอบที่สำคัญในภาพได้เป็นอย่างดี โดยภาพ (d) ปรากฏสัญญาณรบกวนน้อยกว่าภาพ (b) และ (c) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าตัวแบบ KKWW-TVL ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าตัวแบบ KKWW-TV และตัวแบบ KKWW-TL ดัง Figure 2

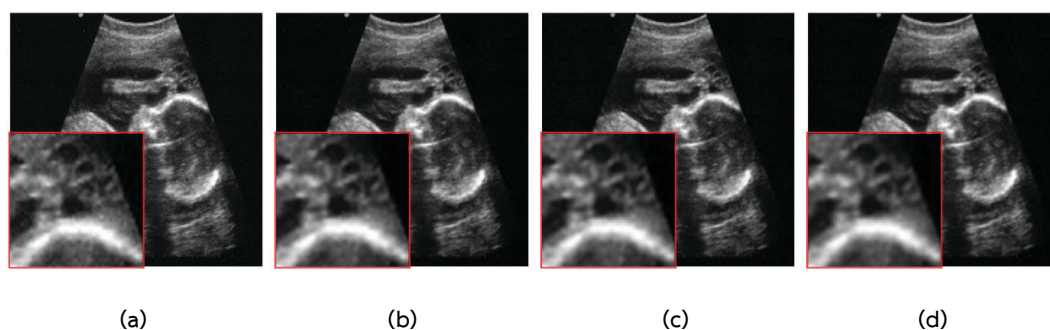


Figure 2 Ultrasound images of baby; (a) original image; (b) - (d) restoration results by the proposed variational models, KKWW-TV model, KKWW-TL model, and KKWW-TVL model, respectively.

4. สรุป

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอตัวแบบเชิงการแปรผัน KKWW-TV KKWW-TL และ KKWW-TVL สำหรับกำจัดสัญญาณรบกวนแบบผสมทั้งแบบการบวกและการคูณในขั้นตอนเดียวออกจากภาพสังเคราะห์ ภาพจริง และภาพถ่ายทางการแพทย์ เพื่อแก้ปัญหาเชิงการแปรผัน ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งผลการทดลองเชิงตัวเลขกับภาพสังเคราะห์ และภาพจริงแสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ KKWW-TVL ให้ค่า PSNR และค่า SSIM ที่สูงกว่าตัวแบบ KKWW-TV และตัวแบบ KKWW-TL และเมื่อพิจารณาค่า MSE จะเห็นว่าตัวแบบ KKWW-TVL ให้ค่า MSE ที่ต่ำกว่าตัวแบบ KKWW-TV และตัวแบบ KKWW-TL ในทุกกรณี นอกจากนี้จากการทดลองกับภาพถ่ายทางการแพทย์แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบทั้งสามสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพได้เป็นอย่างดี และให้คุณภาพผลลัพธ์ที่ดีขึ้นอย่างชัดเจน ทำให้ได้ว่าตัวแบบเชิงการแปรผันที่ได้นำเสนอสามารถให้ผลลัพธ์

จากการกำจัดสัญญาณรบกวนออกจากภาพที่มีความแม่นยำ และน่าเชื่อถืออย่างเห็นได้ชัดในทุกกรณี นอกจากนี้วิธีการเชิงตัวเลข SB ที่ได้นำเสนอสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยตัวแบบ KKWW-TVL มีความแม่นยำสูงกว่าตัวแบบ KKWW-TV และตัวแบบ KKWW-TL

5. References

- [1] Chankan, S. and Sukyankij, S., 2023, Image denoising for removing additive and multiplicative noise using split Bregman method, Journal of Science and Technology Buriram Rajabhat University. 8(1): 15-28.
- [2] Hirakawa, K. and Parks, T.W., 2006, Image denoising using total least squares, IEEE Trans. 15(9): 2730-2746.

- [3] Lukin, V. V., Fevralev, D. V., Ponomarenko, N. N., Abramov, S. K., Pogrebnyak, O., Egiazarian, K. O. and Astola, J. T., 2010, Discrete cosine transform-based local adaptive filtering of images corrupted by nonstationary noise, *J. Electron. Imaging*, 19(2): 023007.
- [4] Rudin, L., Osher, S. and Fatemi, E., 1992, Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60: 259-268.
- [5] Chumchob, N., Chen, K. and Brito-Loeza, C., 2013, A new variational model for removal of combined additive and multiplicative noise and a fast algorithm for its numerical approximation. *International Journal of Computer Mathematics*, 90(1): 140-161.
- [6] Jin, Z. and Yang, X., 2010, Analysis of a new variational model for multiplicative noise removal, *J. Math. Anal. Appl.* 362: 259-268.
- [7] You, Y.L. and Kaveh, M., 2000, Fourth-order partial differential equations for noise removal, *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(10): 1723-1730.
- [8] Zheng, S.X., Pan, Z.K., Jiang, C.X. and Wang, G.D., 2013, A new fast algorithm for image denoising, *3rd International Conference on Multimedia Technology*, 682-689.
- [9] Wang, G.D., Xu, J., Dong, Q. and Pan, Z.L., 2014, Active contour model coupling with higher order diffusion for medical image segmentation, *Int J Biomed Imaging*, 2014: 1-8.
- [10] Chan, R.H., Liang, H.X., Wei, S.H., Nikolova, M. and Tai, X.C., 2015, High-order total variation regularization approach for axially symmetric object tomography from a single radiograph, *Inverse Problems and Imaging*, 9(1): 55-77.
- [11] Loupas T., McDicken W. and Allan P., 1989, An adaptive weighted median filter for speckle suppression in medical ultrasound images, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 36(1): 129-135.
- [12] Krissian K., Kikinis R., Westin C.F. and Vosburgh K. K., 2005, Speckle constrained filtering of ultrasound images, *IEEE Comput. Vis. Pattern Recogn.*, 15: 547-552.
- [13] Goldstein, T. and Osher, S., 2009, The split bregman method for l1-regularized problems, *SIAM Journal on Sciences*, 2(2): 323-343.
- [14] Lu, W., Duan, J., Qiu, Z., Pan, Z., Liu, R. and Bai, L., 2015, Implementation of high-order variational models made easy for image processing, *Math. Methods Appl. Sci.*, 39: 4208-4233.