



Thai Science and Technology Journal

วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Journal Homepage : <http://li01.tci-thaijo.org/index.php/tstj>



ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$

The Solutions of the Diophantine Equations $17^x - 3^y = z^2$ and $17^x - 5^y = z^2$

ปณชญา พัฒนางกูร*, เพชรดา กุณามี่, สิริندا บุญเรือง, อภิสิต โพธิ์สลิ

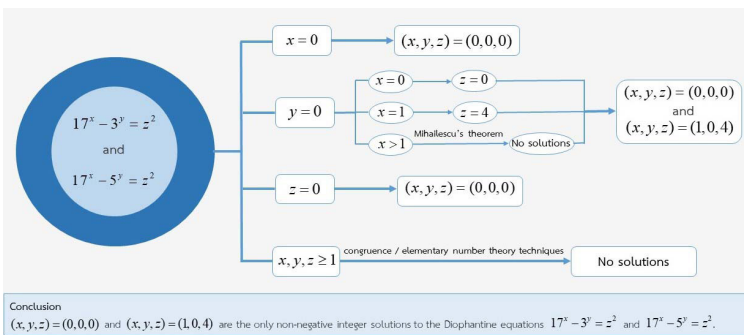
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ปทุมธานี 12120

Poonchayar Patthanangkoor*, Phetrada Kunamee, Sirinda Boonrueang, Aphisit Phothisarit

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani 12120

Received 9 December 2025; Received in revised 11 March 2026; Accepted 9 April 2026

GRAPHICAL ABSTRACT



ABSTRACT

In this paper, we investigated the non-negative integer solutions to the Diophantine equations $17^x - 3^y = z^2$ and $17^x - 5^y = z^2$. The results showed that $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ and $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ are the only non-negative integer solutions for both equations.

คำสำคัญ

สมการไดโอแฟนไทน์;
 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ;
 สมภาค

Keywords

Diophantine equation;
 Non-negative integer solution;
 Congruence

บทคัดย่อ

บทความวิจัยฉบับนี้ได้ทำการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ โดยพบว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยเท่านั้นของทั้งสองสมการ

*ผู้รับผิดชอบบทความ: poonchayar@mathstat.sci.tu.ac.th

DOI: 10.14456/tstj.2026.17

1. บทนำ

การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เป็นหนึ่งในหัวข้อที่มีผู้วิจัยให้ความสนใจศึกษาเป็นจำนวนมาก ซึ่งสมการไดโอแฟนไทน์ในรูป $a^x - p^y = z^2$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบนั้นเป็นรูปแบบหนึ่งของสมการไดโอแฟนไทน์ที่มีผู้วิจัยสนใจศึกษา การศึกษาสมการรูปแบบนี้เป็นการขยายขอบเขตของข้อคาดการณ์ของคาตาลัน (Catalan's conjecture) ซึ่งต่อมาได้รับการพิสูจน์โดย Mihailescu ในปี ค.ศ. 2004 แม้ว่าทฤษฎีบทของ Mihailescu จะช่วยระบุผลเฉลยในกรณีพื้นฐานได้ แต่ความท้าทายในการหาผลเฉลยจะเพิ่มขึ้นเมื่อมีการเปลี่ยนค่าฐานของสมการไดโอแฟนไทน์ซึ่งมักนำไปสู่โครงสร้างผลเฉลยที่ซับซ้อนและแตกต่างกันออกไป

ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมา มีผู้วิจัยจำนวนมากได้ศึกษาผลเฉลยของสมการในลักษณะนี้ อาทิ ในปี ค.ศ. 2020 Burshtein [1] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ และ $19^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งพบว่าสมการ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ และสมการ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลย ต่อมาในปี ค.ศ. 2021 Thongnak et al. [2] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่ามีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ในปีถัดไปคือปี ค.ศ. 2022 Tadee and Laomalaw [3] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - n^y = z^2$ และ $2^x - p^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \neq 1$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จากนั้นในปี ค.ศ. 2023 Thongnak et al. [4, 5] ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $15^x - 13^y = z^2$ และ $55^x - 53^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปีเดียวกันนี้ Tadee [6] ก็ได้แสดงว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียว

ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยมีเงื่อนไขบางประการ และ Tadee [7] ยังศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 5^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 11 \pmod{20}$ ซึ่งพบว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการนี้เท่านั้น นอกจากนี้ Tadee and Laomalaw [8] ก็ยังทำการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+2)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \equiv 5 \pmod{24}$ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่ามีเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

ถัดมาในปี ค.ศ. 2024 Tadee [9] ก็ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่าสมการ $11^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และสมการ $14^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยสองผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (2, 3, 13)$ และ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ซึ่งในปีเดียวกันนี้ Tadee [10] ยังศึกษาผลเฉลยของไดโอแฟนไทน์ $(p-1)^x - p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งพบว่า ถ้า $p=2$ แล้วผลเฉลยคือ $(x, y, z) \in \{(t, 0, 0) | t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ถ้า $p \equiv 1 \pmod{4}$ แล้ว $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น ถ้า $p=3$ แล้วจะมีผลเฉลย 3 ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ และถ้า $p \neq 3$ และ $p \equiv 3 \pmod{4}$ แล้วผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, \sqrt{p-2})$ เมื่อ $\sqrt{p-2}$ เป็นจำนวนเต็ม นอกจากนี้ ในปี ค.ศ. 2024 ยังมีผลงานวิจัยของ Tadee and Wannaphan [11] ซึ่งได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $(p+a)^x - p^y = z^2$ และ $p^x - (p+a)^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ a เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งพบว่า ถ้า $a \equiv 2 \pmod{4}$ และ $p \equiv 1 \pmod{4}$ โดยที่ $a \equiv -1, 1 \pmod{p}$ แล้วสมการ $(p+a)^x - p^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และถ้า a และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $a \neq p$, $a \equiv 1 \pmod{4p}$ และ $p \equiv a + r^{s_2}a + r^{s_2} \pmod{2a}$ เมื่อ $s_2 \in \{1, 3, 5, \dots, a-2\}$ และ r เป็นรากปฐมฐานมอดุโล a แล้วผลเฉลยของสมการ $(p+a)^x - p^y = z^2$ เมื่อ $x \neq 1$ มีเพียงผลเฉลยเดียวเช่นกัน คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ นอกจากนี้ยังพบอีกว่า ถ้า $a \equiv 2 \pmod{4}$ และ $p \equiv 3 \pmod{4}$ โดยที่ $p+a$ เป็นจำนวนเฉพาะ $\gcd(p, a+1)=1$ และ $\text{ord}_p a = p-1$ แล้วสมการ $p^x - (p+a)^y = z^2$ มีเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

อย่างไรก็ตาม การกำหนดเงื่อนไขที่เฉพาะเจาะจงเกินไป เช่น การระบุรูปแบบมอดุโลของฐานของสมการไดโอแฟนไทน์ มักส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ขาดความครอบคลุม บทความวิจัยฉบับนี้จึงมุ่งเน้นที่จะลดข้อจำกัดดังกล่าว โดยเลือกวิเคราะห์สมการที่มีฐานเป็น 17 เพื่อขยายขอบเขตความเข้าใจในโครงสร้างของผลเฉลยให้กว้างขวางยิ่งขึ้น เนื่องจากสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบนั้น ยังไม่มีผู้ใดทำการศึกษามาก่อน จึงเป็นแรงจูงใจสำคัญให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาผลเฉลยของสมการทั้งสองนี้ ความท้าทายหลักของงานวิจัยนี้อยู่ที่กระบวนการพิสูจน์ที่อาศัยเทคนิคการแยกตัวประกอบร่วมกับการวิเคราะห์อันดับมอดุโล โดยปราศจากการกำหนดเงื่อนไขบังคับตัวแปรเพิ่มเติม โดยเฉพาะในกรณีของสมการที่มีฐานเป็น 17 และ 5 ซึ่งมีความซับซ้อนในการพิสูจน์เนื่องจากต้องแสดงความเป็นจำนวนคู่ของเลขชี้กำลังก่อน จากนั้นจึงประยุกต์ใช้สมบัติของตัวหารร่วมมากเพื่อหาข้อขัดแย้งในการระบุผลเฉลยที่ถูกต้องทั้งหมด

2. ความรู้เบื้องต้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและสมบัติต่างๆ ที่เป็นพื้นฐานในการศึกษางานวิจัยนี้

ทฤษฎีบท 2.1 (Patthanangkoor [12]) กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มและ p เป็นจำนวน

เฉพาะ จะได้ว่า ถ้า $p \mid (a_1 a_2 \cdots a_n)$ แล้ว $p \mid a_k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k เมื่อ $1 \leq k \leq n$

ทฤษฎีบท 2.2 (Patthanangkoor [12]) ถ้า a เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วสามารถเขียน a ในรูป

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

ได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันโดยที่ $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ และ k_i เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $i=1, 2, 3, \dots, r$

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ $\gcd(a, b)=1$ ถ้า $ab=c^2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม c แล้ว $a=u^2$ และ $b=v^2$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก u และ v โดยที่ $\gcd(u, v)=1$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $a, b > 1$ และ $\gcd(a, b)=1$

สมมติให้ $ab=c^2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม c โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ โดยที่ และ $b = q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_m^{t_m}$ $q_1 < q_2 < \cdots < q_m$ โดยที่ เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_m$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k_1, k_2, \dots, k_r, t_1, t_2, \dots, t_m$ เป็นจำนวนเต็มบวก เนื่องจาก $\gcd(a, b)=1$ จึงได้ว่า $p_i \neq q_j$ สำหรับทุก $i=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, m$

เนื่องจาก $ab = (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r})(q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_m^{t_m}) = c^2$ ดังนั้น k_i เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับทุก $i=1, 2, \dots, r$ และ t_j เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับทุก $j=1, 2, \dots, m$ จึงได้ว่า $k_i = 2u_i$ เมื่อ u_i เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $i=1, 2, \dots, r$ และ $t_j = 2v_j$ เมื่อ v_j เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $j=1, 2, \dots, m$ ดังนั้น

$a = (p_1^{2u_1} p_2^{2u_2} \cdots p_r^{2u_r}) = (p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r})^2$ และ $b = (q_1^{2v_1} q_2^{2v_2} \cdots q_m^{2v_m}) = (q_1^{v_1} q_2^{v_2} \cdots q_m^{v_m})^2$ ดังนั้น $a = u^2$ และ $b = v^2$ เมื่อ

$$u = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_r^{u_r} \text{ และ } v = q_1^{v_1} q_2^{v_2} \cdots q_m^{v_m}$$

ต่อไปสมมติให้ $\gcd(u, v) = d$ จะได้ว่า $d|u$ และ $d|v$

ดังนั้น $u = d l_1$ และ $v = d l_2$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก l_1 และ l_2

จึงได้ว่า $u^2 = d^2 l_1^2$ และ $v^2 = d^2 l_2^2$ นั่นคือ $a = d^2 l_1^2$ และ $b = d^2 l_2^2$

ทำให้ได้ว่า $d^2|a$ และ $d^2|b$ เนื่องจาก $\gcd(a, b) = 1$ จึงได้ว่า $d^2 \leq 1$ นั่นคือ $d = 1$

เพราะฉะนั้น $\gcd(u, v) = 1$

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรากล่าวว่า a สมภาคกับ b มอดุโล n (a is congruent to b modulo n) ซึ่งเขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ n หาร $a - b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 2.4 (Patthanangkoor [12]) กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มและ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(1) a \equiv a \pmod{n}$$

$$(2) \text{ ถ้า } a \equiv b \pmod{n} \text{ แล้ว } b \equiv a \pmod{n}$$

$$(3) \text{ ถ้า } a \equiv b \pmod{n} \text{ และ } b \equiv c \pmod{n} \text{ แล้ว } a \equiv c \pmod{n}$$

$$(4) \text{ ถ้า } a \equiv b \pmod{n} \text{ และ } c \equiv d \pmod{n} \text{ แล้ว } a + c \equiv b + d \pmod{n} \text{ และ } ac \equiv bd \pmod{n}$$

$$(5) \text{ ถ้า } a \equiv b \pmod{n} \text{ แล้ว } a + c \equiv b + c \pmod{n} \text{ และ } ac \equiv bc \pmod{n}$$

$$(6) \text{ ถ้า } a \equiv b \pmod{n} \text{ แล้ว } a^k \equiv b^k \pmod{n} \text{ สำหรับทุก } k \in \mathbb{N}$$

$$(7) \text{ ถ้า } ac \equiv bc \pmod{n} \text{ และ } \gcd(c, n) = d \text{ แล้ว } a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}}$$

$$(8) a \equiv b \pmod{n} \text{ ก็ต่อเมื่อ เศษที่ได้จากการหาร } a \text{ ด้วย } n \text{ เท่ากับเศษที่ได้จากการหาร } b \text{ ด้วย } n$$

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า มี $r \in \{0, 1, 2\}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv r \pmod{3}$

$$\text{ถ้า } a \equiv 0 \pmod{3} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{ถ้า } a \equiv 1 \pmod{3} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{และ ถ้า } a \equiv 2 \pmod{3} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

ดังนั้น จากทั้งสามกรณีจึงสรุปได้ว่า $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $a^2 \equiv 0 \pmod{5}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{5}$ หรือ $a^2 \equiv 4 \pmod{5}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า มี $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv r \pmod{5}$

$$\text{ถ้า } a \equiv 0 \pmod{5} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{ถ้า } a \equiv 1 \pmod{5} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{ถ้า } a \equiv 2 \pmod{5} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\text{ถ้า } a \equiv 3 \pmod{5} \text{ แล้ว } a^2 \equiv 3^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

และ ถ้า $a \equiv 4 \pmod{5}$ แล้ว $a^2 \equiv 4^2 \equiv 1 \pmod{5}$
ดังนั้น จากทั้งห้ากรณีจึงสรุปได้ว่า $a^2 \equiv 0 \pmod{5}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{5}$ หรือ $a^2 \equiv 4 \pmod{5}$

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 1$ และ a เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $\gcd(a, n) = 1$ เรียกจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดซึ่ง $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ ว่า **อันดับของ a มอดุโล n** (Order of a modulo n) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{ord}_n a$

ทฤษฎีบท 2.7 (Patthanangkoor [12]) กำหนดให้ n และ m เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 1$ ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\gcd(a, n) = 1$ แล้วจะได้ว่า $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $\text{ord}_n a | m$

ทฤษฎีบท 2.8 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(1) \text{ ถ้า } 2^n \equiv 1 \pmod{5} \text{ แล้ว } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}$$

$$(2) \text{ ถ้า } 2^n \equiv 4 \pmod{5} \text{ แล้ว } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก เนื่องจาก 4 เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ซึ่ง $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ดังนั้น $\text{ord}_5 2 = 4$

(1) สมมติให้ $2^n \equiv 1 \pmod{5}$ โดยทฤษฎีบท 2.7
จึงได้ว่า $4 \mid n$

ดังนั้น $n = 4k = 2(2k)$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k นั่นคือ n เป็นจำนวนเต็มคู่

(2) สมมติให้ $2^n \equiv 4 \pmod{5}$ เนื่องจาก $4 \equiv -1 \pmod{5}$ จึงได้ว่า $2^n \equiv -1 \pmod{5}$

ดังนั้น $(2^n)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{5}$ นั่นคือ $2^{2n} \equiv 1 \pmod{5}$

โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $4 \mid (2n)$ ดังนั้น $2n = 4m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m

จึงได้ว่า $n = 2m$ ดังนั้น n เป็นจำนวนเต็มคู่

ทฤษฎีบท 2.9 (Mihailescu's theorem)
(Mihailescu, P. [13]) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

3. ผลงานวิจัย

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะดำเนินการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรหลัก 3 ตัวแปร คือ x, y และ z โดยที่ตัวแปรเหล่านี้ถูกกำหนดอยู่ในเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง x และ y ทำหน้าที่เป็นเลขชี้กำลังของฐาน 17 และ 3 (หรือ 5) ตามลำดับ และ z แทนฐานของผลลัพธ์ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ นั้น จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้สมการ $17^0 - 3^y = z^2$ หรือ $1 - 3^y = z^2$ เนื่องจาก $z^2 \geq 0$ จึงได้ว่า $1 - 3^y \geq 0$ นั่นคือ

$$1 \geq 3^y$$

แต่ $3^y \geq 1$ ดังนั้น $3^y = 1$ จึงได้ว่า $y = 0$

ทำให้ได้ว่า $z^2 = 1 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ ฉะนั้น $z = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $y = 0$

จะได้สมการ $17^x - 3^0 = z^2$ หรือ $17^x - 1 = z^2$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $x = 0$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ดังนั้น $z = 0$

ถ้า $x = 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^1 - 1 = 17 - 1 = 16$ ดังนั้น $z = 4$

และ ถ้า $x > 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^x - 1 > 1$ ดังนั้น $z > 1$

จึงทำให้ได้ว่า $\min\{17, z, x, 2\} > 1$ โดยทฤษฎีบท 2.9 จึงได้ว่า $(17, z, x, 2) = (3, 2, 2, 3)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของกรณีนี้คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $z = 0$

จะได้สมการ $17^x - 3^y = 0$ หรือ $17^x = 3^y$

ถ้า $y > 0$ แล้วจะได้ว่า $3 \mid 3^y$ ดังนั้น $3 \mid 17^x$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $y = 0$ และทำให้ได้ว่า $17^x = 3^0 = 1$ นั่นคือ $x = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 4 กำหนดให้ $x, y, z \geq 1$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod{3}$ และ $3 \equiv 0 \pmod{3}$

ดังนั้น $17^x \equiv 2^x \pmod{3}$ และ $3^y \equiv 0^y \equiv 0 \pmod{3}$

จึงได้ว่า $17^x - 3^y \equiv 2^x - 0 \equiv 2^x \pmod{3}$

แต่ $17^x - 3^y = z^2$ ดังนั้น $z^2 \equiv 2^x \pmod{3}$

โดยทฤษฎีบท 2.5 จะเห็นได้ว่า $z^2 \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $z^2 \equiv 1 \pmod{3}$

ดังนั้น $2^x \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $2^x \equiv 1 \pmod{3}$

ถ้า $2^x \equiv 0 \pmod{3}$ แล้ว $3 \mid 2^x$ จึงทำให้ได้ว่า $3 \mid 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $2^x \equiv 1 \pmod{3}$

สมมติให้ x เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $x = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $2^x \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $2^{2k+1} \equiv 1 \pmod{3}$ นั่นคือ $2(2^{2k}) \equiv 1 \pmod{3}$

แต่ $1 \equiv 2^2 \pmod{3}$ ดังนั้น $2(2^{2k}) \equiv 2 \pmod{3}$

โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $2^{2k} \equiv 2 \pmod{3}$ นั่นคือ $(2^k)^2 \equiv 2 \pmod{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงได้ว่า $x = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $17^x - 3^y = z^2$ จึงได้ว่า $17^{2m} - 3^y = z^2$ หรือ $17^{2m} - z^2 = 3^y$

$$\text{ดังนั้น } (17^m - z)(17^m + z) = 3^y$$

สมมติให้ $17^m - z = 3^u$ และ $17^m + z = 3^v$

เมื่อ u และ v เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $u < v$ และ $u + v = y$

ถ้า $y = 1$ แล้วจะได้ว่า $u = 0$ และ $v = 1$ จึงได้ว่า $17^m - z = 3^0 = 1$ และ $17^m + z = 3^1 = 3$

ดังนั้น $2(17^m) = 4$ หรือ $17^m = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $y \neq 1$ นั่นคือ $y \geq 2$

จะเห็นได้ว่า $2(17^m) = 3^u + 3^v = 3^u(1 + 3^{v-u})$

ในกรณีที่ $u \geq 1$ จะได้ว่า $3 \mid 3^u$ จึงทำให้ได้ว่า $3 \mid 2(17^m)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $u = 0$

จึงได้ว่า $2(17^m) = 3^0 + 3^v = 1 + 3^v$

เนื่องจาก $17 \equiv -1 \pmod{9}$ ดังนั้น $17^m \equiv (-1)^m \pmod{9}$ และได้ว่า $2(17^m) \equiv 2(-1)^m \pmod{9}$

เนื่องจาก $y \geq 2$ ดังนั้น $3^y \equiv 0 \pmod{9}$ จึงได้ว่า $1 + 3^v \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod{9}$

เพราะฉะนั้น $2(-1)^m \equiv 1 \pmod{9}$ จะเห็นได้ว่า

ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $2(-1)^m = 2(1) = 2$ ซึ่ง $2 \not\equiv 1 \pmod{9}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

และ ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $2(-1)^m = 2(-1) = -2$ ซึ่ง $-2 \not\equiv 1 \pmod{9}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ในกรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

จึงสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมด 2 ผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ □

ต่อไปจะหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี เช่นกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้สมการ $17^0 - 5^y = z^2$ หรือ $1 - 5^y = z^2$

เนื่องจาก $z^2 \geq 0$ จึงได้ว่า $1 - 5^y \geq 0$ นั่นคือ $1 \geq 5^y$

แต่ $5^y \geq 1$ ดังนั้น $5^y = 1$ จึงได้ว่า $y = 0$

ทำให้ได้ว่า $z^2 = 1 - 5^0 = 1 - 1 = 0$ ฉะนั้น $z = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $y = 0$

จะได้สมการ $17^x - 5^0 = z^2$ หรือ $17^x - 1 = z^2$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $x = 0$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ดังนั้น $z = 0$

ถ้า $x = 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^1 - 1 = 17 - 1 = 16$ ดังนั้น $z = 4$

และ ถ้า $x > 1$ แล้วจะได้ว่า $z^2 = 17^x - 1 > 1$ ดังนั้น $z > 1$

จึงทำให้ได้ว่า $\min\{17, z, x, 2\} > 1$ โดย
ทฤษฎีบท 2.9 จึงได้ว่า $(17, z, x, 2) = (3, 2, 2, 3)$ ซึ่งเป็น
ไปไม่ได้

จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของกรณีนี้คือ $(x, y, z) =$
 $(0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $z = 0$

จะได้สมการ $17^x - 5^y = 0$ หรือ $17^x = 5^y$

ถ้า $y > 0$ แล้วจะได้ว่า $5 \mid 17^x$ ดังนั้น $5 \mid 17^x$ ซึ่ง
เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $y = 0$ และทำให้ได้ว่า $17^x = 5^0 = 1$
นั่นคือ $x = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของกรณีนี้ คือ $(x, y, z) =$
 $(0, 0, 0)$

กรณีที่ 4 กำหนดให้ $x, y, z \geq 1$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod{5}$ และ $5 \equiv 0 \pmod{5}$

ดังนั้น $17^x \equiv 2^x \pmod{5}$ และ $5^y \equiv 0^y \equiv 0 \pmod{5}$

จึงได้ว่า $17^x - 5^y \equiv 2^x - 0 \equiv 2^x \pmod{5}$

แต่ $17^x - 5^y = z^2$ ดังนั้น $z^2 \equiv 2^x \pmod{5}$

โดยทฤษฎีบท 2.6 จะเห็นได้ว่า $z^2 \equiv 0 \pmod{5}$
หรือ $z^2 \equiv 1 \pmod{5}$ หรือ $z^2 \equiv 4 \pmod{5}$

ดังนั้น $2^x \equiv 0 \pmod{5}$ หรือ $2^x \equiv 1 \pmod{5}$
หรือ $2^x \equiv 4 \pmod{5}$

ถ้า $2^x \equiv 0 \pmod{5}$ แล้ว $5 \mid 2^x$ ทำให้ได้ว่า $5 \mid 2$
ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $2^x \equiv 1 \pmod{5}$ หรือ $2^x \equiv 4$
 $\pmod{5}$ โดยทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่

เนื่องจาก $17 \equiv -1 \pmod{3}$ และ $5 \equiv -1$
 $\pmod{3}$ จึงได้ว่า $17^x \equiv (-1)^x \pmod{3}$ และ $5^y \equiv$
 $(-1)^y \pmod{3}$

ดังนั้น $17^x - 5^y \equiv (-1)^x - (-1)^y \pmod{3}$
นั่นคือ $z^2 \equiv (-1)^x - (-1)^y \pmod{3}$

แต่ x เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงทำให้ได้ว่า $z^2 \equiv 1 -$
 $(-1)^y \pmod{3}$

ถ้า y เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $z^2 \equiv 1 - (-1) \equiv$
 $2 \pmod{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น y เป็นจำนวนเต็มคู่

สมมติให้ $x = 2a$ และ $y = 2b$ เมื่อ a และ b
เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้สมการ $17^{2a} - 5^{2b} = z^2$ หรือ $(17^a - 5^b)$
 $(17^a + 5^b) = z^2$

เนื่องจาก 5 และ 17 เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น
 17^a และ 5^b เป็นจำนวนเต็มคี่

จึงทำให้ $17^a - 5^b$ และ $17^a + 5^b$ เป็นจำนวน
เต็มคู่

เพราะฉะนั้น $2 \mid (17^a - 5^b)$ และ $2 \mid (17^a + 5^b)$
นั่นคือ 2 เป็นตัวหารร่วมของ $17^a - 5^b$ และ
 $17^a + 5^b$

สมมติให้ c เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นตัวหารร่วม
ของ $17^a - 5^b$ และ $17^a + 5^b$

ดังนั้น $c \mid (17^a - 5^b)$ และ $c \mid (17^a + 5^b)$

จะได้ว่า $c \mid ((17^a + 5^b) + (17^a - 5^b))$ และ
 $c \mid ((17^a + 5^b) - (17^a - 5^b))$ นั่นคือ $c \mid (2(17^a))$ และ
 $c \mid (2(5^b))$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $c \mid 2$ แล้ว $c \leq 2$

และถ้า $c \nmid 2$ แล้ว $c \mid 17$ และ $c \mid 5$ จึงได้ว่า c
เป็นตัวหารร่วมของ 17 และ 5

เนื่องจาก $\gcd(17, 5) = 1$ ดังนั้น $c \leq 1$

จึงได้ว่า 2 เป็นตัวหารร่วมมากของ $17^a - 5^b$
และ $17^a + 5^b$ นั่นคือ $\gcd(17^a - 5^b, 17^a + 5^b) = 2$

เนื่องจาก $2 \mid (17^a - 5^b)$ และ $2 \mid (17^a + 5^b)$

จะได้ว่า $17^a - 5^b = 2s$ และ $17^a + 5^b = 2t$

เมื่อ s และ t เป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก $2 = \gcd(17^a - 5^b, 17^a + 5^b) = \gcd$
 $(2s, 2t) = 2 \gcd(s, t)$ ดังนั้น $\gcd(s, t) = 1$

จะเห็นว่า $(2s)(2t) = (17^a - 5^b)(17^a + 5^b)$
 $= 17^{2a} - 5^{2b} = 17^x - 5^y = z^2$ นั่นคือ $st = \left(\frac{z}{2}\right)^2$

โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $s = u^2$ และ $t = v^2$
เมื่อ u และ v เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $\gcd(u, v) = 1$

ทำให้ได้ว่า $17^a - 5^b = 2u^2$ และ $17^a + 5^b = 2v^2$

เพราะฉะนั้น $2v^2 - 2u^2 = (17^a + 5^b) - (17^a - 5^b) = 2(5^b)$

นั่นคือ $v^2 - u^2 = 5^b$ หรือ $(v-u)(v+u) = 5^b$

สมมติให้ $v-u = 5^k$ และ $v+u = 5^l$ เมื่อ k และ l เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \leq k < l \leq b$ และ $k+l = b$

ดังนั้น $2v = 5^k + 5^l = 5^k(1 + 5^{l-k})$

สมมติว่า $k > 0$ เนื่องจาก $5 \mid 5^k$ ดังนั้น $5 \mid (2v)$ แต่ $5 \nmid 2$ จึงได้ว่า $5 \mid v$

ทำให้ได้ว่า $5 \mid v^2$ นั่นคือ $5 \mid t$ จึงได้ว่า $5 \mid (2t)$

เนื่องจาก $5 \mid 5^b$ ดังนั้น $5 \mid (2t - 5^b)$

แต่ $17^a + 5^b = 2t$ จึงได้ว่า $5 \mid 17^a$ ดังนั้น $5 \mid 17$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $k = 0$ จึงได้ว่า $l = b - k = b - 0 = b$

นั่นคือ $v - u = 5^0 = 1$ และ $v + u = 5^b$

เนื่องจาก $(v-u) + (v+u) = 1 + 5^b$ และ $(v-u) - (v+u) = 1 - 5^b$

จึงได้ว่า $v = \frac{5^b + 1}{2}$ และ $u = \frac{5^b - 1}{2}$

ดังนั้น $17^a + 5^b = 2v^2 = 2 \left(\frac{5^b + 1}{2} \right)^2$

$$= \frac{5^{2b} + 2(5^b) + 1}{2}$$

และ $17^a - 5^b = 2u^2 = 2 \left(\frac{5^b - 1}{2} \right)^2$

$$= \frac{5^{2b} - 2(5^b) + 1}{2}$$

จะได้ว่า $17^a = \frac{5^{2b} + 1}{2}$ ดังนั้น $2(17^a) = 5^{2b} + 1$

หรือ $5^{2b} = 2(17^a) - 1$

เนื่องจาก $5 \equiv -1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $5^{2b} \equiv (-1)^{2b} \equiv ((-1)^2)^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod{3}$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod{3}$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $17^a \equiv 2^a \pmod{3}$

ดังนั้น $2(17^a) \equiv 2(2^a) \equiv 2^{a+1} \pmod{3}$ และ $5^{2b} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

เนื่องจาก $2(17^a) = 5^{2b} + 1$ จะได้ว่า $2^{a+1} \equiv 2 \pmod{3}$

สมมติให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $a+1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น $a+1 = 2m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m เนื่องจาก $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ จึงได้ว่า $(2^2)^m \equiv 1^m \pmod{3}$ หรือ $2^{2m} \equiv 1 \pmod{3}$

นั่นคือ $2^{a+1} \equiv 1 \pmod{3}$ แต่ $2^{a+1} \equiv 2 \pmod{3}$ จึงทำให้ $2 \equiv 1 \pmod{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น a เป็นจำนวนเต็มคู่ เนื่องจาก $b \geq 1$ ดังนั้น $5^{2b} \equiv 0 \pmod{5}$

เนื่องจาก $17 \equiv 2 \pmod{5}$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จึงได้ว่า $17^a \equiv 2^a \pmod{5}$

ดังนั้น $2(17^a) \equiv 2(2^a) \equiv 2^{a+1} \pmod{5}$ และ จะได้ว่า $2(17^a) - 1 \equiv 2^{a+1} - 1 \pmod{5}$

เนื่องจาก $5^{2b} = 2(17^a) - 1$ จึงได้ว่า $5^{2b} \equiv 2^{a+1} - 1 \pmod{5}$

แต่ $5^{2b} \equiv 0 \pmod{5}$ ดังนั้น $2^{a+1} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$ นั่นคือ $2^{a+1} \equiv 1 \pmod{5}$

เนื่องจาก $\text{ord}_5 2 = 4$ โดยทฤษฎีบท 2.7 จึงได้ว่า $4 \mid (a+1)$

ทำให้ได้ว่า $2 \mid (a+1)$ นั่นคือ $a+1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

แต่เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น $a+1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นกรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

จึงสรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมด 2 ผลเฉลย คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$

4. สรุปผลการวิจัยและวิจารณ์

บทความวิจัยนี้ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $17^x - 3^y = z^2$ และ $17^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลยที่เหมือนกัน คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ $(x, y, z) = (1, 0, 4)$ โดยการพิสูจน์มีความแตกต่างกัน ซึ่งสมการ $17^x - 5^y = z^2$ มีความซับซ้อนกว่าเนื่องจากต้องอาศัยการพิสูจน์ความเป็นจำนวนคู่ของเลขชี้กำลัง x และ y ก่อน จากนั้นจึงประยุกต์ใช้เทคนิคการแยกตัวประกอบร่วมกับการวิเคราะห์ตัวหารร่วมมากเพื่อหาข้อขัดแย้ง ทั้งนี้ วิธีการที่นำเสนอนี้ทำให้สามารถหาผลเฉลยได้โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขบังคับตัวแปรเพิ่มเติม แต่ใช้อันดับมอดุโลและทฤษฎีบทของ Mihailescu ในการจำกัดขอบเขตของตัวแปรแทน ซึ่งแนวทางนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบทั่วไป $p^x - q^y = z^k$ ที่มีฐานสูงขึ้นไปในอนาคตได้

5. References

- [1] Burshtein, N., 2020, All the solutions of the diophantine equations $13^x - 5^y = z^2$ and $19^x - 5^y = z^2$ in positive integers x, y, z , Ann. Pure Appl. Math. 22(2): 93-96.
- [2] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T., 2021, The solution of the exponential diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$, MJMATH. 66(703): 62-67.
- [3] Tadee, S. and Laomalaw, N., 2022, On the diophantine equation $n^x - n^y = z^2$ and $2^x - p^y = z^2$, Phranakhon Rajabhat Res. J. (Sci. Technol.) 17(21): 10-16. (in Thai)
- [4] Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T., 2023, On the diophantine equation $15^x - 13^y = z^2$, Ann. Pure Appl. Math. 27(1): 23-26.
- [5] Thongnak, S., Kaewong, T. and Chuayjan, W., 2023, On the diophantine equation $55^x - 53^y = z^2$, Ann. Pure Appl. Math. 27(1): 27-30.
- [6] Tadee, S., 2023, On the diophantine equation $3^x - p^y = z^2$ when p is prime, J. Sci. Technol. Thonburi Univ. 7(1): 1-6.
- [7] Tadee, S., 2023, On the diophantine equation $n^x - 5^y = z^2$ when $n \equiv 11 \pmod{20}$, J. KPRU Sci. Math. Technol. 2(1): 57-60. (in Thai)
- [8] Tadee, S. and Laomalaw, N., 2023, On the diophantine equation $(p+2)^x - p^y = z^2$ where p is prime and $p \equiv 5 \pmod{24}$, Int. J. Math. Comput. Sci. 18(2): 149-152.
- [9] Tadee, S., 2024, The solutions of the diophantine equation $11^x - 3^y = z^2$ and $14^x - 3^y = z^2$, J. Sci. Technol. Phetchabun Rajabhat Univ. 4(2): 12-17. (in Thai)
- [10] Tadee, S., 2024, On the diophantine equation $(p-1)^x - p^y = z^2$ where p is a prime, SciTech Res. J. 7(3): 17-24.
- [11] Tadee, S. and Wannaphan, C., 2024, On the diophantine equations $(p+a)^x - p^y = z^2$ and $p^x - (p+a)^y = z^2$, Int. J. Math. Comput. Sci. 19(2): 459-465.
- [12] Patthanangkoo, T., 2007, Elementary of Number Theory, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University, Pathum Thani, 230 p. (in Thai)
- [13] Mihailescu, P., 2004, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, J. Reine Angew. Math. 572: 167-195.