การประยุกต์การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการแยกเมทริกซ์
Applications of Householder Transformations to Matrix Decompositions

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม* และอานนท์ พลอยมุกดา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

Pattrawut Chansangiam* and Arnon Ploymukda

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok 10520

บทคัดย่อ

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เป็นการแปลงเชิงเส้นที่ทำหน้าที่สะท้อนเวกเตอร์ใด ๆ เทียบกับระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนด บทความวิชาการนี้นำเสนอการประยุกต์การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการแยกเมทริกซ์ที่สำคัญ ได้แก่ การแยก QR การทำให้เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยม การลดรูปเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์ก และการทำให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง

คำสำคัญ : การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์; การแยก QR; การทำให้เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยม; เมทริกซ์เฮสเซนเบิร์ก; เมทริกซ์สามแนวเฉียง

Abstract

A Householder transformation is a linear transformation which reflects any vector with respect to the plane perpendicular to a given vector. This academic article presents applications of Householder transformations to matrix decompositions such as QR decompositions, triangularizations, Hessenberg reductions and tridiagonalizations.

Keywords: Householder transformation; QR decomposition; triangularization; Hessenberg matrix; tridiagonal matrix

1. บทนำ

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ (Householder transformation) หรือการสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์ (Householder reflection) ถูกนำเสนอโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ A.S. Householder ในงานวิจัย [1] การแปลงนี้เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่สะท้อนเวกเตอร์ใด ๆ เทียบกับระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนด แนวคิดของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์สามารถศึกษาได้

***ผู้รับผิดชอบบทความ :** kcpattra@kmitl.ac.th

จาก [2] และ [3] การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์มีบทบาทสำคัญในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข (numerical linear algebra) และทฤษฎีเมทริกซ์ (ดูเอกสารอ้างอิง [2-8]) การออกแบบตัวกรองและการประมวลผลสัญญาณ (ดูงานวิจัย [9,10]) และการแยกโคเซตบัญญัติ (canonical coset decomposition) ซึ่งมีบทบาทในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ [11]

บทความวิชาการนี้กล่าวถึงการประยุกต์การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการแยกเมทริกซ์ โดยแสดงให้เห็นว่าการแปลงดังกล่าวสามารถนำไปใช้ในการแยกเมทริกซ์ที่สำคัญ ได้แก่ การแยก QR (QR decomposition) การทำให้เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยม (triangularization) การลดรูปเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์ก (Hessenberg reduction) และการทำให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (triangularization)

สมบัติที่สำคัญของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์จะนำเสนอในหัวข้อที่ 2 ซึ่ง ได้แก่ (1) การเป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี (unitary operator) และตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน (Hermitian operator) ซึ่งมีผกผันเป็นตัวเอง และ (2) การเป็นตัวดำเนินการสะท้อน (reflector) บนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ขนานกับเวกเตอร์ที่กำหนด และเป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์ (identity operator) บนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนด รวมทั้งแสดงให้เห็นว่าการแปลงนี้สามารถส่งเวกเตอร์ใดๆไปเป็นเวกเตอร์ที่มี 0 อยู่ในบางตำแหน่งโดยที่มีนอร์ม (norm) เท่าเดิม

สำหรับหัวข้อที่ 3-6 นั้นเป็นการประยุกต์การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เป็นขั้นตอนวิธีในการแยกเมทริกซ์แบบต่าง ๆ 4 แบบข้างต้น ยิ่งกว่านั้นสำหรับการลดรูปเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กและการทำให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง จะได้ว่าเมทริกซ์ที่ได้จากกระบวนการดังกล่าวเป็นเมทริกซ์ที่คล้ายแบบยูนิแทรี (unitarily similar) กับเมทริกซ์เดิม

ในบทความนี้ สำหรับฟิลด์ $F=\mathbb{R}$ หรือ $F=\mathbb{C}$ เราให้ $M_{m,n}(F)$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ที่มีสมาชิกอยู่ใน F เราเขียนย่อ $M_{n,n}(F)$ ด้วย $M_n(F)$ สำหรับแต่ละ $A\in M_{m,n}(F)$ เราให้ A^* แทนสังยุคของการสลับเปลี่ยน (conjugate transpose) ของ A เราเขียน I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n\times n$ โดยอาจเขียนย่อเป็น I เมื่อขนาดของเมทริกซ์เป็นที่เข้าใจตรงกัน

2. การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

บทนิยามที่ 1 สำหรับแต่ละ $v\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ นิยามการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ H_v ที่สอดคล้องกับ v โดย $H_v = I-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}$ สำหรับ $v=0$ เรานิยาม $H_0=I$

ทฤษฎีบทที่ 2 การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรีและตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน ซึ่งทำให้ได้ว่าการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์มีผกผันเป็นตัวเอง

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $v\neq 0$ พิจารณาการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ H_v จะเห็นว่า $H_v^*H_v = \left(I-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}\right)^*\left(I-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}\right) = I-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}+4\dfrac{vv^*vv^*}{\|v\|^4}=I$ นั่นคือ H_v เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี นอกจากนี้เราได้ว่า $H_v^* = \left(I-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}\right)^* = I-2\dfrac{vv^*}{\|v\|^2}=H_v$ นั่นคือ H_v เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน ทำให้ได้ว่า $H_vH_v=H_v^*H_v=I$ ดังนั้น H_v เป็นตัวดำเนินการที่หาผกผันได้โดย $H_v^{-1}=H_v$

ทฤษฎีบทที่ 3 การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ H_v เป็นตัวดำเนินการสะท้อนบนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ขนานกับ v และเป็นตัวดำเนินการ

เอกลักษณ์บนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ตั้งฉากกับ v นั่นคือ $H_v(x) = \begin{cases} -x, & x \in span\{v\} \\ x, & x \in (span\{v\})^{\perp} \end{cases}$

บทพิสูจน์ ให้ $x \in span\{v\}$ นั่นคือ $x = \alpha v$ สำหรับบางสเกลาร์ α จะได้ว่า $H_v(x) =$

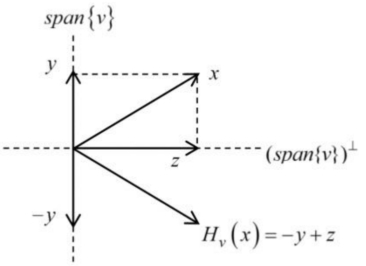
$$x - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2}x = x - 2\frac{v^*x}{\|v\|^2}v = \alpha v - 2\frac{v^*(\alpha v)}{\|v\|^2}v = -x$$

พิจารณา $x \in \mathbb{C}^n$ ซึ่งตั้งฉากกับ v จะได้ว่า $H_v(x) =$

$$x - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2}x = x - 2\frac{v^*x}{\|v\|^2}v = x$$

ข้อสังเกต สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{C}^n$ เราสามารถเขียน $x = y + z$ เมื่อ $y \in span\{v\}$ และ $z \in (span\{v\})^{\perp}$ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น จะได้ว่า H_v ทำหน้าที่ส่ง

$$x \mapsto H_v(x) = H_v(y) + H_v(z) = -y + z$$



รูปที่ 1 ตัวสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์

บทตั้งที่ 4 สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{C}^n$ จะมีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H \in M_n(\mathbb{C})$ ที่ทำให้ $Hx = \|x\|e_1$ เมื่อ $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ ยิ่งกว่านั้นถ้า $x \in \mathbb{R}^n$ เราสามารถเลือกให้ $H \in M_n(\mathbb{R})$

บทพิสูจน์ กรณีที่ $x = e_1$ เลือก $H = H_0 = I$ ต่อไปพิจารณากรณีที่ $x \neq e_1$ เราอาจสมมติให้ $\|x\| = 1$ เขียน $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ พิจารณา $v = x - e_1$ จะได้ว่า $H_v(x) = x - \frac{2}{\|v\|^2}(vv^*)x = x - \frac{2}{\|v\|^2}(v^*x)v = e_1$ โดยการสร้างจะเห็นว่าสำหรับ $x \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า $v \in \mathbb{R}^n$ ซึ่งส่งผลให้ $H \in M_n(\mathbb{R})$

บทตั้งที่ 5 ให้ $v' = (v_{k+1}, ..., v_n) \in \mathbb{C}^{n-k}$ จะได้ว่า $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_{v'} \end{bmatrix}$ เป็นการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ที่สอดคล้องกับเวกเตอร์ $v = (0, ..., 0, v_{k+1}, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$

บทพิสูจน์ เราอาจสมมติให้ $\|v'\| = 1$ เนื่องจาก $\|v\| = \|v'\| = 1$ จะได้ว่า

$$H_v = I - 2vv^*$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & \ddots & . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & 1 - 2v_{k+1}\bar{v}_{k+1} & \cdots & -2v_{k+1}\bar{v}_n \\ . & . & . & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & . & 0 & -2v_n\bar{v}_{k+1} & \cdots & 1 - 2v_n\bar{v}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_{v'} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบทที่ 6 สำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, ..., n\}$ และ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ จะได้ว่ามี $v \in \mathbb{C}^n$ ที่ทำให้ $H_v x = (x_1, ..., x_k, \|y\|, 0, ..., 0)$ เมื่อ $y = (x_{k+1}, ..., x_n)$ ยิ่งกว่านั้นถ้า $x \in \mathbb{R}^n$ เราสามารถเลือกให้ $v \in \mathbb{R}^n$

บทพิสูจน์ จากบทตั้งที่ 4 จะได้ว่ามีเวกเตอร์ $v' = (v_{k+1}, ..., v_n) \in \mathbb{C}^{n-k}$ ที่ทำให้ $H_{v'}y = (\|y\|, 0, ..., 0)$ พิจารณา $v = (0, ..., 0, v_{k+1}, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ โดยบทตั้งที่ 5 จะได้ว่า $H_v = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_{v'} \end{bmatrix}$ ดังนั้น $H_v x = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & H_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ H_{v'}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k & \|y\| & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

โดยการสร้างจะเห็นว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}^n$ เราสามารถเลือกให้ $v \in \mathbb{R}^n$

โดยใช้บทตั้งที่ 4

3. การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการการแยก QR

การแยก QR ของเมทริกซ์ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ คือ การเขียน A ในรูป $A = QR$ เมื่อ $Q \in M_m(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี (นั่นคือ $Q^*Q = I$) และ $R \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน การแยกดังกล่าวมีบทบาทสำคัญในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาผลเฉลยของปัญหากำลังสองน้อยที่สุดเชิงเส้น (ศึกษาได้จาก [2] และ [3]) ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการแยก QR เราใช้กระบวนการกราม-ชมิดท์ (Gram-Schmidt process) [12]

พิจารณาเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์สามารถใช้ในการออกแบบเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H^{(1)}, H^{(2)}, ..., H^{(n)}$ ที่ทำให้ $H^{(n)} \cdots H^{(2)} H^{(1)} A$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน โดยเมทริกซ์ $H^{(1)}$ จะต้องทำให้สมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักในคอลัมน์ที่ 1 ทั้งหมดของ A เป็นศูนย์ สำหรับ $k = 2, 3, ..., n$ เมทริกซ์ $H^{(k)}$ จะดำเนินการกับแถวที่ $k, ..., m$ ของเมทริกซ์ $H^{(k-1)} \cdots H^{(2)} H^{(1)} A$ โดยทำให้สมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักในคอลัมน์ที่ k ทั้งหมดเป็นศูนย์ และไม่ส่งผลกระทบกับ $k-1$ คอลัมน์ก่อนหน้า ตัวอย่างของขั้นตอนวิธีเฮาส์โฮลเดอร์กับเมทริกซ์ A ขนาด 4×3 สามารถแสดงได้ดังนี้ (ในที่นี้ตัวหนาหมายถึงตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลง)

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}} \xrightarrow{H^{(1)}} \underset{H^{(1)}A}{\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{bmatrix}} \xrightarrow{H^{(2)}} \underset{H^{(2)}H^{(1)}A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{x} \end{bmatrix}} \xrightarrow{H^{(3)}} \underset{H^{(3)}H^{(2)}H^{(1)}A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & \mathbf{x} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}}$$

ทฤษฎีบทที่ 7 สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ จะมีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H^{(1)}, H^{(2)}, ..., H^{(n)} \in M_m(\mathbb{C})$ และเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน $R \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ที่ทำให้ $A = H^{(1)} H^{(2)} \cdots H^{(n)} R$ ยิ่งกว่านั้นถ้า $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ เราสามารถเลือกให้ $H^{(1)}, H^{(2)}, ..., H^{(n)} \in M_m(\mathbb{R})$ และ $R \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

บทพิสูจน์ เราใช้บทตั้งที่ 4 ในการสร้างเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H^{(1)}$ ที่ทำให้ $H^{(1)} a = \|a\| e_1$ สำหรับการสร้าง $H^{(2)}, ..., H^{(n)}$ ทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 6 ดังนี้ สำหรับแต่ละ $k \in \{2, ..., n\}$ และสำหรับแต่ละคอลัมน์ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ ของ A จะได้ว่ามี $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ ที่ทำให้ $H_v x = (x_1, ..., x_{k-1}, \|y\|, 0, ..., 0)$ $= \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H_{v'} \end{bmatrix} x$ เมื่อ $y = (x_k, ..., x_n)$ และ $v' = (v_k, ..., v_n) \in \mathbb{C}^{n-k}$ โดยเมทริกซ์ $H_{v'}$ จะทำให้สมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักในคอลัมน์ที่ k ของ $H^{(k-1)} \cdots H^{(2)} H^{(1)} A$ เป็นศูนย์ ส่งผลให้เมทริกซ์ H_v ดำเนินการกับแถวที่ $k, ..., m$ ของเมทริกซ์ $H^{(k-1)} \cdots H^{(2)} H^{(1)} A$ โดยทำให้สมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักในคอลัมน์ที่ k ทั้งหมดเป็นศูนย์ และไม่ส่งผลกระทบกับ $k-1$ คอลัมน์ก่อนหน้า เราจึงเลือก $H^{(k)}$ ให้เป็นเมทริกซ์ H_v นี้

เมื่อดำเนินการครบ n ครั้ง เราได้ว่าสมาชิกใต้แนวทแยงมุมหลักในคอลัมน์ที่ $1, 2, .., n$ ของเมทริกซ์ $H^{(n)} \cdots H^{(2)} H^{(1)} A$ เป็นศูนย์ นั่นคือ $H^{(n)} \cdots$

$H^{(2)}H^{(1)}A$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน R โดยทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ $(H^{(k)})^{-1} = H^{(k)}$ สำหรับทุก $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ดังนั้น $A = H^{(1)}H^{(2)} \cdots H^{(n)}R$ ตามต้องการ โดยการสร้างจะเห็นว่าถ้า $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ จะได้ว่าทุกคอลัมน์ของ A เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ โดยทฤษฎีบทที่ 6 เราสามารถเลือกแต่ละ H_v โดย $H_v \in M_m(\mathbb{R})$ ซึ่งทำให้ $H^{(1)}, H^{(2)}, ..., H^{(n)} \in M_m(\mathbb{R})$ และ $R \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

บทแทรกที่ 8 (การแยก QR) เมทริกซ์ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ใดๆสามารถเขียนในรูปแบบ $A = QR$ เมื่อ $Q \in M_m(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรีและ $R \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

ในกรณีที่ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ จะได้ว่ามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก $Q \in M_m(\mathbb{R})$ (นั่นคือ $Q^TQ = I$) และเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน $R \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ที่ทำให้ $A = QR$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 7 จะได้ว่ามีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ ที่ทำให้ $A = Q_n ... Q_2Q_1R$ เมื่อ R เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน โดยทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี ให้ $Q = Q_n \cdots Q_2Q_1$ จะได้ว่า Q เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรีและ $A = QR$ ตามต้องการ

ในกรณีที่ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ จะได้ว่ามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก $Q \in M_m(\mathbb{R})$ (นั่นคือ $Q^TQ = I$) และเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน $R \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ที่ทำให้ $A = QR$

ตัวอย่าง พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้เมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H^{(1)}$ คือ $H^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ และ $H^{(1)}A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-10} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ เมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H^{(2)}$ คือ

$$H^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } H^{(2)}H^{(1)}A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & \mathbf{10} & \mathbf{-6} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $H^{(2)}H^{(1)}A$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนแล้ว ดังนั้นเราเลือก $H^{(3)} = I$ ให้ $Q = H^{(1)}H^{(2)}H^{(3)}$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ และ } R = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า A เขียนได้ในรูป

$$A = QR = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการทำให้เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบทการทำให้เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมของเชอร์ (Shur's triangularization theorem) กล่าวว่าเมทริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ จะคล้ายแบบยูนิแทรีกับเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน นั่นคือ A สามารถเขียนในรูป $A = UTU^*$ เมื่อ U เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี และ T เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน ทฤษฎีบทนี้มีความ สำคัญมากในทฤษฎีเมทริกซ์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ใช้กระบวนการกราม-ชมิดท์ [12]

ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงให้เห็นว่าการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์สามารถนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวได้เช่นกัน [1,13]

ทฤษฎีบทที่ 9 สำหรับแต่ละ $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะมีเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน T และเมทริกซ์ยูนิแทรี U ที่ทำให้ $U^*AU = T$

บทพิสูจน์ พิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับขนาดของ A สำหรับ $n=1$ เห็นได้ชัด สำหรับ $n>1$ สมมติว่าเมทริกซ์ขนาด $m\times m$ คล้ายแบบยูนิแทรีกับเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนสำหรับทุกจำนวนนับ $m<n$ ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ และ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A จะได้ว่ามี $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ λ พิจารณาเวกเตอร์ $x=(x_1,x_2,...,x_n)=\dfrac{\bar{u}_1 u}{\|\bar{u}_1 u\|}$ กรณีที่ $x\neq e_1$ ให้ $v=x-e_1$ และ H เป็นเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ที่สอดคล้องกับ $v/\|v\|$ จะได้ว่า $Hx = x-2\dfrac{v^*x}{\|v\|^2}v = x-\dfrac{2(1-x_1)}{2(1-x_1)}v=e_1$ กรณีที่ $x=e_1$ ให้ $H=I$ เขียน $H=[x\mid P]=\begin{bmatrix} x^* \\ P^* \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $HAH=HA[x\mid P]=H[Ax\mid AP]=H[\lambda x\mid AP]=[\lambda Hx\mid HAP]=\left[\lambda e_1 \,\middle|\, \begin{bmatrix} x^* \\ P^* \end{bmatrix}AP\right]=\begin{bmatrix} \lambda & x^*AP \\ 0 & P^*AP \end{bmatrix}$ เนื่องจาก P^*AP เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ โดยสมมติฐานการอุปนัยจะได้ว่ามีเมทริกซ์ยูนิแทรี Q ที่ทำให้ $T_{n-1}=Q\left(P^*AP\right)Q$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

ให้ $U=H\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ จะได้ $U^*U=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^* \end{bmatrix}H^*H\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^*Q \end{bmatrix}=I$ ดังนั้น U เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี จะเห็นว่า $U^*AU=\begin{bmatrix} \lambda & x^*APQ \\ 0 & T_{n-1} \end{bmatrix}$ ดังนั้น U^*AU เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน

ตัวอย่าง พิจารณา $A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $1,\ -2,\ -2$ พิจารณา $\lambda=-2$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับ $\lambda=-2$ ได้แก่ $x=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ให้ $v=x-e_1=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ และ H เป็นเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ที่สอดคล้องกับ v นั่นคือ $H=I-2\dfrac{vv^T}{\|v\|^2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\left[x\middle|P\right]$ เมื่อ $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $HAH=\begin{bmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 18 & -8 \end{bmatrix}$ และ $P^TAP=\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ P^TAP มีค่าลักษณะเฉพาะ คือ $1,\ -2$ พิจารณา $\lambda=1$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับ $\lambda=1$ ได้แก่ $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ให้ $u=y-e_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$ และ Q เป็นเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ที่สอดคล้องกับ u นั่นคือ $Q=I-2\dfrac{uu^T}{\|u\|^2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $QP^TAPQ=\begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ให้ $U=H\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ ดังนั้น

$$U^TAU=\begin{bmatrix} -2 & -3/\sqrt{5} & -21/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

5. การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการลดรูปเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์ก

บทนิยามที่ 10 เมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่าเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบน (upper Hessenberg matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับทุก $i\geq j+2$

เมทริกซ์ $B\in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่าเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กล่าง (lower Hessenberg matrix) ก็ต่อเมื่อ B^T เป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบน

จะเห็นว่าเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กเป็นรูปแบบทั่วไปของเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยม ดังนั้นเมทริกซ์นี้จึงบทบาทสำคัญในพีชคณิตเชิงเส้น เมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กถูกศึกษาเป็นครั้งแรกโดยวิศวกรชื่อ Hessenberg ในวิทยานิพนธ์ [14] เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เพื่อทำให้เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ กลายเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบน [15]

สำหรับขั้นตอนแรก ให้ $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\mathbb{C}^n$ เป็นคอลัมน์แรกของ A โดยทฤษฎีบทที่ 6 จะได้ว่ามีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ H_1 ที่ทำให้ $H_1x=\left(x_1,\|y\|,0,...,0\right)$ เมื่อ $y=\left(x_2,...,x_n\right)$ อย่างไรก็ตาม เมทริกซ์ H_1A ที่ได้อาจไม่คล้าย (similar) กับเมทริกซ์ A เราจึงพิจารณา $H_1AH_1=H_1AH_1^{-1}=H_1AH_1^{*}$ ซึ่งคล้ายแบบยูนิแทรีกับ A เมื่อนำ H_1 มาคูณทางซ้ายของ A จะได้ผลลัพธ์ดังนี้ $H_1A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & H^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & a & \cdots & a\\ a & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & a & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & a & \cdots & a\\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x}\\ 0 & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x}\end{bmatrix}$

เมื่อนำ H_1 มาคูณทางขวาของ H_1A จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$H_1AH_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & H^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & a & \cdots & a\\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x}\\ 0 & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\\ 0 & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\end{bmatrix}$$

สำหรับขั้นตอนที่ $k\in\{1,2,...,n-2\}$ และ $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\mathbb{C}^n$ โดยทฤษฎีบทที่ 6 จะได้ว่ามีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ H_k ที่ทำให้ $H_kx=$ $H_kx=\left(x_1,...,x_k,\|y\|,0,...,0\right)$ เมื่อ $y=\left(x_{k+1},...,x_n\right)$ จะได้ว่า H_k ไม่ส่งผลกระทบต่อคอลัมน์ก่อนหน้าของเมทริกซ์ $H_{k-1}\cdots H_2H_1AH_1H_2\cdots H_{k-1}$ และ $\left\|H_kx^{(k)}\right\|=\left\|x^{(k)}\right\|$ เมื่อ $x^{(k)}$ คือคอลัมน์ที่ k ของเมทริกซ์ดังกล่าว เราสามารถแสดงการลดรูปเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กได้ดังนี้ (เพื่อความเข้าใจเราใช้ตัวหนาแทนตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงในแต่ละขั้นตอน)

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}a & a & \cdots & a\\ a & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & a & a\end{bmatrix}}\xrightarrow{H_1}\underset{H_1AH_1}{\begin{bmatrix}a & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\\ 0 & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \mathbf{y} & \cdots & \mathbf{y}\end{bmatrix}}$$

$$\xrightarrow{H_2}\underset{H_2H_1AH_1H_2}{\begin{bmatrix}a & y & y & \cdots & y\\ x & y & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{u}\\ 0 & \mathbf{z} & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{u}\\ 0 & 0 & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{u}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{u}\end{bmatrix}}\xrightarrow{H_3}\cdots\xrightarrow{H_{n-2}}$$

$$\underset{H_{n-2}\cdots H_2H_1AH_1H_2\cdots H_{n-2}}{\begin{bmatrix}a & y & y & \cdots & y & y & y\\ x & y & y & \cdots & u & u & u\\ 0 & z & u & \cdots & u & \mathbf{w} & \mathbf{w}\\ 0 & 0 & u & \cdots & \mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{w}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{w}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{w} & \mathbf{w}\end{bmatrix}}$$

เมื่อดำเนินการครบ $n-2$ ครั้ง เมทริกซ์ $H_{n-2}\cdots H_2H_1AH_1H_2\cdots$ $\cdots H_{n-2}=[h_{ij}]$ ที่ได้จะมีสมบัติคล้ายแบบยูนิแทรีกับเมทริกซ์ A โดยที่ $h_{ij}=0$ สำหรับทุก $i\ge j+2$ และ $i<k$ นั่นคือ $H_{n-2}\cdots H_2H_1AH_1H_2\cdots H_{n-2}$ เป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบน

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราจะได้ทฤษฎีบทการลดรูปเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 11 สำหรับแต่ละเมทริกซ์ $A\in M_n(\mathbb{C})$ จะมีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H_1,H_2,...,$ $H_{n-2}\in M_n(\mathbb{C})$ ซึ่ง $H_{n-2}...H_2H_1AH_1H_2...H_{n-2}$ เป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบนที่คล้ายแบบยูนิแทรีกับ A

6. การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับการทำให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง

บทนิยามที่ 12 เมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ จะเรียกว่าเมทริกซ์สามแนวเฉียง ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับทุก $i\ge j+2$ และสำหรับทุก $j\ge i+2$ นั่นคือ

A เป็นทั้งเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบนและเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กล่าง

เมทริกซ์สามแนวเฉียงมีบทบาทในสมการเชิงอนุพันธ์ [15] ในหัวข้อนี้เราจะประยุกต์การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์กับเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนและเมทริกซ์สมมาตรเพื่อให้ได้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง [16]

บทตั้งที่ 13 ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน สำหรับแต่ละเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ H จะได้ว่า HAH เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนที่คล้ายแบบยูนิแทรีกับ A

บทพิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 2 เนื่องจากเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนและเมทริกซ์ยูนิแทรีที่มีตัวผกผันเป็นตัวเอง

ทฤษฎีบทที่ 14 สำหรับแต่ละเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะมีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H_1, H_2, ..., H_{n-2} \in M_n(\mathbb{C})$ ที่ทำให้ $H_{n-2}H_{n-3}...H_1AH_1...H_{n-3}H_{n-2}$ เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียงที่เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนซึ่งคล้ายแบบยูนิแทรีกับ A

ในกรณีที่ $A \in M_n(\mathbb{R})$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะมีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H_1, H_2, ..., H_{n-2} \in M_n(\mathbb{R})$ ที่ทำให้ $H_{n-2}H_{n-3}...H_1AH_1...H_{n-3}H_{n-2}$ เป็นมทริกซ์สามแนวเฉียงสมมาตรซึ่งคล้ายแบบยูนิแทรีกับ A

บทพิสูจน์ จากที่กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้า สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ จะมีเมทริกซ์เฮาส์โฮลเดอร์ $H_1, H_2, ..., H_{n-2}$ ที่ทำให้ $H_{n-2} \cdots H_2H_1AH_1H_2 \cdots H_{n-2}$ เป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบน

ในขั้นตอนแรกเมทริกซ์ H_1A มีคอลัมน์แรกอยู่ในรูปแบบ $[\mathrm{x} \;\; \mathrm{x} \;\; 0 \; \cdots \; 0]^T$ จะได้ว่า H_1AH_1 มีคอลัมน์แรกเป็น $[\mathrm{x} \;\; \mathrm{x} \;\; 0 \; \cdots \; 0]^T$ เช่นเดิมเนื่องจาก H_1 ที่นำมาคูณทางขวาของ H_1A จะมีผลต่อคอลัมน์ที่ 2 ถึง n ของ H_1A เท่านั้น ต่อมาเนื่องจาก H_1AH_1 เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน (โดยบทตั้งที่ 13) จะได้ว่าแถวแรกของ H_1AH_1 อยู่ในรูปแบบ $[\mathrm{x} \;\; \mathrm{x} \;\; 0 \; \cdots \; 0]^*$

ในขั้นต่อมาเมื่อนำ H_2 มาคูณทั้งซ้ายและขวาของ H_1AH_1 จะได้ผลลัพธ์ในลักษณะเดิม โดยไม่ส่งผลกระทบต่อคอลัมน์แรกของ H_1AH_1 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ $n-2$ ครั้ง เราจะได้ผลลัพธ์สุดท้ายเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน เนื่องจาก $(x^{(k)})^* = x^{(k)}$ สำหรับทุกคอลัมน์ $x^{(k)}$ ของเมทริกซ์ผลลัพธ์ ยิ่งกว่านั้น เมทริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียงเนื่องจากเป็นทั้งเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กบนและ เมทริกซ์เฮสเซนเบิร์กล่าง

ตัวอย่าง พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

ให้ $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ ต้องการเปลี่ยน $x^{(1)}$ เป็น $y^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ให้ $v^{(1)} = \dfrac{x^{(1)} - y^{(1)}}{\left\| x^{(1)} - y^{(1)} \right\|}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $H_1 = I - 2v^{(1)} \left[v^{(1)} \right]^T$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ จะได้ $H_1AH_1 =$

$\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{13/3} & \mathbf{0} & \mathbf{-2/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2/3} & \mathbf{-7/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2/3} & \mathbf{-7/3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ จากนั้นให้ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13/3 \\ 0 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

เลือก $y^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ พิจารณา $v^{(2)} = \dfrac{x^{(2)} - y^{(2)}}{\left\| x^{(2)} - y^{(2)} \right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

และ $H_2 = I - 2v^{(2)} \left[v^{(2)} \right]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $H_2H_1AH_1H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 13/3 & \mathbf{-2/3} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{-2/3} & \mathbf{1} & \mathbf{-7/3} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-7/3} & \mathbf{2/3} \end{bmatrix}$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียงสมมาตร

7. รายการอ้างอิง

[1] Householder, A.S., 1958, Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix, J. ACM. 5: 339-342.

[2] Demmel, J.W., 1997, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadephia, 419 p.

[3] Trefethen, L.N., and Bau III, D., 1997, Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadephia, 361 p.

[4] Bojanczyk, A.W., Nagy, J.G. and Plemmons, R.J., 1993, Block RLS using row Householder reflections, Linear Algebra Appl. 188-189: 31-61.

[5] Bojanczyk, A.W. and Steinhardt, A.O., 1991, Stability analysis of a Householder-based algorithm for downdating the Cholesky factorization, SIAM J. Sci. Stat. Comp. 12: 1255-1265.

[6] Cybenko, G. and Berry, M., 1990, Hyperbolic Householder algorithms for factoring structured matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11: 499-520.

[7] Golub, G.H. and van Loan, C.F., 1996, Matrix Computations, 3rd Ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 694 p.

[8] Umble, R., Lecture notes on linear algebra: A second course, Available source: http://www.millersville.edu, September 25, 2014.

[9] Liu, K.J.R., Hseih, S.F. and Yao, K., 1990, RLS Filtering using Householder transformations, pp. 1631-1634, Proceedings of ZCASSP, Albuquerque, N. Mex.

[10] Steinhardt, A., 1988, Householder transformations in signal processing, IEEE ASSP Mag. July: 4-12.

[11] Cabrera, R., Strohecker, T. and Rabitz, H., 2010, The canonical coset decomposetion of unitary matrices through Householder Transformations, J. Math. Phys. 51: 1-7.

[12] Horn, R.A., 1990, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 561 p.

[13] Morrison, D.D., 1960, Remarks on the unitary triangularization of a nonsymmetric matrix, J. ACM. 7: 185-186.

[14] Hessenberg, K., 1942, Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen linearer Gleichungssysteme, Ph.D. Thesis, Technische Hochschule Darmstadt, German, 175 p.

[15] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., 1992, Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 933 p.

[16] LaBudde, C.D., 1963, The reduction of an arbitrary real square matrix to tridiagonal form using similarity transformations, Math. Comp. 17: 433-437.