

วิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ โดยใช้ข้อมูลค่าบันทึกต่ำในการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์

Confidence Interval Estimation Methods for Stress-Strength Reliability $R = P(X < Y)$ Using Lower Record Values in One Parameter Generalized Exponential Distribution

โสรัจจะ คล้ายฉิม*, จุฑาภรณ์ ลินสมบูรณ์ทอง และประสิทธิ์ พัยคมพงษ์

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

Soratja Klaichim*, Juthaphorn Sinsomboonthong and Prasit Payakkapong

Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University,

Ladyao, Chatuchak, Bangkok 10900

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ โดยใช้ข้อมูลค่าบันทึกต่ำในการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ ซึ่งเรียกวิธีที่นำเสนอว่า วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแจ๊คไนฟ์ (JACK) และทำการจำลองข้อมูลทั้งหมด 120 สถานการณ์ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีที่นำเสนอกับวิธีอื่น ๆ อีก 3 วิธี คือ วิธีการประมาณค่าที่แท้จริง (EXACT) วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ (BAYES) ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ คือ การตรวจสอบค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น โดยกำหนดปัจจัยต่าง ๆ ดังนี้ ขนาดตัวอย่าง (m, n) เท่ากับ $(3,3)$, $(5,5)$, $(7,7)$, $(10,10)$, $(12,12)$, $(15,15)$, $(18,18)$, $(20,20)$, $(22,22)$, $(25,25)$, $(27,27)$ และ $(30,30)$ ค่าพารามิเตอร์ R เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 และระดับความเชื่อมั่นเท่ากับ 90 และ 95 % ผลการศึกษาพบว่า เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก กล่าวคือ (m, n) เท่ากับ $(3,3)$ และ $(5,5)$ วิธี BAYES ให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่แคบกว่าวิธีอื่น แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น กล่าวคือ (m, n) เท่ากับ $(30,30)$ วิธี JACK ให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่แคบกว่าวิธีอื่น นอกจากนี้พบว่าวิธี EXACT และวิธี BAYES ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกสถานการณ์

คำสำคัญ : การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์; วิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่น; ความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง; ค่าบันทึกกลาง; วิธีเชิงกำกับปกติ

Abstract

The objective of this research is to propose the confidence interval estimation method for the stress-strength reliability $R = P(X < Y)$ using lower record values from one parameter generalized exponential distribution. The proposed method is called an asymptotic normality of Jackknife method. A simulation study is conducted for 120 simulations to compare the performance of the proposed method with the three methods, namely exact method, asymptotic normality of MLE and Bayesian method. The criteria for a performance comparison in this study are the coverage probabilities and the expected lengths of the intervals. In the simulation design, the following factors are considered: the sample sizes $(m, n) = (3,3), (5,5), (7,7), (10,10), (12,12), (15,15), (18,18), (20,20), (22,22), (25,25), (27,27), (30,30)$, the parameter $R = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ and the confidence levels which are 90 and 95 %. The simulations results show that Bayesian method gives the expected length lower than the other methods for small sample sizes, that is $(m, n) = (3,3)$ and $(5,5)$. However, Jackknife method gives the expected length lower than the other methods for a large sample size, that is $(m, n) = (30,30)$. In addition, the exact method and Bayesian method give the best performance with respect to coverage probabilities for all situations.

Keywords: one parameter generalized exponential distribution; confidence interval estimation method; stress-strength reliability; lower record value; asymptotic normality

1. บทนำ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นวิธีการทางสถิติโดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่างสุ่มมาประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร ซึ่งวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ การประมาณค่าแบบจุด และการประมาณค่าแบบช่วง โดยการประมาณค่าแบบจุด เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรโดยใช้ตัวประมาณที่มีค่าเพียงค่าเดียว ดังนั้นหากค่าจากตัวอย่างที่สุ่มมามีความแตกต่างจากประชากรมาก การประมาณค่าแบบจุดจะมีประสิทธิภาพต่ำ และเสี่ยงต่อการเกิดความผิดพลาดสูง สำหรับการประมาณค่า

แบบช่วงเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรโดยใช้ตัวประมาณที่มีค่าเป็นช่วง โดยช่วงของการประมาณคือ (L,U) เมื่อ L และ U เรียกว่า ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น ตามลำดับ ซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มากกว่าการประมาณค่าแบบจุด โดยช่วงดังกล่าวจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ด้วยระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด (level of confidence)

Gupta และ Kundu [1,2] นำเสนอการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ [one parameter generalized exponential

distribution, GED (θ)] ซึ่งเป็นการแจกแจงอีกทางเลือกหนึ่งของการแจกแจงแกมมาและการแจกแจงไวบูลล์ โดยการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ค่อนข้าง มีประสิทธิภาพในการนำมาใช้วิเคราะห์เกี่ยวกับข้อมูลชั่วชีวิต (lifetime data) ซึ่งถูกนำมาใช้ประโยชน์ในงานวิจัยด้านต่าง ๆ ได้แก่ ด้านวิศวกรรม วิทยาศาสตร์ การควบคุมทางด้านคุณภาพ และการประยุกต์ในเรื่องความเชื่อถือได้ ซึ่งการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น คือ $f(x; \theta) = \theta (1 - e^{-x})^{\theta-1} e^{-x}$ เมื่อ $x > 0$ และ $\theta > 0$ ซึ่ง θ เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (shape parameter)

สำหรับข้อมูลในการศึกษา พบว่าบางเหตุการณ์เฉพาะค่าสังเกตที่มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าค่าสูงสุด ณ ปัจจุบัน จะถูกเก็บบันทึก โดยเรียกค่าข้อมูลดังกล่าวว่าค่าบันทึก (record value) ซึ่งค่าบันทึกจะเป็นค่าที่ถูกสังเกตในหลาย ๆ ด้าน เช่น อุตุนิยมวิทยา อุทกวิทยา แผ่นดินไหววิทยา การทำเหมืองแร่ กีฬา รวมทั้งการทดสอบในอุตสาหกรรม โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่าบันทึกมีบทบาทสำคัญมากสำหรับหนังสือ Guinness World Records โดย Chandler [3] เป็นผู้เริ่มศึกษาสมบัติและการประยุกต์ใช้ค่าบันทึก หลังจากนั้นก็มีผู้วิจัยหลายท่านนำข้อมูลที่มีลักษณะดังกล่าวไปศึกษาต่อ เช่น Raqab [4] ศึกษาตัวประมาณเชิงเส้นที่ไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (best linear unbiased estimator, BLUE) ของพารามิเตอร์ตำแหน่ง (location parameter) และพารามิเตอร์ขนาด (scale parameter) สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่มีข้อมูลเป็นค่าบันทึก นอกจากนี้ Jaheen [5] ศึกษาตัวประมาณค่าแบบเบย์ (Bayes estimators) และตัวประมาณค่าแบบเบย์เชิงประจักษ์ (empirical Bayes estimators) สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวาง

นัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ที่มีข้อมูลเป็นค่าบันทึก ซึ่งค่าบันทึกถูกกำหนดเป็นรูปแบบของความสำเร็จขั้นสูงสุด (successive extremes) ในลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน กล่าวคือ ถ้าค่าสังเกต ณ ปัจจุบันมีค่ามากกว่าค่าสังเกตลำดับก่อนหน้า จะเรียกค่าดังกล่าวนี้ว่าค่าบันทึกบน (upper record value) ในทางตรงกันข้าม หากค่าสังเกต ณ ปัจจุบันมีค่าน้อยกว่าค่าสังเกตลำดับก่อนหน้า จะเรียกค่าดังกล่าวนี้ว่าค่าบันทึกล่าง (lower record value) ซึ่งนิยามของค่าบันทึกสามารถกำหนดได้ [3] ดังนี้ ให้ $X_1, X_2, \dots$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ และฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม $F(x)$ ให้ $Y_n = \min \{X_1, \dots, X_n\}$ เมื่อ $n \geq 1$ จะเรียกค่าสังเกต X_j ว่าค่าบันทึกล่างของลำดับ ถ้า $Y_j < Y_{j-1}$ สำหรับทุก $j > 1$ จากนิยามจะได้ว่า X_1 คือ ค่าบันทึกล่าง ดังนั้นค่าบันทึกล่างในลำดับ คือ ค่าความสำเร็จสูงสุด (successive maxima) และสามารถหาค่าบันทึกบนได้ในทำนองเดียวกัน นั่นคือ กำหนดให้ $Y_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}$ เมื่อ $n \geq 1$ จะเรียกค่าสังเกต X_j ว่าค่าบันทึกบนของลำดับ ถ้า $Y_j < Y_{j-1}$ สำหรับทุก $j > 1$

มีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ เช่น Downton [6] ศึกษาการประมาณค่า R เมื่อ X และ Y ต่างมีการแจกแจงปกติ Tong [7] วิเคราะห์การประมาณค่า R เมื่อ X และ Y ต่างมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล Kundu และ Gupta [8,9] ประมาณค่า $R = P(X < Y)$ สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสองพารามิเตอร์และการแจกแจงไวบูลล์ โดยวิธีการประมาณค่าที่ได้ศึกษา เช่น วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีการประมาณค่าแบบเบส์ วิธีบูตสเตรป-พี และวิธีบูตสเตรป-ที ซึ่งผลการศึกษาพบว่า เมื่อตัวอย่างขนาดเล็กวิธีบูตสเตรปทั้งสองวิธีให้ประสิทธิภาพที่ดีกว่าวิธีอื่น ๆ แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นวิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ประสิทธิภาพที่ดีกว่า ในขณะที่ Baklizi [10] ศึกษาการอนุมานค่าความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ที่มีข้อมูลเป็นค่าบันทึกกลาง โดยได้ศึกษาวิธีการประมาณค่า 5 วิธี คือ วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีการประมาณแบบ HPD ที่เสนอโดย Chen และ Shao [11] ซึ่งพัฒนามาจากวิธีการประมาณค่าแบบเบส์โดยให้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงเจฟฟรีย์ วิธีบูตสเตรป-ที วิธีบูตสเตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์ และวิธีบูตสเตรป-ที โดยใช้ค่าประมาณความแปรปรวนบูตสเตรป ซึ่งผลการศึกษาพบว่า วิธีบูตสเตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์เหมาะสมสำหรับตัวอย่างที่มีขนาดเล็ก สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่วิธีบูตสเตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์และวิธีการประมาณแบบ HPD ให้ผลคล้ายคลึงกัน นอกจากนี้ Wong และ Wu [12] ศึกษาการอนุมานค่าความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ที่มีข้อมูลเป็นค่าบันทึกกลาง ซึ่งผลการศึกษาพบว่าวิธีการประมาณค่าที่แท้จริง และวิธีที่นำเสนอโดย Wong และ Wu [12] ให้ผลลัพธ์ที่ดีสำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ส่วนวิธี MLE ให้ผลลัพธ์ไม่ค่อยดี นอกจากนี้วิธี signed log-likelihood ratio statistic (SLR) ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมดีสำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ ส่วนวิธีบูตสเตรปเปอร์เซ็นต์ไทล์มีประสิทธิภาพดีสำหรับขนาดตัวอย่างที่เท่ากัน เป็นต้น

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยต้องการนำหลักการสร้างตัวอย่างสุ่มแจกไนฟ์และทฤษฎีขีดจำกัดกลางมา

ประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ ที่มีข้อมูลเป็นค่าบันทึกกลางสำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ โดย $X \sim GED(\theta_1)$ และ $Y \sim GED(\theta_2)$ เมื่อ X คือความเค้น (stress) Y คือ ความแข็งแรง (strength) และ R คือ ความเชื่อถือได้ (reliability) เนื่องจากวิธีแจกไนฟ์เป็นเทคนิคซึ่งใช้ลดความเอนเอียงของตัวประมาณแบบจุดได้ [13] เช่นเดียวกับงานวิจัยของ Sinsomboonthong [14] ซึ่งใช้วิธีแจกไนฟ์ลดความเอนเอียงของตัวประมาณแบบจุดในการประมาณพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรและลดความเอนเอียงของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน [15] เป็นต้น นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้จำลองข้อมูลในสถานการณ์ต่าง ๆ ทั้งหมด 120 สถานการณ์ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณค่าแบบช่วงของค่าพารามิเตอร์ $R = P(X < Y)$ 4 วิธี คือ วิธีการประมาณค่าที่แท้จริง [10] วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด [10] วิธีการประมาณค่าแบบเบส์ [10] และวิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแจกไนฟ์ ซึ่งนำเสนอในงานวิจัยนี้สำหรับข้อมูลค่าบันทึกกลางที่มีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์

2. วัตถุประสงค์ในการวิจัย

เพื่อนำเสนอวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ ของข้อมูลค่าบันทึกกลางที่มีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ และเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีที่นำเสนอกับวิธีอื่น ๆ อีก 3 วิธี เพื่อหาข้อสรุปในการเลือกใช้วิธีการประมาณ

ค่าที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์

3. วิธีการวิจัย

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ โดยจำลองข้อมูล X และ Y เป็นค่าบันทึกค่าที่มีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวงนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ด้วย θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ โดยใช้โปรแกรม R ภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

3.1 กำหนดขนาดตัวอย่างสำหรับข้อมูลค่าบันทึกค่าที่ $(m, n) = (3,3), (5,5), (7,7), (10,10), (12,12), (15,15), (18,18), (20,20), (22,22), (25,25), (27,27), (30,30)$

3.2 กำหนดค่าพารามิเตอร์ $\theta_1 = 1$

3.3 กำหนดค่าพารามิเตอร์ $R = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

3.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์ θ_2 ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า θ_1 และ ค่า R โดยที่ $R = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$

3.5 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 90 และ 95 %

3.6 วิธีการประมาณแบบช่วง สำหรับพารามิเตอร์ $R = P(X < Y)$ ที่ใช้ในงานวิจัยนี้มี 4 วิธี คือ

3.6.1 วิธีการประมาณค่าที่แท้จริง (exact method)

Gupta และ Kundu [8] ได้นำเสนอวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยให้ $X \sim GED(\theta_1)$ และ $Y \sim GED(\theta_2)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระกัน กำหนดให้ $R = P(X < Y)$ ดังนั้น $R = P(X < Y) = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$

กำหนดให้ $\underline{r} = (r_1, \dots, r_m)$ คือ เซตของค่าบันทึกค่าที่สุ่มมาจากการแจกแจง $GED(\theta_1)$ และ $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ คือ เซตของค่าบันทึกค่าที่สุ่มมาจากการแจกแจง $GED(\theta_2)$ ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน

Arnold และคณะ [16] ได้กำหนดฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) ดังนี้

$$L_1(\theta_1 | \underline{r}) = f(r_m) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{f(r_i)}{F(r_i)} = \theta_1^m u_1(\underline{r}) e^{-\theta_1 \tau_1(r_m)}$$

$$\text{และ } L_2(\theta_2 | \underline{s}) = g(s_n) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{g(s_i)}{G(s_i)} = \theta_2^n u_2(\underline{s}) e^{-\theta_2 \tau_2(s_n)}$$

$$\text{โดยที่ } u_1(\underline{r}) = \prod_{i=1}^m \frac{e^{-r_i}}{1 - e^{-r_i}}, \quad \tau_1(r_m) = -\ln(1 - e^{-r_m})$$

$$\text{และ } u_2(\underline{s}) = \prod_{j=1}^n \frac{e^{-s_j}}{1 - e^{-s_j}}, \quad \tau_2(s_n) = -\ln(1 - e^{-s_n})$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{\theta}_1 = \frac{m}{\tau_1(r_m)} = \frac{m}{-\ln(1 - e^{-r_m})} \text{ และ } \hat{\theta}_2 = \frac{n}{\tau_2(s_n)} = \frac{n}{-\ln(1 - e^{-s_n})} \quad [5]$$

จึงได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ_1 และ θ_2 ที่ขึ้นกับข้อมูลที่เป็นค่าบันทึก

ล่าง (lower record data) คือ $\hat{\theta}_1 = \frac{m}{-\ln(1 - e^{-r_m})}$

และ $\hat{\theta}_2 = \frac{n}{-\ln(1 - e^{-s_n})}$ และตัวประมาณภาวะ

น่าจะเป็นสูงสุดของ R คือ $\hat{R} = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}$ ดังนั้นช่วง

ความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ R คือ [10]

$$\left[\frac{1}{1 + \frac{m(n-1)\hat{\theta}_2}{n(m-1)\hat{\theta}_1 F_{\alpha/2, 2(m-1), 2(n-1)}}}, \frac{1}{1 + \frac{m(n-1)\hat{\theta}_2}{n(m-1)\hat{\theta}_1 F_{1-\alpha/2, 2(m-1), 2(n-1)}}} \right]$$

เมื่อ $F_{\alpha/2, 2(m-1), 2(n-1)}$ และ $F_{1-\alpha/2, 2(m-1), 2(n-1)}$

คือ ค่าควอนไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ และ $1 - \frac{\alpha}{2}$ ตามลำดับของการ

แจกแจงแบบ F ด้วยองศาความเป็นอิสระ $2(m-1)$ และ $2(n-1)$

3.6.2 วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (asymptotic normality of MLE)

การสร้างช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ R โดยเริ่มจากการหาตัวประมาณค่าแบบจุด

ของพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จากนั้นประมาณค่าแบบช่วงสำหรับ R โดยอาศัยทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง

นั่นคือ ถ้า $m \rightarrow \infty$ และ $n \rightarrow \infty$ แล้ว

$\hat{R} - R$ มีการแจกแจงเชิงกำกับปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน η^2 โดย η^2 คือ $\text{var}(\hat{R}) \approx$

$$\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{\theta}_1} \right)^2 \text{var}(\hat{\theta}_1) + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{\theta}_2} \right)^2 \text{var}(\hat{\theta}_2) = [\hat{R}(1-\hat{R})]^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ R คือ [10] $[\hat{R} - Z_{\alpha/2}\eta, \hat{R} + Z_{\alpha/2}\eta]$ เมื่อ $Z_{\alpha/2}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1 - \frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

$$\text{และ } \eta = \hat{R}(1-\hat{R}) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

3.6.3 วิธีการประมาณค่าแบบเบส์

(Bayesian method)

กำหนดให้ $\underline{r} = (r_1, \dots, r_m)$ คือ เซตของ

ค่าบันทึกกลางจาก $GED(\theta_1)$ และ $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ คือ เซตของค่าบันทึกกลางจาก $GED(\theta_2)$ ซึ่งอิสระจากกัน

ให้การแจกแจงก่อนของ θ_1 และ θ_2

$$\text{มีการแจกแจงแกมมา ดังนี้ เมื่อ } \psi_1(\theta_1) = \frac{\beta_1^{\delta_1} \theta_1^{\delta_1-1} e^{-\beta_1 \theta_1}}{\Gamma(\delta_1)}$$

$$; \theta_1 > 0 \text{ และ } \psi_2(\theta_2) = \frac{\beta_2^{\delta_2} \theta_2^{\delta_2-1} e^{-\beta_2 \theta_2}}{\Gamma(\delta_2)} ; \theta_2 > 0$$

ตามลำดับ โดยที่ (β_1, δ_1) และ (β_2, δ_2) เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนของ θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ

จะได้ ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของ

$$\theta_1 \text{ และ } \theta_2 \text{ คือ } \theta_1 | \underline{r} \sim \text{Gam} \left(m + \delta_1, \frac{1}{\beta_1 + \tau_1(r_m)} \right) \text{ และ}$$

$$\theta_2 | \underline{s} \sim \text{Gam} \left(n + \delta_2, \frac{1}{\beta_2 + \tau_2(s_n)} \right) \text{ ตามลำดับ ดังนั้น}$$

ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ R คือ [10]

$$\left[\frac{1}{1 + \frac{(n+\delta_2)(\beta_1 + \tau_1(r_m))}{(m+\delta_1)(\beta_2 + \tau_2(s_n))} F_{1-\alpha/2, 2(n+\delta_2), 2(m+\delta_1)}}, \frac{1}{1 + \frac{(n+\delta_2)(\beta_1 + \tau_1(r_m))}{(m+\delta_1)(\beta_2 + \tau_2(s_n))} F_{\alpha/2, 2(n+\delta_2), 2(m+\delta_1)}} \right]$$

เมื่อ $F_{\alpha/2, 2(n+\delta_2), 2(m+\delta_1)}$ และ $F_{1-\alpha/2, 2(n+\delta_2), 2(m+\delta_1)}$ คือ ค่าควอน

ไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ และ $1 - \frac{\alpha}{2}$ ตามลำดับของการแจกแจง

แบบ F ด้วยองศาความเป็นอิสระ $2(n+\delta_2)$ และ $2(m+\delta_1)$

3.6.4 วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณ

แฉกโนฟ (asymptotic normality of Jackknife estimator)

เป็นวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้โดยอาศัย

หลักการสร้างตัวอย่างสุ่มแฉกโนฟร่วมกับการใช้ทฤษฎีขีดจำกัดกลางโดยพัฒนามาจากวิธีบูตสเตรป [8] และวิธีที่นำเสนอนี้ใช้สำหรับกรณีขนาดตัวอย่าง $m = n$ เท่านั้น ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

(1) จากเซตของค่าบันทึกกลาง $\underline{r} =$

$(r_1, \dots, r_n)$ และ $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ ที่สุ่มมาจากการแจกแจง $GED(\theta_1)$ และ $GED(\theta_2)$ ตามลำดับ คำนวณตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ_1 , θ_2 และ

$$R \text{ ดังนี้ } \hat{\theta}_1 = \frac{n}{-\ln(1 - e^{-r_n})}, \hat{\theta}_2 = \frac{n}{-\ln(1 - e^{-s_n})} \text{ และ}$$

$$\hat{R} = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}$$

(2) สร้างตัวอย่างสุ่มแฉกโนฟ $\underline{r}_{(i)} =$

$(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n)$ เมื่อ $i=1, 2, \dots, n$ จากตัวอย่าง $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ โดยการตัดค่าที่ i ออกครั้งละ 1 ค่า จะได้ตัวอย่างใหม่ที่มีขนาด $n-1$ โดยค่าที่ถูกตัดออกจะคืนกลับไปในตัวอย่งก่อนที่จะสร้างตัวอย่างครั้งต่อไป ทำเช่นนี้จำนวน n ครั้ง และสร้างตัวอย่างสุ่มแฉกโนฟ

$\underline{s}_{(i)} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ เมื่อ $i=1, 2, \dots, n$ จากตัวอย่าง $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ ได้ในทำนองเดียวกัน พร้อมทั้งคำนวณตัวประมาณแฉกโนฟได้ดังนี้

ตัวประมาณแฉกโนฟของ R คือ

$$\hat{R}_{(i)}^* = \frac{\hat{\theta}_{1(i)}}{\hat{\theta}_{1(i)} + \hat{\theta}_{2(i)}} \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{โดย } \hat{\theta}_{1(i)} = \begin{cases} \frac{n-1}{-\ln(1-e^{-t_n})} ; i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{n-1}{-\ln(1-e^{-t_{n-1}})} ; i = n \end{cases} \text{ และ}$$

$$\hat{\theta}_{2(i)} = \begin{cases} \frac{n-1}{-\ln(1-e^{-s_n})} ; i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{n-1}{-\ln(1-e^{-s_{n-1}})} ; i = n \end{cases}$$

(3) จากขั้นตอนที่ 2 จะได้ ตัวประมาณ

แฉกโนฟของ R จำนวน n ตัว คือ $\hat{R}_{(1)}^*, \hat{R}_{(2)}^*, \dots, \hat{R}_{(n)}^*$

(4) นำตัวประมาณแฉกโนฟ $\hat{R}_{(1)}^*, \hat{R}_{(2)}^*, \dots, \hat{R}_{(n)}^*$ มาหาค่าเฉลี่ย จะได้ตัวประมาณของ R คือ

$$\bar{\hat{R}}^* = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{R}_{(i)}^*}{n}$$

(5) การสร้างช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ R โดยอาศัยทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง นั่นคือ ถ้า $n \rightarrow \infty$ แล้ว $\bar{\hat{R}}^* - R$ มีการแจกแจงเชิงกำกับปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน

$$\sigma^2 \text{ โดย } \sigma^2 \text{ คือ } \text{var}(\bar{\hat{R}}^*) \approx [\hat{R}(1-\hat{R})]^2 \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ สำหรับ R คือ $[\bar{\hat{R}}^* - Z_{\alpha/2}\delta, \bar{\hat{R}}^* + Z_{\alpha/2}\delta]$ เมื่อ $Z_{\alpha/2}$ คือค่าควอนไทล์

ที่ $1 - \frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน และ

$$\delta = \hat{R}(1-\hat{R})\sqrt{\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

3.7 คำนวนค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ($\hat{c}$) จากวิธีการประมาณทั้ง 4 วิธี โดยการ ทำซ้ำ 2,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ เพื่อตรวจสอบว่าค่าประมาณแบบช่วงที่คำนวณได้คลุมค่าพารามิเตอร์ R มากน้อยเพียงใด ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น = (จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นคลุมค่าพารามิเตอร์ $R \div 2,000$)

3.8 ตรวจสอบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในข้อ 3.7 กับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ที่ระดับ 90 และ 95 % ได้ดังนี้

วิธีการประมาณที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

$$\text{จะสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้ } \hat{c} \geq c_0 - Z_\alpha \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{w}}$$

โดยที่ α คือ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบสมมติฐาน มีค่าเท่ากับ 0.10 และ 0.05; $\hat{c}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี; c_0 คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด (ในที่นี้ คือ 0.90 และ 0.95); w คือ จำนวนครั้งของการทดลองซ้ำเท่ากับ 2,000

กล่าวคือ ถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 0.8914 และ 0.9420 ตามลำดับ จะถือว่าวิธีการประมาณนี้ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในระดับ 90 และ 95 % ตามลำดับ

3.9 คำนวนค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น โดยคำนวณจากช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ความยาวเฉลี่ยของช่วงความ

$$\text{เชื่อมั่น} = \frac{\sum_{i=1}^{2000} (U_i - L_i)}{2000} \text{ เมื่อ } L_i \text{ และ } U_i \text{ คือ ค่า}$$

ขอบเขตล่างและบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i

3.10 เปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี ถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด จะถือว่าเป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสมที่สุด ทั้งนี้ในการเปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะ

เปรียบเทียบเฉพาะในกรณีที่วิธีการประมาณให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น

4. ผลการวิจัย

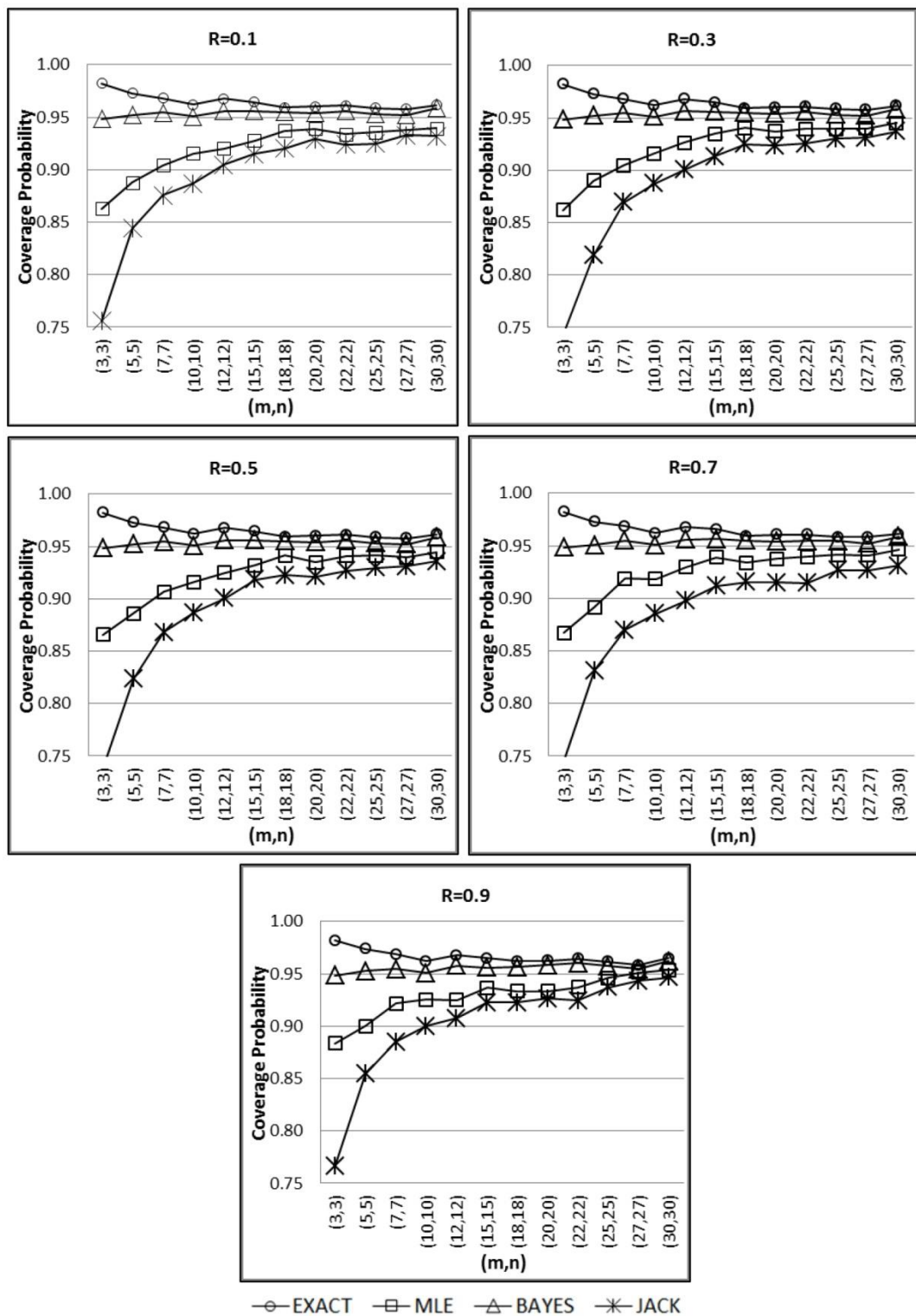
การจำลองข้อมูลทั้งหมด 120 สถานการณ์ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ $R = P(X < Y)$ โดยใช้ข้อมูลค่าบันทึกค่าในการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวงนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์ จำนวน 4 วิธี คือ วิธีการประมาณที่แท้จริง วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีการประมาณแบบเบส์ และวิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแฉกในพีซึ่งนำเสนอในงานวิจัยนี้ โดยวิธีการประมาณใดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด ถือว่าเป็นวิธีการประมาณที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด และเนื่องจากที่ระดับความเชื่อมั่น 90 และ 95 % จากการศึกษาพบว่าให้ผลการวิจัยที่ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเสนอผลการวิจัยในหัวข้อนี้เฉพาะที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % เท่านั้น

จากรูปที่ 1 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดตัวอย่าง (m, n) กับค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมที่ระดับค่า R แตกต่างกัน พบว่าทุกระดับของขนาดตัวอย่างและ R วิธีการประมาณค่าที่แท้จริงและวิธีการประมาณค่าแบบเบส์จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด นอกจากนี้เมื่อขนาดตัวอย่างเล็กในทุกระดับของค่า R พบว่าวิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแฉกในพีจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น กล่าวคือ $m = 30$ และ $n = 30$ วิธีการประมาณทั้งสองจะให้ค่า

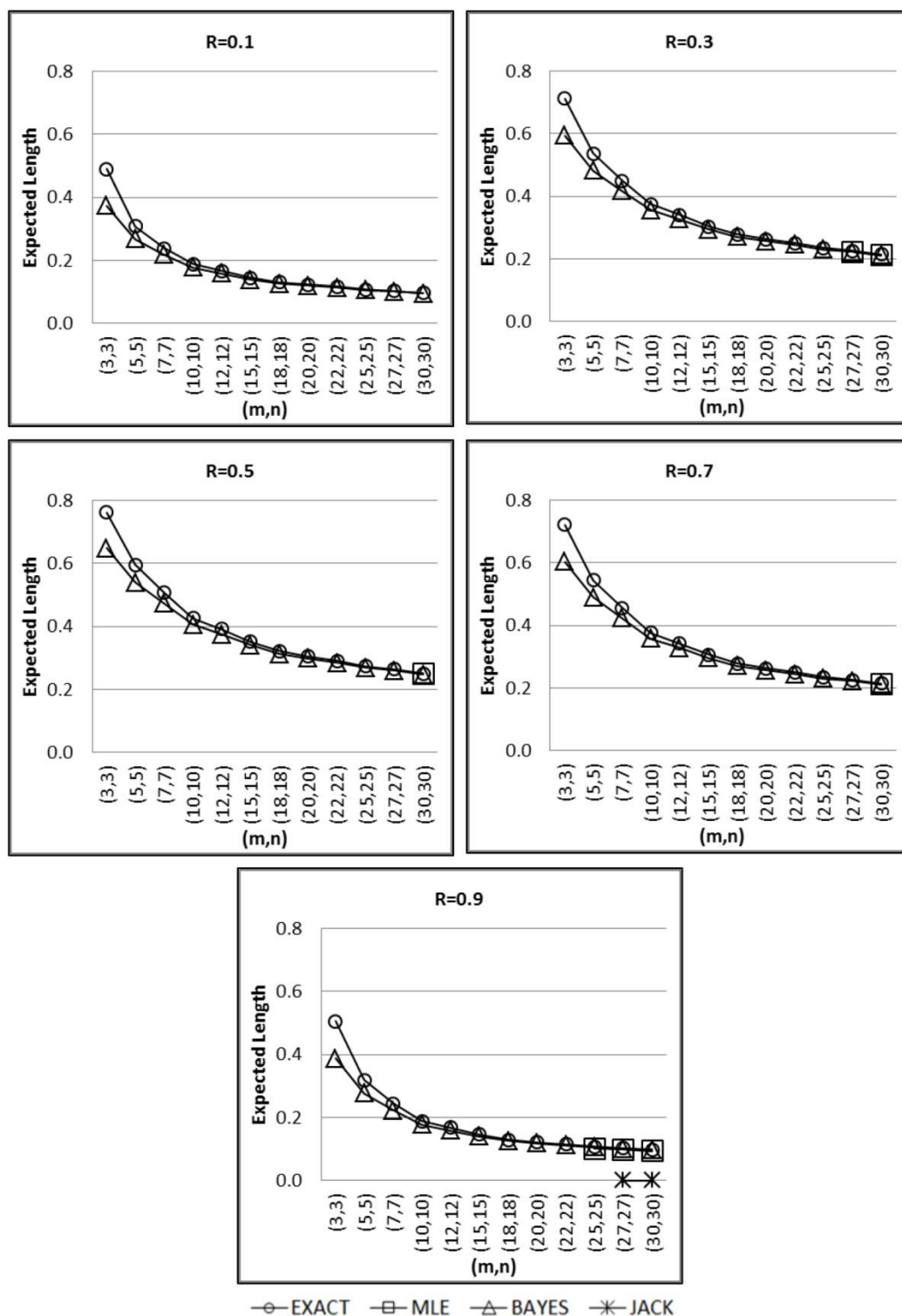
สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกระดับของค่า R

จากรูปที่ 2 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดตัวอย่าง (m, n) กับค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับค่า R แตกต่างกัน โดยพล็อตเฉพาะกรณีวิธีการประมาณที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ซึ่งพบว่าในทุกระดับของขนาดตัวอย่างและ R วิธีการประมาณค่าที่แท้จริงและวิธีการประมาณค่าแบบเบส์มีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นค่อนข้างใกล้เคียงกัน แต่วิธีการประมาณค่าแบบเบส์จะมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีการประมาณค่าที่แท้จริงเพียงเล็กน้อย เมื่อ $(m, n) = (3, 3)$ แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นวิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแฉกในพีจะมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่า นอกจากนี้เมื่อขนาดตัวอย่าง (m, n) มีค่าเพิ่มขึ้น พบว่าทุกวิธีการประมาณมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นลดลงในทุกระดับของค่า R นอกจากนี้ ค่าความเชื่อถือได้ R มีผลกับค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น กล่าวคือ ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง (m, n) เมื่อ $R = 0.1$ และ 0.9 ทุกวิธีการประมาณจะมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำสุด ในขณะที่ $R = 0.3$ และ 0.7 ทุกวิธีการประมาณจะมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแนวโน้มเพิ่มขึ้นเล็กน้อยมาจาก $R = 0.1$ และ 0.9 และเมื่อ $R = 0.5$ ทุกวิธีการประมาณจะมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสูงที่สุด

การประยุกต์ใช้วิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 4 วิธี กับข้อมูลจริง โดยข้อมูลค่าความแข็งแรงของเส้นใยคาร์บอนเดี่ยว และเส้นใยคาร์บอน -1,000 นำเสนอโดย Badar และ Priest [17] โดยกำหนดให้เส้นใยเดี่ยวถูกทดสอบภายใต้แรงดึงด้วยเครื่องวัดความยาวที่ 1, 10, 20 และ 50 มิลลิเมตร ขณะที่เส้นใย -1,000 ทดสอบภายใต้แรงดึงด้วยเครื่อง



รูปที่ 1 ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของแต่ละวิธีการประมาณ เมื่อ $R = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9



รูปที่ 2 ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของแต่ละวิธีการประมาณ เมื่อ $R = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ และ 0.9

วัดความยาวที่ 20, 50, 150 และ 200 มิลลิเมตร ในที่นี้พิจารณาเฉพาะกรณีเส้นใยเดี่ยวที่ 20 และ 10 มิลลิเมตร ดังปรากฏในข้อมูลชุดที่ 1 และ 2 ตามลำดับดังนี้

ข้อมูลชุดที่ 1 : 0.312, 0.314, 0.479, 0.552, 0.700, 0.803, 0.861, 0.865, 0.944, 0.958, 0.966, 0.997, 1.006, 1.021, 1.027, 1.055, 1.063, 1.098, 1.140, 1.179, 1.224, 1.240, 1.253, 1.270, 1.272, 1.274, 1.301, 1.301, 1.359, 1.382, 1.382, 1.426, 1.434, 1.435, 1.478, 1.490, 1.511, 1.514, 1.535, 1.554, 1.566, 1.570, 1.586, 1.629, 1.633, 1.642, 1.648, 1.684, 1.697, 1.726, 1.770, 1.773, 1.800, 1.809, 1.818, 1.821, 1.848, 1.880, 1.954, 2.012, 2.067, 2.084, 2.090, 2.096, 2.128, 2.233, 2.433, 2.585, 2.585

ข้อมูลชุดที่ 2 : 0.101, 0.332, 0.403, 0.428, 0.457, 0.550, 0.561, 0.596, 0.597, 0.645, 0.654, 0.674, 0.718, 0.722, 0.725, 0.732, 0.775, 0.814, 0.816, 0.818, 0.824, 0.859, 0.875, 0.938, 0.940, 1.056, 1.117, 1.128, 1.137, 1.137, 1.177, 1.196, 1.230, 1.325, 1.339, 1.345, 1.420, 1.423, 1.435, 1.443, 1.464, 1.472, 1.494, 1.532, 1.546, 1.577, 1.608, 1.635, 1.693, 1.701, 1.737, 1.754, 1.762, 1.828, 2.052, 2.071, 2.086, 2.171, 2.224, 2.227, 2.425, 2.595, 3.220

เมื่อขนาดตัวอย่าง $(m, n) = (3, 3)$ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % จะได้ว่า $\hat{\theta}_1 = 5.4891$ $\hat{\theta}_2 = 3.7465$ และ $\hat{R} = 0.5943$ วิธี EXACT ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.1866, 0.9035) วิธี MLE ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.2705, 0.9181) วิธี BAYES ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.2549, 0.8626) และวิธี JACK ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.2490, 0.9046) จะพบว่า วิธี BAYES ให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำสุด

และเมื่อขนาดตัวอย่าง $(m, n) = (30, 30)$ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 % จะได้ว่า $\hat{\theta}_1 = 22.7842$ $\hat{\theta}_2 = 12.8057$ และ $\hat{R} = 0.6402$ วิธี EXACT ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.5351, 0.7334) วิธี MLE ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.5424, 0.7380) วิธี BAYES ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.5368, 0.7336) และวิธี JACK ให้ช่วงของการประมาณคือ (0.5370, 0.7319) จะพบว่า วิธี JACK ให้ค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำสุด

5. วิจัย

การจำลองข้อมูลทั้งหมด 120 สถานการณ์ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีที่นำเสนอ คือ วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแฉกไนฟ์ (JACK) กับวิธีอื่น ๆ อีก 3 วิธี ได้แก่ วิธีการประมาณค่าที่แท้จริง (EXACT) วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีการประมาณค่าแบบเบส์ (BAYES) พบว่าช่วงความเชื่อมั่นสำหรับวิธี EXACT จะมีประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Wong และ Wu [12] สำหรับวิธี MLE จะมีประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Baklizi [10] กับ Gupta และ Kundu [9] และวิธี BAYES ประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Gupta และ Kundu [9] นอกจากนี้ Gupta และ Kundu [9] แนะนำให้ใช้วิธี BAYES สำหรับตัวอย่างที่มีขนาดเล็ก และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นแนะนำให้ใช้วิธีเชิงกำกับปกติ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของผู้วิจัยในครั้งนี้

6. สรุป

ทุกระดับของขนาดตัวอย่าง พบว่าวิธี EXACT และวิธี BAYES จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำ

กว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนวิธี MLE และวิธี JACK จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น และเมื่อนำไปพิจารณาเปรียบเทียบค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น พบว่าทุกระดับค่า R เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก กล่าวคือ $(m,n) = (3,3)$,

(5,5) วิธี BAYES มีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีอื่น ๆ แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น กล่าวคือ $(m,n) = (30,30)$ พบว่าวิธี JACK จะมีค่าความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีอื่น ๆ ซึ่งสามารถสรุปวิธีการประมาณที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 วิธีการประมาณที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

ขนาดตัวอย่าง (m,n)	R				
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
(3,3)	BAYES	BAYES	BAYES	BAYES	BAYES
(5,5)	BAYES	BAYES	BAYES	BAYES	BAYES
(7,7)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(10,10)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(12,12)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(15,15)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(18,18)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(20,20)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(22,22)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES
(25,25)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES,MLE
(27,27)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES	JACK
(30,30)	EXACT,BAYES	EXACT,BAYES,MLE	EXACT,BAYES,MLE	EXACT,BAYES,MLE	JACK

EXACT = วิธีการประมาณค่าที่แท้จริง; MLE = วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด; BAYES = วิธีการประมาณค่าแบบเบย์; JACK = วิธีเชิงกำกับปกติของตัวประมาณแฉกไนฟ์

7. ข้อเสนอแนะ

7.1 การศึกษาครั้งต่อไปอาจศึกษาการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวงนัยทั่วไปสองพารามิเตอร์ โดยอาจศึกษาในกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 ค่า หรือไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 ค่า

7.2 ศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ $R = P(X < Y)$ อื่น ๆ อีก เช่น วิธีการประมาณค่าแบบบูตสตรัป ซึ่งวิธีการ

ประมาณค่าแบบบูตสตรัปนั้น มีหลายแบบ ได้แก่ วิธีการประมาณค่า แบบบูตสตรัปเปอร์เซ็นไทล์ วิธีการประมาณค่าแบบบูตสตรัป-ที วิธีการประมาณค่าแบบบูตสตรัป BC_a และวิธีการประมาณค่าแบบบูตสตรัป ABC เป็นต้น

7.3 การศึกษาครั้งต่อไปอาจมีการเพิ่มเติมเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ เช่น ในงานวิจัยของสุวิตา [18] ใช้เกณฑ์ในการเปรียบเทียบ

ประสิทธิภาพวิธีประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างค่าเฉลี่ยสองประชากรในการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล คือ ค่าความเอนเอียงสัมพัทธ์ (relative bias)

7.4 เนื่องจากวิธีที่ผู้วิจัยได้นำเสนอนั้นเหมาะสำหรับกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ แต่ในงานวิจัยนี้ข้อมูลที่ใช้ศึกษาคือข้อมูลค่าบันทึกกลางซึ่งเป็นข้อมูลที่หายาก (rare data) ในการศึกษาครั้งต่อไปอาจศึกษาข้อมูลทั่วไปและขยายขอบเขตของขนาดตัวอย่างให้ใหญ่ขึ้น ซึ่งวิธีที่นำเสนอจะให้ประสิทธิภาพดี

8. รายการอ้างอิง

- [1] Gupta, R.D. and Kundu, D., 1999, Generalized exponential distribution, Austral. N.Z. Statist. 41: 173-188.
- [2] Gupta, R.D. and Kundu, D., 2001, Exponentiated exponential distribution, an alternative to Gamma and Weibull distributions, Biomet. J. 43: 117-130.
- [3] Chandler, K.N., 1952, The distribution and frequency of record values, J. Royal Stat. Soc. Ser. B 14: 220-228.
- [4] Raqab, M.Z., 2002, Inferences for generalized exponential distribution based on record statistics, J. Stat. Plan. Inference 104: 339-350.
- [5] Jaheen, Z.F., 2004, Empirical Bayes inference for generalized exponential distribution based on record, Commun. Stat. Theor. Method. 33: 1851-1861.
- [6] Downtown, F., 1973, The estimation of $P(Y < X)$ in the normal case, Technometrics 15: 551-558.
- [7] Tong, H., 1974, A note on the estimation of $P(Y < X)$ in exponential case, Technometrics 16: 625.
- [8] Gupta, R.D. and Kundu, D., 2005, Estimation of $P(Y < X)$ for generalized exponential distribution, Metrika 61: 291-308.
- [9] Gupta, R.D. and Kundu, D., 2006, Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distributions, IEEE Trans. Reliabil. 55: 270-280.
- [10] Baklizi, A., 2008, Likelihood and Bayesian estimation of $P(Y < X)$ using lower record values from the generalized exponential distribution, Comp. Stat. Data Anal. 52: 3468-3473.
- [11] Chen, M.H. and Shao, Q.M., 1999, Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals, J. Comp. Graph. Stat. 8: 69-92.
- [12] Wong, A.C.M. and Wu, Y.Y., 2009, A note on interval estimation of $P(Y < X)$ using lower record data from the generalized exponential distribution, Comp. Stat. Data Anal. 53: 3650-3658.
- [13] Sinsomboonthong, J., 2013, Bias correction in estimation of the population correlation coefficient, Kasetsart J. (Nat. Sci.) 47: 453-459.
- [14] Efron, B. and Tibshirani, R.J., 1993, An Introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall / CRC, 436p.
- [15] Sinsomboonthong, J., 2011, Jackknife

- maximum likelihood estimates for a bivariate normal distribution with missing data, J. Thai Stat. Assoc. 9: 151-169.
- [16] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1998, Records, Wiley, Inc., New York.
- [17] Badar, M.G. and Priest, A.M., 1982, Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid composites, Progress in Science and Engineering Composites, ICCM-IV: 1129-1136.
- [18] สุวิตา ศักดิ์ชัยนันท์, 2555, การเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างค่าเฉลี่ยสองประชากรในการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ, 167 น.