การเปรียบเทียบประสิทธิภาพช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการประมาณพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินาม

Efficiency Comparison of the Confidence Intervals for Estimation of a Binomial Proportion Parameter

ณัฎฐวรรณ ทิพย์เลิศ*, ปรภาว์ วิบูลย์เจริญศรี, มินตา อ่วมกระทุ่ม, อินทุอร ตานี และจุฑาภรณ์ สินสมบูรณ์ทอง

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10900

Nattawan Tiplert*, Porapha Wiboonjaroensri, Minta Aomkratoom, Intuorn Tanee and Juthaphorn Sinsomboonthong

Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University,

Ngamwongwan Road, Ladyao, Chatuchak, Bangkok 10900

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่น 95 % สำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินาม 5 วิธี ได้แก่ วิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีสูตรแม่นยำ วิธีเจฟเฟรย์ และวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ ซึ่งเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ คือ ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จำลองข้อมูลโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลให้มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ n และ p ซึ่งกำหนดขนาดตัวอย่าง (n) 3 กลุ่ม คือ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 15) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100 และ 500) กำหนดพารามิเตอร์ p มีค่าเท่ากับ 0.05, 0.10, 0.30, 0.50, 0.70 และ 0.90 ในแต่ละสถานการณ์ทดลองซ้ำ 2,000 ครั้ง ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้ วิธีเจฟเฟรย์มีแนวโน้มให้ประสิทธิภาพดีเกือบทุกสถานการณ์ ยกเว้นพารามิเตอร์ p มีค่าเท่ากับ 0.5 และในเกือบทุกระดับของขนาดตัวอย่าง n วิธีสคอร์จะมีประสิทธิภาพดี สำหรับวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นไม่แตกต่างจากวิธีสคอร์ แต่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมเป็นไปตามที่กำหนดไว้ดีกว่าวิธีสคอร์ นอกจากนี้วิธีวาลด์มีแนวโน้มให้ประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n = 100) และพารามิเตอร์ p มีค่าเท่ากับ 0.1 หรือ 0.9

คำสำคัญ : การประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่น; พารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินาม; ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น; ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

***ผู้รับผิดชอบบทความ :** Nattawan.tiplert@hotmail.com

Abstract

The objective of this research is to compare the efficiencies of 95% confidence intervals of five Methods–Wald method, score method, rigorous formula method, Jeffreys method and generalized score method–for a binomial proportion parameter. The criteria for a performance comparison in this study are the coverage probability and the average width of the confidence interval. Monte Carlo simulation is conducted for dataset in the form of binomial distribution with parameters of n and p. The studied factors consist of the three groups of sample size (n) as follows: the small sample size which is n = 10 and 15, the medium sample size which is n = 30 and 50, and the large sample size which is n = 100 and 500. In addition, the proportion parameter p is defined at 0.05, 0.10, 0.30, 050, 0.70 and 0.90. There are 2,000 repetitions for each situation. The conclusions of this research are as follows: The Jeffreys method tends to have a good performance for almost all situations except the parameter p is equal to 0.5 and almost all levels of the sample size n. In this excepted situations, the score method tends to have a good performance. The average width of the generalized score method seems to have no difference from this of the score method, but the coverage probability of the generalized score method seems better. Furthermore, the Wald method seems to have a good performance for a large sample size n which is greater than 100 and the parameter p is equal to 0.10 or 0.90.

Keywords: confidence interval estimation; binomial proportion parameter; confidence coefficient; average width of the confidence interval

1. บทนำ

การประมาณค่าพารามิเตอร์แบ่งเป็น 2 แบบ ได้แก่ การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงและการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบค่าเดียว [1] การประมาณค่าแบบช่วงนั้นมีโอกาสคลาดเคลื่อนจากค่าจริงน้อยกว่าการประมาณค่าแบบค่าเดียว ทั้งนี้ช่วงที่ได้จากการประมาณค่าแบบช่วงความเชื่อมั่นจะบอกถึงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของพารามิเตอร์ สำหรับช่วงของการประมาณจะคลุมค่าพารามิเตอร์หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับการกำหนดความกว้างของช่วงการประมาณ กล่าวคือ หากกำหนดให้ช่วงการประมาณแคบ โอกาสที่ช่วงจะคลุมค่าพารามิเตอร์จะมีค่าน้อย แต่ถ้าช่วงดังกล่าวคลุมค่าพารามิเตอร์แล้วแสดงให้เห็นว่าช่วงการประมาณนั้นมีความแม่นยำสูง

การประมาณพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนในการแจกแจงทวินามนั้นมีความสำคัญต่อการดำเนินการอย่างกว้างขวาง ทั้งในทางธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ ได้แก่ กระทรวงพาณิชย์อาจอยากทราบว่ามูลค่าสินค้าเกษตรที่ส่งออกจำหน่ายตลาดต่างประเทศคิดเป็นสัดส่วนเท่าไรของมูลค่าการส่งออกทั้งหมด ผู้จัดการห้างสรรพ-สินค้าอาจต้องการทราบผลกำไรจากแผนกซุปเปอร์มาเก็ตคิดเป็นสัดส่วนเท่าไรของผลกำไรห้างสรรพสินค้าทั้งหมด สภาหอการค้าไทยต้องการทราบว่ากำลังการผลิตของธุรกิจขนาดกลางและขนาดเล็ก (SMEs) คิดเป็นสัดส่วนเท่าไรของกำลังการผลิตทั้งประเทศหรือสำนักงานส่งเสริมการท่องเที่ยวอยากทราบจำนวน

นักท่องเที่ยวที่เดินทางมาท่องเที่ยวในจังหวัดเชียงใหม่ คิดเป็นสัดส่วนเท่าไรของนักท่องเที่ยวทั้งหมดในประเทศไทย เป็นต้น [2] ซึ่งวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนในการแจกแจงทวินามมีหลายวิธีดังนี้ วิธีวาลด์ [3] เป็นวิธีที่รู้จักและนิยมใช้กันแพร่หลายในปัจจุบันเพราะง่ายต่อการคำนวณ แต่จะให้ประสิทธิภาพดีในด้านความน่าจะเป็นครอบคลุมตามที่กำหนดและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ [4] ในขณะที่วิธีเจฟเฟรย์ [5] เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ให้ประสิทธิภาพดีทั้งกรณีตัวอย่างขนาดเล็ก และตัวอย่างขนาดใหญ่ สำหรับวิธีสูตรแม่นยำ [6] เป็นวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมช่วงความเชื่อมั่นที่ดีตามที่กำหนด แต่เมื่อพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับวิธีนี้จะค่อนข้างกว้าง วิธีสคอร์เป็นอีกหนึ่งวิธีที่ได้มีการนำเสนอโดย Wilson [3] ซึ่งสร้างขึ้นมาโดยอาศัยหลักการทดสอบสมมติฐานทางสถิติเกี่ยวกับค่าสัดส่วนทวินาม และในงานวิจัยของสาริณีย์ [7] และมัลลิกา [8] ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีสคอร์กับวิธีอื่นๆ พบว่าวิธีสคอร์จะมีประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก นอกจากนี้ในปี ค.ศ. 2012 Guan [9] นำเสนอวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินาม โดยพัฒนามาจากวิธีสคอร์ และเรียกวิธีที่นำเสนอนี้ว่าวิธีวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ ซึ่งวิธีนี้จะให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมช่วงความเชื่อมั่นที่ดีกว่าวิธีสคอร์ นอกจากนี้ได้มีงานวิจัยที่ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินามหลายงานวิจัยดังนี้ รักตาภา [4] ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม 5 วิธี คือ วิธีปกติ วิธีสคอร์ วิธีปรับค่าของวาลด์ วิธีเอ็กแซ็ก และวิธีสูตรแม่นยำ พบว่าเมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก วิธีสคอร์จะมีประสิทธิภาพดีที่สุด แต่เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ วิธีปกติให้ผลดีที่สุดกรณีที่ค่า $p = 0.05$ ถึง 0.10 อีกหนึ่งงานวิจัยของ Brown และคณะ [5] ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับการแจกแจงทวินาม โดยวิธีที่นำมาพิจารณาได้แก่ วิธี Wilson หรือวิธีสคอร์ วิธี Agresti-Coull และวิธี Jeffreys จากการวิจัยพบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แนะนำให้ใช้วิธี Wilson หรือวิธี Jeffreys ก็ได้ เนื่องจากมีประสิทธิภาพไม่แตกต่างกัน และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n > 40$) วิธี Wilson วิธี Jeffreys และวิธี Agresti-Coull จะให้ผลที่ไม่แตกต่างกัน ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วน p ในข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินาม เนื่องจากวิธีการประมาณค่าแบบช่วงนั้นมีโอกาสจะประมาณค่าได้ครอบคลุมพารามิเตอร์ที่แท้จริงได้ดีกว่าวิธีการประมาณค่าแบบจุด ทั้งนี้ช่วงที่ได้จากการประมาณค่าแบบช่วงความเชื่อมั่นจะบอกถึงค่าที่ต่ำสุดและค่าที่สูงสุดของพารามิเตอร์ ซึ่งการวิจัยครั้งนี้ต้องการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วน p ในการแจกแจงทวินาม 5 วิธี ได้แก่ วิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีสูตรแม่นยำ วิธีเจฟเฟรย์ และวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ โดยเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพคือ ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ซึ่งวิธีที่มีประสิทธิภาพดี จะต้องให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมหรือค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเป็นไปตามที่กำหนดไว้และมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด

2. วิธีการวิจัย

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพช่วงความเชื่อมั่น 95 % สำหรับการประมาณพารามิเตอร์ค่าสัดส่วน

ทวินาม โดยเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่น 5 วิธี คือ วิธีวาลด์ (Wald method) วิธีสคอร์ (score method) วิธีสูตรแม่นยำ (rigorous formula method) วิธีเจฟเฟรย์ (Jeffreys method) และวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ (generalized score method) โดยมีขั้นตอนการวิจัยดังต่อไปนี้

2.1 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) 3 ระดับ คือ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10, 15) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30, 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100, 500) กำหนดค่าพารามิเตอร์ (p) 6 ระดับ ได้แก่ 0.05, 0.10, 0.30, 0.50, 0.70 และ 0.90

2.2 ใช้โปรแกรม SAS 9.4 จำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล โดยในแต่ละสถานการณ์ ทดลองซ้ำ 2,000 ครั้ง

2.3 วิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ p ที่ใช้ในการวิจัยนี้ มี 5 วิธี คือ

2.3.1 วิธีวาลด์

วิธีวาลด์ [3] เป็นวิธีดั้งเดิมที่นิยมใช้กันซึ่งมีหลักการสร้างช่วงความเชื่อมั่นดังนี้

ให้ Y_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบอร์นูลลีด้วยพารามิเตอร์ p และ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ n และ p จะได้ $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{X}{n}$ เป็นสัดส่วนของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่าง และจากทฤษฎีขีดจำกัดกลาง ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่ $\hat{p}$ จะมีการแจกแจงใกล้เคียงปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเป็น p และความแปรปรวนเป็น $\frac{p(1-p)}{n}$ กล่าวคือ $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1$

เมื่อ $n \to \infty$ และ $P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$ ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p สำหรับวิธีวาลด์ คือ

$$\left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

เมื่อ $\hat{p}$ คือ สัดส่วนของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่างซึ่ง $\hat{p} = \frac{X}{n}$; X คือ จำนวนครั้งของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่างสุ่มขนาด n; $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

2.3.2 วิธีสคอร์

Wilson [3] ได้นำเสนอช่วงความเชื่อมั่นของวิธีสคอร์โดยสร้างขึ้นจากการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : p = p_0$ เทียบกับ $H_1 : p \neq p_0$ ที่ระดับนัยสำคัญ α ซึ่งจะยอมรับสมมติฐานหลัก H_0 เมื่อ

$$\frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

จากสมการ (1) จัดให้อยู่ในรูปของสมการกำลังสอง (quadratic equation) แล้วแก้สมการหาค่าพารามิเตอร์ p_0 โดยกำหนดให้ $p = p_0$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p สำหรับวิธีสคอร์ คือ

$$\left[\frac{2n\hat{p} + Z^2 - Z\sqrt{4n\hat{p}(1-\hat{p}) + Z^2}}{2(n+Z^2)}, \frac{2n\hat{p} + Z^2 + Z\sqrt{4n\hat{p}(1-\hat{p}) + Z^2}}{2(n+Z^2)}\right]$$

เมื่อ $\hat{p}$ คือ สัดส่วนของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่างซึ่ง $\hat{p} = \frac{X}{n}$; X คือ จำนวนครั้งของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่างสุ่มขนาด n; $Z = Z_{\frac{\alpha}{2}}$ คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

2.3.3 วิธีสูตรแม่นยำ

Chen และคณะ [6] ได้นำเสนอช่วงความเชื่อมั่นของวิธีสูตรแม่นยำ สร้างโดยการอาศัยทฤษฎีบทของ Massart [10] และ Clunies-Ross [11]

ซึ่งสามารถหาค่า p ได้จากสมการที่ (2)

$$\exp\left(-\frac{n\left(p-\frac{X}{n}\right)^2}{2\left(\frac{2}{3}p+\frac{X}{3n}\right)\left(1-\frac{2}{3}p-\frac{X}{3n}\right)}\right)=\frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

จากสมการ (2) จัดให้อยู่ในรูปของสมการกำลังสอง แล้วแก้สมการหาค่าพารามิเตอร์ p จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p สำหรับวิธีสูตรแม่นยำ คือ

$$\left[\hat{p}+\frac{3}{4}\frac{1-2\hat{p}-\sqrt{1+4\theta X(1-\hat{p})}}{1+\theta n},\hat{p}+\frac{3}{4}\frac{1-2\hat{p}+\sqrt{1+4\theta X(1-\hat{p})}}{1+\theta n}\right]$$

เมื่อ $\theta=\frac{9}{8\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$; $\hat{p}$ คือ สัดส่วนของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่างซึ่ง $\hat{p}=\frac{X}{n}$; X คือ จำนวนครั้งของการเกิดลักษณะที่สนใจในตัวอย่างสุ่มขนาด n; n คือ ขนาดตัวอย่าง

2.3.4 วิธีเจฟเฟรย์

กำหนดให้การแจกแจงก่อนสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินามมีการแจกแจงเบต้า กล่าวคือ ให้ X~Bin(n,p) แล้วการแจกแจงก่อนของ p คือ p~Beta(a,b) ดังนั้นการแจกแจงภายหลังของ p คือ p|X ~ Beta (X+a,n-X+b) จะได้ช่วงความเชื่อมั่น (1-α) 100 % ของ p สำหรับช่วงของเบส์ [5] คือ CI_B = [L_B (x), U_B (x)] โดย L_B (x) = B(α/2; X+a,n-X+b) และ U_B (x) = B(1-α/2; X+a,n-X+b)] เมื่อ L_B (x) คือ ค่าควอนไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจง Beta (X+a,n-X+b); U_B (x) คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจง Beta (X+a,n-X+b) และจากงานวิจัยของ Brown และ Dasgupta [5] กำหนดให้ Jeffrays prior ของ p คือ p~Beta(1/2,1/2) ดังนั้นจะได้ว่าช่วงความเชื่อมั่น (1-α) 100 % ของ p สำหรับช่วงของเจฟเฟรย์ คือ CI_J = [L_J (x), U_J (x)] โดย L_J (x) = B(α/2; X+1/2,n-X+1/2) และ U_J (x) = B(1-α/2; X+1/2, n-X+1/2) เมื่อ L_J (x) คือ ค่าควอนไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจง Beta(X+1/2,n-X+1/2); U_J (x) คือ ค่าควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจง Beta(X+1/2,n-X+1/2)

2.3.5 วิธีวางนัยทั่วไปสคอร์

Guan [9] ได้นำเสนอวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์เพื่อประมาณพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินามแบบช่วงโดยพัฒนามาจากวิธีสคอร์ [3] ซึ่งมีหลักการดังนี้

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินาม กล่าวคือ X~Bin(n,p) สำหรับช่วงความเชื่อมั่น (1-α) 100 % ของ p โดยวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์สามารถหาได้จากสมการ

$$\left[\frac{X+\frac{z^2}{2}}{n+z^2}-\frac{z}{n+z^2}\sqrt{\frac{X(n-X)}{n}+az^2},\frac{X+\frac{z^2}{2}}{n+z^2}+\frac{z}{n+z^2}\sqrt{\frac{X(n-X)}{n}+az^2}\right] \quad (3)$$

จากสมการที่ (3) ถ้ากำหนดให้ a = $\frac{1}{4}$ สมการดังกล่าวจะเป็นรูปแบบช่วงความเชื่อมั่นของวิธีสคอร์ ซึ่ง Guen แนะนำว่าค่าคงที่ a ที่ใช้ในสมการที่ (3) ควรจะมีค่าอยู่ในช่วง 0.25 ถึง 0.5 แต่ผลจากการจำลองข้อมูล Guan ได้แนะนำให้ใช้ค่าคงที่ a = 0.3 หรือ 0.33 เนื่องจากมีประสิทธิภาพดี ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น (1-α) 100 % ของ p สำหรับวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้คือ

$$\left[\frac{X+\frac{z^2}{2}}{n+z^2}-\frac{z}{n+z^2}\sqrt{\frac{X(n-X)}{n}+0.33z^2},\frac{X+\frac{z^2}{2}}{n+z^2}+\frac{z}{n+z^2}\sqrt{\frac{X(n-X)}{n}+0.33z^2}\right]$$

2.4 คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ($\hat{c}$) สำหรับช่วงความเชื่อมั่น 95 % ทั้ง 5 วิธี

ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น = (จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมพารามิเตอร์ p) ÷ (จำนวนช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมด)

2.5 เปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้กับเกณฑ์ที่กำหนดที่ได้จากการทดสอบสมมติฐาน

โดยพิจารณาการทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ดังนี้

(1) H_0 : $c \geq c_0$ (ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นมีค่าไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด); H_1 : $c < c_0$ (ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นมีค่าน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด)

(2) ตัวสถิติทดสอบ คือ $Z = \dfrac{\hat{c} - c_0}{\sqrt{\dfrac{c_0(1-c_0)}{m}}}$

เมื่อ m คือจำนวนรอบที่ทดลองซ้ำ

(3) บริเวณวิกฤติ คือ จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $Z<-Z_\alpha$ หรือ $\hat{c} < c_0 - Z_\alpha\sqrt{\dfrac{c_0(1-c_0)}{m}}$ เนื่องจาก m = 2,000 จะได้ $\hat{c} < 0.95 - 1.645\sqrt{\dfrac{0.95(1-0.95)}{2000}} = 0.9420$

(4) ดังนั้น จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $\hat{c} < 0.9420$ ในที่นี้ค่าคงที่ 0.9420 เรียกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

2.6 คำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเฉพาะกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดที่ระดับ 95 % เท่านั้น [12]

ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น = $\dfrac{\sum_{i=1}^{2000}\left(U_i - L_i\right)}{2000}$ เมื่อ U_i และ L_i เป็นขีดจำกัดบนและล่างตามลำดับของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i

2.7 เปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธี

2.8 สรุปผลการวิจัยในแต่ละสถานการณ์

3. ผลการวิจัย

การวิจัยนี้ต้องการเปรียบเทียบประสิทธิภาพวิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วน p ในการแจกแจงทวินาม 5 วิธี ได้แก่ วิธีวาลด์ วิธีสคอร์ วิธีสูตรแม่นยำ วิธีเจฟเฟรย์ และวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ การพิจารณาว่าวิธีการประมาณค่าแบบช่วงวิธีใดเหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด มีหลักการพิจารณา คือ พิจารณาจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของแต่ละวิธีว่าให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด โดยเกณฑ์ที่กำหนดมีค่าเท่ากับ 0.9420 และนำช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนดมาเปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่อไป หากวิธีการประมาณใดมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุดจะถือว่าวิธีการประมาณดังกล่าวเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการประมาณในสถานการณ์นั้น ๆ ซึ่งค่าประมาณสัมประสิทธ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธี แสดงดังตารางที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 พบว่าวิธีสูตรแม่นยำวิธีเจฟเฟรย์และวิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ ส่วนใหญ่มีแนวโน้มให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในเกือบทุกสถานการณ์ ส่วนวิธีวาลด์ จะเริ่มมีแนวโน้มให้ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมช่วงความเชื่อมั่นที่ดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n=100,500) ในทุกระดับของพารามิเตอร์ p และสำหรับวิธีสคอร์ มีแนวโน้มให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกค่าพารามิเตอร์ p เมื่อตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 50, 100 และ 500

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 1 พบว่าส่วนใหญ่ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทุกวิธีมีแนวโน้มมากขึ้น เมื่อพารามิเตอร์ p มีค่าประมาณ 0.5 แต่เมื่อพารามิเตอร์ p มีค่าห่างจาก 0.5 ออกไป พบว่าค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทุกวิธีมีแนวโน้มลดลง ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง n นอกจากนี้เมื่อพิจารณาค่าในตารางที่ 2 พบว่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นทุกวิธีการประมาณ มีแนวโน้มแคบลง

ตารางที่ 1 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ทั้ง 5 วิธี กรณีขนาดตัวอย่าง (n) และพารามิเตอร์ (p) แตกต่างกัน

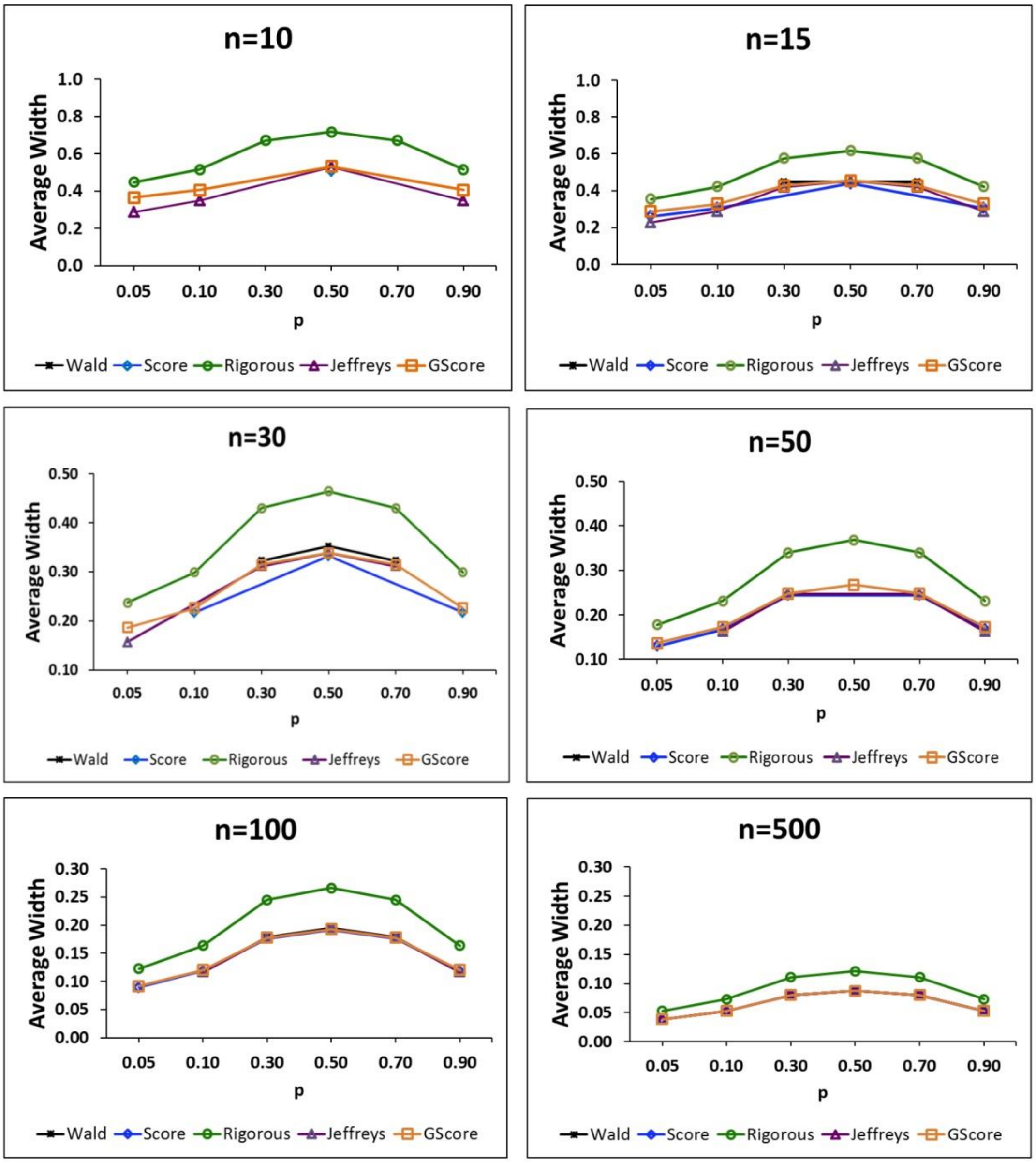
ขนาดตัวอย่าง	พารามิเตอร์	วิธีการประมาณ				
n	p	Wald	Score	Rigorous	Jeffreys	GScore
10	0.05	0.4095	0.9160	1*	0.9895*	0.9895*
	0.1	0.6725	0.9325	0.9990*	0.9890*	0.989*
	0.3	0.8530	0.9295	0.9990*	0.9295	0.9295
	0.5	0.8980	0.9820*	0.9995*	0.9820*	0.982*
	0.7	0.8530	0.9295	0.9990*	0.9295	0.9295
	0.9	0.6725	0.9325	0.9990*	0.9890*	0.989*
15	0.05	0.5495	0.9675*	1*	0.9675*	0.9675*
	0.1	0.8090	0.9430*	0.9990*	0.9890*	0.943*
	0.3	0.9550*	0.9175	0.9945*	0.9550*	0.9835*
	0.5	0.8910	0.9695*	0.9955*	0.9695*	0.9695*
	0.7	0.9550*	0.9175	0.9945*	0.9550*	0.9835*
	0.9	0.8090	0.9430*	0.9990*	0.9890*	0.943*
30	0.05	0.7990	0.9390	0.9980*	0.9855*	0.9855*
	0.1	0.8295	0.9745*	0.9990*	0.9385	0.9745*
	0.3	0.9590*	0.9370	0.9980*	0.9590*	0.977*
	0.5	0.9610*	0.9610*	0.99750*	0.9610*	0.961*
	0.7	0.9590*	0.9370	0.9980*	0.9590*	0.977*
	0.9	0.8295	0.9745*	0.9990*	0.9385	0.9745*
50	0.05	0.9305	0.9645*	0.9980*	0.8970	0.9645*
	0.1	0.8895	0.9715*	0.9950*	0.9445*	0.9715*
	0.3	0.9405	0.9605*	0.9975*	0.9605*	0.9605*
	0.5	0.9415	0.9415	0.9965*	0.9415	0.972*
	0.7	0.9405	0.9605*	0.9975*	0.9605*	0.9605*
	0.9	0.8895	0.9715*	0.9950*	0.9445*	0.9715*
100	0.05	0.8875	0.968*	0.9950*	0.9400	0.968*
	0.1	0.9440*	0.9420*	0.9985*	0.9605*	0.942*
	0.3	0.9545*	0.9445*	0.9945*	0.9545*	0.9665*
	0.5	0.9470*	0.9470*	0.9965*	0.9470*	0.947*
	0.7	0.9545*	0.9445*	0.9945*	0.9545*	0.9665*
	0.9	0.9440*	0.9420*	0.9985*	0.9605*	0.942*
500	0.05	0.9220	0.9510*	0.9955*	0.9510*	0.951*
	0.1	0.9385	0.9575*	0.9955*	0.9485*	0.9575*
	0.3	0.9505*	0.9565*	0.9965*	0.9505*	0.9565*
	0.5	0.9465*	0.9465*	0.996*	0.9465*	0.9465*
	0.7	0.9510*	0.9565*	0.9955*	0.9510*	0.9565*
	0.9	0.9495*	0.9575*	0.9950*	0.9480*	0.9575*

*กรณีที่วิธีการประมาณให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตารางที่ 2 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ทั้ง 5 วิธี กรณีขนาดตัวอย่าง (n) และพารามิเตอร์ (p) แตกต่างกัน

ขนาดตัวอย่าง n	พารามิเตอร์ p	วิธีการประมาณ				
		Wald	Score	Rigorous	Jeffreys	GScore
10	0.05	--	--	0.4475	0.2879**	0.3647
	0.1	--	--	0.5149	0.3491**	0.4054
	0.3	--	--	0.6720**	--	-
	0.5	--	0.5075**	0.7169	0.5283	0.5313
	0.7	--	--	0.6720**	--	-
	0.9	--	--	0.5149	0.3491**	0.4054
15	0.05	--	0.2606	0.3543	0.2282**	0.2859
	0.1	--	0.3059	0.4218	0.2875**	0.3278
	0.3	0.4463	--	0.5758	0.4189**	0.4267
	0.5	--	0.4395**	0.6178	0.4539	0.4544
	0.7	0.4463	--	0.5758	0.4189**	0.4267
	0.9	--	0.3059	0.4218	0.2875**	0.3278
30	0.05	--	--	0.2370	0.1566**	0.1861
	0.1	--	0.2166**	0.2987	--	0.2262
	0.3	0.3225	--	0.4294	0.3117**	0.3144
	0.5	0.3520	0.3321**	0.4639	0.3386	0.3382
	0.7	0.3225	--	0.4294	0.3117**	0.3144
	0.9	--	0.2166**	0.2987	--	0.2262
50	0.05	--	0.1300**	0.1778	--	0.1364
	0.1	--	0.1676	0.2315	0.1631**	0.1725
	0.3	--	0.2445**	0.3402	0.2465	0.2478
	0.5	--	--	0.3687	--	0.2678**
	0.7	--	0.2445**	0.3402	0.2465	0.2478
	0.9	--	0.1676	0.2315	0.1631**	0.1725
100	0.05	--	0.0890**	0.1224	--	0.0915
	0.1	0.1166**	0.1183	0.1636	0.1166**	0.1202
	0.3	0.1789	0.1762**	0.2447	0.1770	0.1775
	0.5	0.1951	0.1914**	0.2660	0.1927	0.1926
	0.7	0.1789	0.1762**	0.2447	0.1770	0.1775
	0.9	0.1166**	0.1183	0.1636	0.1166**	0.1202
500	0.05	--	0.0385	0.0532	0.0381**	0.0387
	0.1	--	0.0526	0.0729	0.0524**	0.0528
	0.3	0.0802	0.0800**	0.1109	0.0801	0.0801
	0.5	0.0876	0.0872**	0.1210	0.0874	0.0873
	0.7	0.0802	0.0800**	0.1109	0.0801	0.0801
	0.9	0.0524**	0.0526	0.0729	0.0524**	0.0528

-- กรณีที่ไม่ได้นำมาคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากเป็นวิธีให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด; **กรณีที่วิธีการประมาณให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด



รูปที่ 1 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น 95 % ทั้ง 5 วิธี กรณีขนาดตัวอย่าง (n) แตกต่างกัน

เมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้น ในทุกระดับของค่าพารามิเตอร์ p เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของแต่ละวิธีการประมาณพบว่าวิธีสูตรแม่นยำให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 10 และค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.3 และ 0.7 ส่วนวิธีวาลด์ พบว่ามีแนวโน้มให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (n=100, 500) และค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.1 และ 0.9 สำหรับวิธีเจฟเฟรย์ และวิธีวิธีสคอร์พบว่ามีแนวโน้มให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุดและใกล้เคียงค่าน้อยที่สุดในเกือบทุกสถานการณ์ นอกจากนี้วิธีวางนัยทั่วไปสคอร์พบว่าให้

ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาดเท่ากับ 50 และค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.5 เท่านั้น

4. วิจารณ์

วิธีเจฟเฟรย์พบว่ามีประสิทธิภาพดีเกือบทุกระดับของขนาดตัวอย่าง และเกือบทุกค่าพารามิเตอร์ p ยกเว้นพารามิเตอร์ p มีค่าเท่ากับ 0.3 ถึง 0.7 วิธีสคอร์จะมีประสิทธิภาพดี แม้ในบางกรณีวิธีนี้ไม่สามารถให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด แต่ก็สามารถให้ค่าที่ใกล้เคียงค่าที่น้อยที่สุดได้ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Brown และคณะ [5] ส่วนวิธีวาลด์มีแนวโน้มให้ประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของรักตาภา [4] สำหรับวิธีสูตรแม่นยำ แม้ว่าวิธีนี้จะไม่สามารถให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยสุดในเกือบทุกสถานการณ์ แต่ก็สามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมันที่กำหนดได้ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง n และทุกค่าพารา-มิเตอร์ p ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของรักตาภา [4] นอกจากนี้วิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ แม้ว่าจะไม่สามารถให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำที่สุดได้ในหลาย ๆ กรณี แต่สามารถให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมันที่กำหนดได้เกือบทุกระดับของขนาดตัวอย่าง n และเกือบทุกค่าพารา-มิเตอร์ p ซึ่งในแต่ละสถานการณ์ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดมากกว่าวิธีสคอร์ และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นใกล้เคียงค่าที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Guan [9]

5. สรุป

ผลการจำลองข้อมูลสามารถสรุปวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่น 95 % สำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินามซึ่งให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่น้อยกว่า 95 % ตามที่กำหนดไว้ และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด แสดงดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 วิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่น 95 % สำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินามที่เหมาะสม จำแนกตามขนาดตัวอย่าง n และ ค่าพารามิเตอร์ p

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">ขนาดตัวอย่าง n</th><th colspan="6">ค่าพารามิเตอร์ p</th></tr>
<tr><th>0.05</th><th>0.10</th><th>0.30</th><th>0.50</th><th>0.70</th><th>0.90</th></tr>
<tr><td rowspan="2">เล็ก</td><td>10</td><td>J</td><td>J</td><td>R</td><td>S</td><td>R</td><td>J</td></tr>
<tr><td>15</td><td>J</td><td>J</td><td>J</td><td>S</td><td>J</td><td>J</td></tr>
<tr><td rowspan="2">กลาง</td><td>30</td><td>J</td><td>S</td><td>J</td><td>S</td><td>J</td><td>S</td></tr>
<tr><td>50</td><td>S</td><td>J</td><td>S</td><td>G</td><td>S</td><td>J</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ใหญ่</td><td>100</td><td>S</td><td>W,J</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>W,J</td></tr>
<tr><td>500</td><td>J</td><td>J</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>W,J</td></tr>
</table>

W แทน วิธีวาลด์ (Wald method); S แทน วิธีสคอร์ (score method); R แทน วิธีสูตรแม่นยำ (rigorous formula method); J แทน วิธีเจฟเฟรย์ (Jeffreys method); G แทน วิธีวางนัยทั่วไปสคอร์ (generalized score method)

ตารางที่ 3 พบว่าในเกือบทุกระดับของขนาดตัวอย่าง เมื่อค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.5 วิธีสคอร์มีแนวโน้มให้ประสิทธิภาพดีที่สุด ยกเว้นกรณีขนาดตัวอย่างมีขนาด 50 วิธีวางนัยทั่วไปสคอร์จะให้ประสิทธิภาพที่ดีที่สุด แต่เมื่อพารามิเตอร์ p มีค่าห่างจาก 0.5 พบว่าส่วนใหญ่วิธีเจฟเฟรย์มีแนวโน้มให้ประสิทธิภาพดีในเกือบทุกระดับของขนาดตัวอย่าง และสำหรับวิธีวาลด์มีแนวโน้มให้ประสิทธิภาพดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่เท่ากับ 100 หรือ 500 และค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.1 หรือ 0.9 นอกจากนี้ยัง

พบว่าวิธีสูตรแม่นยำมีประสิทธิภาพดีเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 และค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.3 หรือ 0.7

6. ข้อเสนอแนะ

6.1 ศึกษาวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ค่าสัดส่วนทวินามวิธีอื่น ได้แก่ วิธีมิดพี [5] และวิธี ZL [13] เป็นต้น

6.2 ศึกษาวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่มีการแจกแจงแบบอื่น ๆ ได้แก่ การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล การแจกแจงแบบเรขาคณิต เป็นต้น

7. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่สนับสนุนค่าใช้จ่ายในการทำวิจัยครั้งนี้

8. รายการอ้างอิง

[1] ประชุม สุวัตถี, 2553, ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ, โครงการส่งเสริมและพัฒนาเอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์, กรุงเทพฯ.

[2] ทรงเกียรติ วิสุทธิพิทักษ์กุล, 2545, การใช้สถิติเพื่อการปรับปรุงกระบวนการ, สถาบันวิจัยวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งประเทศไทย, กรุงเทพฯ.

[3] Wilson, E.B., 1927, Probable inference, the law of succession, and statistical inference, J. Am. Staist. Assoc. 22: 209-212.

[4] รักตาภา คูหาพัฒนกุล, 2552, การศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

[5] Brown, L.D., Cai, T.T. and Dasgupta, A., 2001, Interval estimation for a biomial proportion, Stat. Sci. 16: 101-133.

[6] Chen, X., Zhou, K. and Aravena, J.L., 2007, Explicit Formula for Constructing Binomial Confidence Interval with Guaranteed Coverage Probability, Available Source: http://arxiv.org/abs/0707.0837, September 14, 2015.

[7] สาริณีย์ คงกัน, 2546, การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ในการแจกแจงทวินาม, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

[8] มัลลิกา ทานุสิทธิ์, 2551, การศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงทวินาม, วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

[9] Guan, Y., 2012, A generalized score confidence interval for a binomial proportion, J. Stat. Plan. Infer. 142: 785-793.

[10] Massart, P., 1990, The tight constant in the Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz inequality, Ann. Probab. 18: 1269-1283.

[11] Clunies-Ross, C.W., 1958, Interval estimation for the parameter of a binomial distribution, Biometrika Trust 45: 275-279.

[12] Ghosh, B.K., 1979, A comparison of some approximate confidence intervals for the binomial parameter, J. Amer. Staist. Assoc. 74: 894-900.

[13] Zhou, X.H., Li, C.M. and Yang, Z., 2008, Improving interval estimation of binomial proportions, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A 366: 2405- 2418.