# ผลรวมบางส่วนของสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป
# Partial sums of the generalized Pascal's triangle

นัฏภร ทองงาม* และ รณสรรพ์ ชินรัมย์**
Nattaporn Thongngam* and Ronnason Chinram**

## บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ได้ศึกษาสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป โดยผู้วิจัยได้แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมบางส่วนของสมาชิกกับสมาชิกในสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวเชื่อมโยงบางอนุกรมเลขคณิตจำกัดที่น่าสนใจ

**คำสำคัญ** : สามเหลี่ยมปาสคาล, ผลรวม, อนุกรม

## Abstract

In this research, we study the generalized Pascal's triangle. We show and prove the relationship between partial sums of some members and some members in the generalized Pascal's triangle. In addition, we also use this result to connect some interesting finite series.

**Keywords :** Pascal's triangle, sum, series

* นักศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
** รองศาสตราจารย์ ดร. ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
Corresponding author email: ronnason.c@psu.ac.th

**1. บทนำ**

"สามเหลี่ยมปาสคาล" ได้รับการความสนใจในการศึกษาทั้งในอินเดีย กรีก จีน มาเป็นเวลานาน แต่ Blaise Pascal, (ค.ศ. 1623 – 1662) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสเป็นบุคคลแรกที่นำเสนอและแสดงให้เห็นความสำคัญในบทความเรื่อง Traité du triangle arithmétique (1653) รูปแบบทั้งหมดของตัวเลขที่มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมและเพื่อให้เกียรติแก่ Pascal จึงเรียกชุดตัวเลขดังกล่าวว่า "สามเหลี่ยมปาสคาล"

สามเหลี่ยมปาสคาล เป็นการนำตัวเลขของสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจายทวินาม $(a+b)^n$ มาเขียนเรียงกันเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังภาพที่ 1.1

| | |
|---|---|
| สัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| สัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^4$ | 1 4 6 4 1 |
| สัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^3$ | 1 3 3 1 |
| สัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^2$ | 1 2 1 |
| สัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^1$ | 1 1 |
| สัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^0$ | 1 |

**ภาพที่ 1 แสดงสามเหลี่ยมปาสคาลในกรณี $i = 0$ ถึง $i = 5$**

เมื่อพิจารณาจากทฤษฎีบททวินาม จะได้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยม ดังภาพที่ 1

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{0}{0}$$

**ภาพที่ 2 แสดงสามเหลี่ยมปาสคาลในภาพที่ได้จากทฤษฎีบททวินาม**

โดยมีความสัมพันธ์ในภาพที่ 2 ดังนี้

1. $\binom{i}{0} = \binom{0}{0} = \binom{i}{i} = 1$ สำหรับทุก $i \geq 0$
2. $\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}$ สำหรับ $i > 1$ และ $0 < j < i$

Plaza ได้ใช้สมบัติข้อ 2 สร้างรูปภาพมาช่วยในการหาค่าของผลรวมบางส่วนในสามเหลี่ยมปาสคาลโดยไม่ได้พิสูจน์ (Plaza, 2017) ยิ่งไปกว่านั้น ยังมีงานวิจัยที่น่าสนใจเกี่ยวกับ

สามเหลี่ยมปาสคาล ตัวอย่างเช่น Brothers ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า $e$ และสามเหลี่ยมปาสคาล (Brothers, 2012) Hinz ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสามเหลี่ยมปาสคาลและหอคอยฮานอย (Hinz, 1992) และนอกจากนี้ยังมีสมบัติอื่นๆ ที่น่าสนใจของสามเหลี่ยมปาสคาลใน (Hilton, P. & Pedersen, J., 1987)

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ขยายงานของ Plaza (Plaza, 2017) ไปสู่สามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป หาค่าของสมาชิกในสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปบางค่าและนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเชื่อมโยงกับค่าของอนุกรมจำกัดบางอนุกรมที่น่าสนใจ

## 2. วัสดุ อุปกรณ์ และวิธีการวิจัย

### 2.1 สามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป

ในการศึกษาสามเหลี่ยมปาสคาลให้กว้างขึ้นจะขยายสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปดังบทนิยาม 1 **บทนิยาม 1** $A(i,j)$ เป็นลำดับที่นิยามบน $i \geq 1$ และ $0 \leq j \leq i$ โดยที่มีค่าเริ่มต้นเป็น $A(1,0)$ และ $A(1,1)$ สำหรับค่าอื่นๆ มีเงื่อนไขดังนี้

2.1.1 $A(i,0) = A(1,0)$ สำหรับทุก $i > 1$

2.1.2 $A(i,i) = A(1,1)$ สำหรับทุก $i > 1$

2.1.3 $A(i,j) = A(i-1,j-1) + A(i-1,j)$ สำหรับ $i > 1$ และ $0 < j < i$

จากบทนิยามข้างต้น โดยพิจารณา $i = 1$ ถึง $i = 5$ จะได้แผนภาพดังภาพที่ 3

$$
\begin{array}{c}
A(5,0)\ \ A(5,1)\ \ A(5,2)\ \ A(5,3)\ \ A(5,4)\ \ A(5,5) \\
A(4,0)\ \ A(4,1)\ \ A(4,2)\ \ A(4,3)\ \ A(4,4) \\
A(3,0)\ \ A(3,1)\ \ A(3,2)\ \ A(3,3) \\
A(2,0)\ \ A(2,1)\ \ A(2,2) \\
A(1,0)\ \ A(1,1)
\end{array}
$$

**ภาพที่ 3** แสดงความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป

เมื่อพิจารณา $A(1,0) = 1$ และ $A(1,1) = 1$ โดยพิจารณา $i = 1$ ถึง $i = 5$ จะได้แผนภาพ ดังนี้

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 1
\end{array}
$$

**ภาพที่ 4** แสดงความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปในกรณี $A(1,0) = 1$ และ $A(1,1) = 1$

จากภาพที่ 4 แผนภาพดังกล่าวคือสามเหลี่ยมปาสคาลในกรณี $i = 1$ ถึง $i = 5$ นั่นเอง

**2.2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**

หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการพิสูจน์อย่างหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก โดยมีหลักการ ดังต่อไปนี้

ให้ $P(n)$ แทนข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า

2.2.1 $P(1)$ เป็นจริง

2.2.2 ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง และแสดงได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้วจะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ผลลัพธ์ต่างๆ ของงานวิจัยนี้

**2.3 อนุกรมเลขคณิต**

เรียกลำดับ $\{a_i\}$ ว่าเป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_i = a_0 + (i-1)d$ และเรียกอนุกรม $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ว่า อนุกรมเลขคณิต ถ้า $\{a_i\}$ ว่าเป็นลำดับเลขคณิต พบว่า

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

ตัวอย่าง อนุกรมเลขคณิตที่น่าสนใจ

2.3.1 $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2.3.2 $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ในหัวข้อ 4.3 จะใช้สมบัติของสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปเชื่อมโยงกับการหาอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมที่น่าสนใจดังกล่าวเหล่านี้

## 3. ผลการวิจัย

**3.1 หาความสัมพันธ์ของผลรวมของสมาชิกบางส่วนในสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป**

**ทฤษฎีบท 1** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n} A(k,1) = A(n+1,2)$$

**บทพิสูจน์** จาก $A(1,1) = A(2,2)$ และ $A(i,1) = A(i+1,2) - A(i,2)$ สำหรับ $i > 1$

ได้ว่า $\sum_{k=1}^{n} A(k,1) = A(1,1) + A(2,1) + A(3,1) + \cdots + A(n,1)$

$= A(2,2) + [A(3,2) - A(2,2)] + [A(4,2) - A(3,2)] + \cdots + [A(n+1,2) - A(n,2)]$

$= A(n+1,2)$

**ทฤษฎีบท 2** ให้ $j, m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $j \leq m \leq n$ ได้ว่า

$$\sum_{k=m}^{n} A(k,j) = A(n+1,j+1) - A(m,j+1)$$

**บทพิสูจน์** จาก $A(i,j) = A(i+1,j+1) - A(i,j+1)$ สำหรับ $i > 1$

ได้ว่า $\sum_{k=m}^{n} A(k,j) = A(m,j) + A(m+1,j) + A(m+2,j) + \cdots + A(n,j)$

$= [A(m+1,j+1) - A(m,j+1)] + [A(m+2,j+1) - A(m+1,j+1)]$
$+[A(m+3,j+1) - A(m+2,j+1)] + \cdots + [A(n+1,j+1) - A(n,j+1)]$
$= A(n+1,j+1) - A(m,j+1)$

**ทฤษฎีบท 3** ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{n} A(k+1,k) = A(n+2,n)$$

**บทพิสูจน์** จาก $A(i,j) = A(i+1,j) - A(i,j-1)$ สำหรับ $i > 1$ และ $0 < j < i$
ได้ว่า $\sum_{k=0}^{n} A(k+1,k) = A(1,0) + A(2,1) + A(3,2) + \cdots + A(n+1,n)$
$= A(1,0) + [A(3,1) - A(2,0)] + [A(4,2) - A(3,1)] + \cdots + [A(n+2,n) - A(n+1,n-1)$
$= A(n+2,n)$

**ทฤษฎีบท 4** ให้ $j,m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m \leq n$ ได้ว่า

$$\sum_{k=m}^{n} A(k+j,k) = A(n+1+j,n) - A(m+j,m-1)$$

**บทพิสูจน์** จาก $A(i,j) = A(i+1,j) - A(i,j-1)$สำหรับ $i > 1$ และ $0 < j < i$
ได้ว่า $\sum_{k=m}^{n} A(k+j,k) = A(m+j,m) + A(m+1+j,m+1) + A(m+2+j,m+2) + \cdots +$
$A(n+j,n)$
$= [A(m+j+1,m) - A(m+j,m-1)] + [A(m+j+2,m+1) - A(m+1+j,m)]$
$+[A(m+j+3,m+2) - A(m+1+2,m+1)] + \cdots$
$+[A(n+j+1,n) - A(n+j,n-1)]$
$= A(n+1+j,n) - A(m+j,m-1)$

**4.2 หาค่าของสมาชิกในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $A(1,0)$ และ $A(1,1)$**

สำหรับในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้ทำการหาค่าของสมาชิกออกมาในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $A(1,0)$ และ$A(1,1)$ และใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 5** ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า $A(i,1) = (i-1)A(1,0) + A(1,1)$
**บทพิสูจน์** การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์
พิจารณา $i = 1$ ได้ว่า $A(1,1) = (1-1)A(1,0) + A(1,1)$
ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติว่า $A(i,1) = (i-1)A(1,0) + A(1,1)$ ได้ว่า
$A(i+1,1) = A(i,0) + A(i,1) = A(1,0) + [(i-1)A(1,0) + A(1,1)] = iA(1,0) + A(1,1)$
โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง

**ทฤษฎีบท 6** ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $i \geq 2$ ได้ว่า $A(i,2) = \frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,0) + (i-1)A(1,1)$
**บทพิสูจน์** การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์
พิจารณา $i = 2$ ได้ว่า

$$A(2,2) = A(1,1) = \frac{(2-1)(2-2)}{2}A(1,0) + (2-1)A(1,1)$$

ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติว่า $A(i,2) = \frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,0) + (i-1)A(1,1)$
ได้ว่า $A(i+1,2) = A(i,1) + A(i,2)$
$= (i-1)A(1,0) + A(1,1) + \frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,0) + (i-1)A(1,1)$
$= \frac{i(i-1)}{2}A(1,0) + iA(1,1)$

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง

**ทฤษฎีบท 7** ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า $A(i,i-1)=A(1,0)+(i-1)A(1,1)$
**บทพิสูจน์** การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ผู้วิจัยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์
พิจารณา $i=1$ ได้ว่า $A(1,0)=A(1,0)+(1-1)A(1,1)$
ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติว่า $A(i,i-1)=A(1,0)+(i-1)A(1,1)$ ได้ว่า
$A(i+1,i)=A(i,i-1)+A(i,i)=A(1,0)+(i-1)A(1,1)+A(1,1)=A(1,0)+iA(1,1)$
โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง

**ทฤษฎีบท 8** ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $i\geq 2$ ได้ว่า $A(i,i-2)=(i-1)A(1,0)+\frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,1)$
**บทพิสูจน์** การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์
พิจารณา $i=2$ ได้ว่า

$$A(2,0)=A(1,0)=(2-1)A(1,0)+\frac{(2-1)(2-2)}{2}A(1,1)$$

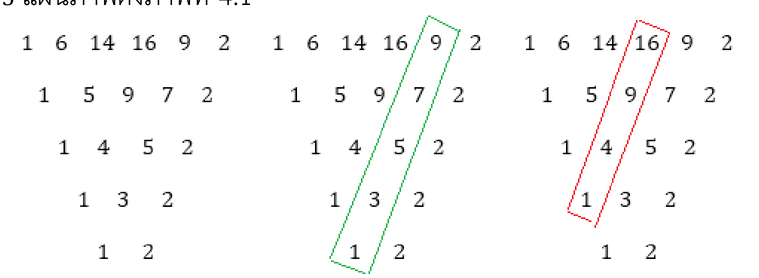
ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ สมมติว่า $A(i,i-2)=(i-1)A(1,0)+\frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,1)$

$$\begin{aligned}A(i+1,i-1)&=A(i,i-2)+A(i,i-1)\\&=(i-1)A(1,0)+\frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,1)+A(1,0)+(i-1)A(1,1)\\&=iA(1,0)+\frac{i(i-1)}{2}A(1,1)\end{aligned}$$

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง

### 4.3 การนำสมบัติของสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปเชื่อมโยงกับการหาอนุกรมที่น่าสนใจ

พิจารณาสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปซึ่ง $A(1,0)=1$ และ $A(1,1)=2$ โดยพิจารณา $i=1$ ถึง $i=5$ แผนภาพดังภาพที่ 4.1




**ภาพที่ 5** สามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป ในกรณีที่ $A(1,0)=1$ และ $A(1,1)=2$ และแสดงชุดตัวเลขที่สนใจ

จากการสังเกตภาพที่ 4 พบว่า ชุดตัวเลขในกรอบสีเขียวจะเป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และชุดตัวเลขในกรอบสีแดงเป็นจำนวนกำลังสอง ทฤษฎีบท 9 และ ทฤษฎีบท 10 จะพิสูจน์สิ่งดังกล่าว

**ทฤษฎีบท 9** ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า $A(i,i-1)=2i-1$
**บทพิสูจน์** จากทฤษฎีบท 7 ได้ว่า $A(i,i-1)=A(1,0)+(i-1)A(1,1)$
แทนค่า $A(1,0)=1$ และ $A(1,1)=2$ ได้ว่า

$$A(i,i-1)=1+2(i-1)=2i-1$$

**ทฤษฎีบท 10** ให้ $i$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $i \geq 2$ ได้ว่า $A(i, i-2) = (i-1)^2$

**บทพิสูจน์** จากทฤษฎีบท 8 ได้ว่า $A(i, i-2) = (i-1)A(1,0) + \frac{(i-1)(i-2)}{2}A(1,1)$

แทนค่า $A(1,0) = 1$ และ $A(1,1) = 2$ ได้ว่า

$$A(i, i-2) = (i-1) + \frac{(i-1)(i-2)}{2}2 = (i-1)^2$$

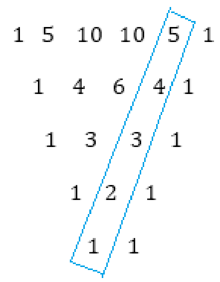
**บทแทรก 11** $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

**บทพิสูจน์** จากทฤษฎีบท 3 ได้ว่า $\sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, k) = A(n+1, n-1)$

จากทฤษฎีบท 10 พิจารณา $i = n + 1$ ได้ว่า $A(n+1, n-1) = n^2$

จากทฤษฎีบท 9 ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, k) = A(n+1, n-1) = n^2$

ให้ $A(1,0) = 1$ และ $A(1,1) = 1$ โดยพิจารณา $i = 1$ ถึง $i = 5$ แผนภาพดังกล่าวคือ




**ภาพที่ 6** สามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป ในกรณีที่ $A(1,0) = 1$ และ $A(1,1) = 1$ และแสดงชุดตัวเลขที่สนใจ

**บทแทรก 12** $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

**บทพิสูจน์** จากทฤษฎีบท 3 ได้ว่า $\sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, k) = A(n+1, n-1)$

จากทฤษฎีบท 8 พิจารณา $i = n + 1$ ได้ว่า

$A(n+1, n-1) = nA(1,0) + \frac{n(n-1)}{2}A(1,1) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, k) = A(n+1, n-1) = \frac{n(n+1)}{2}$

สำหรับบทแทรก 13 จะเชื่อมโยงสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปกับอนุกรมเลขคณิต

**บทแทรก 13** ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_i = a_0 + (i-1)d$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

**บทพิสูจน์** เลือก $A(1,0) = a_0$ และ $A(1,1) = d$

ได้ว่า $a_i = a_0 + (i-1)d = A(1,0) + (i-1)A(1,1) = A(i, i-1)$ โดยทฤษฎีบท 7

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} A(i, i-1) = A(n+1, n-1)$

จากทฤษฎีบท 8 พิจารณา $i = n + 1$ ได้ว่า $A(n+1, n-1) = nA(1,0) + \frac{n(n-1)}{2}A(1,1)$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\mathrm{A}(1,0) + \frac{n(n-1)}{2}A(1,1) = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

## 4. การอภิปรายผลหรือการวิจารณ์และสรุป

การวิจัยนี้ ได้ขยายการศึกษาสามเหลี่ยมปาสคาลไปสู่สามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไป ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมของสมาชิกกับสมาชิกบางตัวในสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปและมีการเชื่อมโยงกับการหาอนุกรมเลขคณิตจำกัดโดยนำผลรวมข้างต้นมาใช้ในการพิสูจน์ซึ่งแตกต่างจากการพิสูจน์แบบเดิม สำหรับผู้ที่สนใจในงานวิจัยนี้สามารถศึกษาสามเหลี่ยมปาสคาลทั่วไปเพื่อหาความสัมพันธ์อื่นๆ ของสมาชิกในสามเหลี่ยมปาสคาลและนำผลลัพธ์ที่ได้ไปประยุกต์ในการช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

## 5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ให้ความอนุเคราะห์และให้ข้อเสนอแนะอันเป็นประโยชน์สำหรับบทความวิจัยนี้

นัฏภร ทองงาม ขอขอบคุณโครงการ พสวท. ที่ได้สนับสนุนให้ผู้วิจัยได้ทำงานวิจัยในภาคฤดูร้อน และ รณสรรพ์ ชินรัมย์ ขอขอบคุณหน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่ได้สนับสนุนในการทำวิจัย

## 6. เอกสารอ้างอิง

Brothers, H. J. (2012). Math Bite: Finding e in Pascal’s Triangle. **Mathematics Magazine**, 85(1), 51.

Brothers, H. J. (2012). Pascal's triangle: The hidden stor-e. **The Mathematical Gazette**, 96, 145–148.

Hilton, P. & Pedersen, J. (1987). Looking into Pascal’s triangle: Combinatorics, arithmetic, and geometry, **Mathematics Magazine**, 60(5), 305–316.

Hinz, A. M. (1992). Pascal's triangle and the Tower of Hanoi, **The American Mathematical Monthly**, 99(6), 538–544.

Plaza, A. (2017). Proof Without Words : Partial Column Sums in Pascal’s Triangle, **Mathematics Magazine,** 90(2) (2017), 117-118.