

เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและขยายขวา

Necessary and Sufficient Conditions for Left Magnifying and Right Magnifying Linear Transformations

รณสรณ์ ชินรัมย์^{1*} ศรายุทธ มั่นคงวิวัฒน์¹ และ สำรวม บัวประดิษฐ์²
 Ronnason Chinram^{1*}, Sarayut Mankongwiwat¹ and Samraum Baupradist²

บทคัดย่อ

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์และ $L(V) = \{f | f: V \rightarrow V \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้น}\}$ ให้ $f \in L(V)$ เรียก f ว่า การแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย ถ้ามีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ที่ทำให้ $f \circ M = L(V)$ และเรียก f ว่า การแปลงเชิงเส้นขยายขวา ถ้ามีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ที่ทำให้ $M \circ f = L(V)$ บทความนี้เสนอการพิสูจน์เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและขยายขวาโดยใช้เพียงสมบัติพื้นฐานของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

คำสำคัญ: ฐานหลัก ปริภูมิเวกเตอร์ การแปลงเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย
 การแปลงเชิงเส้นขยายขวา

Abstract

Let V be a vector space and $L(V) = \{f | f: V \rightarrow V \text{ is a linear transformation}\}$. Let $f \in L(V)$. f is called a left magnifying linear transformation if there exists a proper subset M of $L(V)$ such that $f \circ M = L(V)$ and f is called a right magnifying linear transformation if there exists a proper subset M of $L(V)$ such that $M \circ f = L(V)$. In this paper, we prove necessary and sufficient conditions for left magnifying and right magnifying linear transformations by using some basic properties of vector spaces and linear transformations.

Keywords: basis, vector spaces, linear transformations, left magnifying linear transformations, right magnifying linear transformations

¹ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

² ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

* Corresponding author e-mail: ronnason.c@psu.ac.th

บทนำ

โครงสร้างทางพีชคณิตประกอบด้วยเซตไม่ว่างและการดำเนินการ การศึกษาสมบัติของโครงสร้างทางพีชคณิตมีการศึกษาวิจัยในหลายโครงสร้างพีชคณิต ตัวอย่างเช่น รณสรณ์ ชินรัมย์ (2552) รัตนภรณ์ ศรีภากรณ์ และรณสรณ์ ชินรัมย์ (2552) ได้ศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีกลุ่มและ ญัฐาฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษารูปของจำนวนเศษเหลือ สุทิน ทองรักษ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2557) ได้ศึกษาริงของจำนวนเศษเหลือ วรเชษฐ์ สมมะณี (2558) ได้ศึกษากรุปสมมาตร เป็นต้น

กึ่งกรุปเป็นโครงสร้างทางพีชคณิตซึ่งประกอบด้วยเซตย่อยไม่ว่างและการดำเนินการทวิภาคที่มีสมบัติปิดและเปลี่ยนหมู่ ปี ค.ศ. 1963 Ljapin ได้แนะนำสมาชิกขยายซ้าย (left magnifying element) และสมาชิกขยายขวา (right magnifying element) ของกึ่งกรุป (Ljapin, E. S., 1963) ต่อมาในปี ค.ศ. 1992 Catino และ Migliorini ได้ศึกษาและให้ผลลัพธ์ที่สำคัญในการศึกษาสมาชิกขยายซ้ายและสมาชิกขยายขวาของกึ่งกรุป (Catino, F. & Migliorini, F., 1992) ต่อมาในปี ค.ศ. 1994 Magill, Jr. ได้พิจารณาสมาชิกขยายซ้ายและสมาชิกขยายขวาของกึ่งกรุปการแปลง พร้อมทั้งพิสูจน์เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและการแปลงเชิงเส้นขยายขวา (Magill, Jr. K. D., 1994) อย่างไรก็ตาม การพิสูจน์ดังกล่าวมีความซับซ้อน

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์และ $L(V) = \{f | f: V \rightarrow V \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้น}\}$ พบว่า $(L(V), \circ)$ เป็นกึ่งกรุปและ $(L(V), +, \circ)$ เป็นริง โดยที่ $\circ$ เป็นการประกอบของฟังก์ชัน และเรียก $(L(V), \circ)$ ว่ากึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นและเรียก $(L(V), +, \circ)$ ว่าริงการแปลงเชิงเส้น งานวิจัยเกี่ยวกับกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นและริงการแปลงเชิงเส้นมีการศึกษาอย่างมากมาย ตัวอย่างเช่น ยุพาภรณ์ได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของสมาชิกปกติในกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นนัยทั่วไป (Kemprasit, Y., 2002) ยุพาภรณ์และรณสรณ์ได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของริงการแปลงเชิงเส้นนัยทั่วไปที่มีสมบัติส่วนร่วมของควอซี-ไอดิล (Kemprasit, Y. & Chinram, R., 2002) ยุพาภรณ์และรณสรณ์ได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของควอซี-ไอดิล 0-เล็กสุดเฉพาะกลุ่มของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นนัยทั่วไป (Kemprasit, Y. & Chinram, R., 2003) รณสรณ์ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของกรีนและความเป็นปกติของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นนัยทั่วไป (Chinram, R., 2009) ธวัชและ sullivan ได้ศึกษาสมาชิกนิพจน์เหมือนของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้น (Changphas, T. & Sullivan, R.P., 2010) สุริย์พร ธีระพงษ์ และพงษ์สญ ได้ศึกษาอันดับบางส่วนของกรุปการแปลงเชิงเส้น (Chopraknoi, S., Phongpatanacharoen, T. & Prakitsri, P., 2015) วัตถุประสงค์ของการวิจัยเพื่อพิจารณาสมาชิกขยายซ้ายและสมาชิกขยายขวาของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นโดยนิยามผ่านบทนิยามของการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและการแปลงเชิงเส้นขยายขวา พร้อมทั้งพิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและการแปลงเชิงเส้นขยายขวาโดยใช้เพียงสมบัติพื้นฐานของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการวิจัย ใช้บทนิยามเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์และ $L(V) = \{f | f: V \rightarrow V \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้น}\}$

ฐานหลัก (basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ V คือ เซตย่อย B ของปริภูมิเวกเตอร์ V ที่เป็นเซตที่อิสระเชิงเส้น (linearly independent) และแผ่ทั่ว (span) ปริภูมิเวกเตอร์ V

การแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์ id_V คือ การแปลงเชิงเส้น $id_V: V \rightarrow V$ โดยที่ $id_V(v) = v$ สำหรับทุก $v \in V$

สำหรับ $f \in L(V)$ เรนจ์ของ f คือ $\{f(v) | v \in V\}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $ran f$

วิธีดำเนินการวิจัยขั้นที่ 1 นิยามการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและขยายขวา ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ให้ $f \in L(V)$ เรียก f ว่า การแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย (left magnifying linear transformation) ถ้า มีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ที่ทำให้ $f \circ M = L(V)$

บทนิยาม 2 ให้ $f \in L(V)$ เรียก f ว่า การแปลงเชิงเส้นขยายขวา (right magnifying linear transformation) ถ้า มีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ที่ทำให้ $M \circ f = L(V)$

วิธีดำเนินการวิจัยขั้นที่ 2 พิจารณาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและขยายขวา พร้อมทั้งพิสูจน์ตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์โดยใช้สมบัติพื้นฐานของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นในการพิสูจน์

ผลการวิจัย

ในการวิจัย ผู้วิจัยได้บทตั้งและทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1 ให้ $f \in L(V)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้ว $f \circ L(V) = L(V)$ และ $L(V) \circ f = L(V)$

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ทำให้ได้ว่า f^{-1} นิยามและเป็นการแปลงเชิงเส้น เนื่องจาก $f \in L(V)$ จึงทำให้ได้ว่า $f^{-1} \in L(V)$ และเนื่องจากสำหรับทุก $g \in L(V)$ ได้ว่า $f^{-1} \circ g \in L(V)$ และ $g \circ f^{-1} \in L(V)$ พบว่า $f \circ (f^{-1} \circ g) = g$ และ $(g \circ f^{-1}) \circ f = g$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $f \circ L(V) = L(V)$ และ $L(V) \circ f = L(V)$

บทตั้ง 2 ถ้า f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย แล้ว f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย ดังนั้นจะมีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ซึ่งทำให้ $f \circ M = L(V)$ เนื่องจากการแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์ $id_V \in L(V)$ ทำให้ได้ว่า จะมี $g \in M$ ที่ทำให้ $f \circ g = id_V$ ซึ่งทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

บทตั้ง 3 ให้ $f \in L(V)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $M = \{h \in L(V) | h \text{ ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง}\}$ เห็นได้ชัดเจนว่า $M \neq L(V)$ ให้ g เป็นการแปลงเชิงเส้นใดๆ และให้ B เป็นฐานหลักของ V เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จึงได้ว่าสำหรับทุก $x \in B$ จะมี $y_x \in V$ ซึ่ง $f(y_x) = g(x)$ นิยามการแปลงเชิงเส้น $h \in L(V)$ บนฐานหลัก B โดย $h(x) = y_x$ สำหรับทุก $x \in B$ เนื่องจาก f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงได้ว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สำหรับทุก

$x \in B$ พบว่า $f \circ h(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$ ดังนั้น $f \circ h = g$ ทำให้ได้ $f \circ M = L(V)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย

บทตั้ง 4 ถ้า f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา ดังนั้นจะมีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ซึ่งทำให้ $M \circ f = L(V)$ เนื่องจาก $id_V \in L(V)$ ทำให้ได้ว่า จะมี $g \in M$ ที่ทำให้ $g \circ f = id_V$ ซึ่งทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทตั้ง 5 ให้ $f \in L(V)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง แล้ว f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง ให้ B' เป็นฐานหลักของ $ran f$ และ B เป็นฐานหลักของ V บรรจุ B'

ให้ $M = \{h \in L(V) \mid h(x) = x \text{ สำหรับทุก } x \notin ran f\}$ เห็นได้ชัดเจนว่า $M \neq L(V)$ ต่อไปจะแสดงว่า $M \circ f = L(V)$ ให้ g เป็นการแปลงเชิงเส้นใดๆ นิยาม การแปลงเชิงเส้น $h \in L(V)$ บน B โดย สำหรับ $y \in B$

$$h(y) = \begin{cases} g(x) & \text{ถ้า } y \in ran f \text{ และ } y = f(x) \\ y & \text{ถ้า } y \notin ran f \end{cases}$$

จากการนิยามได้ว่า $h \in M$ และเห็นได้ชัดว่า $B'' = \{x \in V \mid f(x) \in B'\}$ เป็นฐานหลักของ V และสำหรับทุก $x \in B''$ ได้ว่า

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = g(x)$$

ดังนั้น $h \circ f = g$ ทำให้ได้ $M \circ f = L(V)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา

ทฤษฎีบท 1 สำหรับ $f \in L(V)$ ได้ว่า

1. f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง
2. f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง

บทพิสูจน์

1. ให้ f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย ดังนั้นมีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ที่ทำให้ $f \circ M = L(V)$ โดยบทตั้ง 2 ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยบทตั้ง 1 ได้ว่า $L(V) = f^{-1} \circ L(V) = f^{-1} \circ f \circ M = M$ ซึ่งขัดแย้ง ทำให้ได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง

ในการพิสูจน์อีกด้านหนึ่ง ให้ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง โดยบทตั้ง 3 ได้ว่า f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย

2. ให้ f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา ดังนั้น มีเซตย่อยแท้ M ของ $L(V)$ ที่ทำให้ $M \circ f = L(V)$ โดยบทตั้ง 4 ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันโดยบทตั้ง 1 ได้ว่า $L(V) = L(V) \circ f^{-1} = M \circ f \circ f^{-1} = M$ ซึ่งขัดแย้ง ทำให้ได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง

ในการพิสูจน์อีกด้านหนึ่ง ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ทั่วถึงโดยบทตั้ง 5 ได้ว่า f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

ในส่วนสุดท้ายของบทความ ขอนำเสนอสมบัติที่น่าสนใจอื่นเกี่ยวกับการแปลงเชิงเส้นขยายขาวและการแปลงเชิงเส้นขยายขาว ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 ให้ f และ g เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว แล้ว $f \circ g$ เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

บทพิสูจน์ ให้ f และ g เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว ดังนั้น จะมี M_1 และ M_2 เป็นเซตย่อยแท้ของ $L(V)$ ซึ่ง $f \circ M_1 = L(V)$ และ $g \circ M_2 = L(V)$ พิจารณา $(f \circ g) \circ M_2 = f \circ (g \circ M_2) = f \circ L(V)$ และ เนื่องจาก $L(V) = f \circ M_1 \subseteq f \circ L(V)$ จึงได้ว่า $(f \circ g) \circ M_2 = L(V)$ ดังนั้น $f \circ g$ เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

ทฤษฎีบท 3 ให้ f และ g ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว แล้ว $f \circ g$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

บทพิสูจน์ สมมติให้ $f \circ g$ เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว ดังนั้นจะมี M เป็นเซตย่อยแท้ของ $L(V)$ ซึ่ง $(f \circ g) \circ M = L(V)$ จะได้ว่า $L(V) = (f \circ g) \circ M = f \circ (g \circ M)$ เนื่องจาก f ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว จึงเห็นได้ชัดว่า $g \circ M = L(V)$ และ เนื่องจาก g ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว จึงได้ว่า $M = L(V)$ ซึ่งขัดแย้งกับข้างต้น ดังนั้น $f \circ g$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

ทฤษฎีบท 4 ให้ f และ g เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว แล้ว $f \circ g$ เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

บทพิสูจน์ ให้ f และ g เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว ดังนั้น จะมี M_1 และ M_2 เป็นเซตย่อยแท้ของ $L(V)$ ซึ่ง $M_1 \circ f = L(V)$ และ $M_2 \circ g = L(V)$ พิจารณา $M_1 \circ (f \circ g) = (M_1 \circ f) \circ g = L(V) \circ g$ และ เนื่องจาก $L(V) = M_2 \circ g \subseteq L(V) \circ g$ จึงได้ว่า $M_1 \circ (f \circ g) = L(V)$ ดังนั้น $f \circ g$ เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

ทฤษฎีบท 5 ให้ f และ g ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว แล้ว $f \circ g$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

บทพิสูจน์ สมมติให้ $f \circ g$ เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว ดังนั้นจะมี M เป็นเซตย่อยแท้ของ $L(V)$ ซึ่ง $M \circ (f \circ g) = L(V)$ จะได้ว่า $L(V) = M \circ (f \circ g) = (M \circ f) \circ g$ เนื่องจาก g ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว จึงเห็นได้ชัดว่า $M \circ f = L(V)$ และเนื่องจาก f ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว จึงได้ว่า $M = L(V)$ ซึ่งขัดแย้งกับข้างต้น ดังนั้น $f \circ g$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขาว

การอภิปรายผลการวิจัย สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

ในบทความนี้ได้พิสูจน์เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของการที่การแปลงเชิงเส้นจะเป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและการแปลงเชิงเส้นขยายขวา

1. f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายซ้าย ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงแต่ไม่หนึ่งต่อหนึ่ง
 2. f เป็นการแปลงเชิงเส้นขยายขวา ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง
- ซึ่งการพิสูจน์ใช้เพียงสมบัติของปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นเท่านั้นและมีความแตกต่างกับการพิสูจน์โดย Magill, Jr. ซึ่งมีความซับซ้อนและมีความเป็นนามธรรมกว่ามากและเหมาะกับผู้ที่มีความรู้ทางด้านทฤษฎีกรุป ผู้สนใจสามารถศึกษาการพิสูจน์ของ Magill, Jr. ได้ที่ (Magill, Jr. K. D., 1994)

สำหรับงานวิจัยสำหรับผู้สนใจที่จะต่อยอดงานวิจัยดังกล่าวสามารถทำได้ โดยอาจพิจารณาการหาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการแปลงเชิงเส้นขยายซ้ายและการแปลงเชิงเส้นขยายขวาของกึ่งกรุปการแปลงเชิงเส้นอื่นๆ

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณเป็นอย่างสูงสำหรับผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้ให้คำแนะนำสำหรับบทความวิจัย และ ผู้เขียนขอขอบคุณหน่วยวิจัยพีชคณิตและการประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ที่ให้การสนับสนุน

เอกสารอ้างอิง

- ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวงนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา*, 6(1), 25-30.
- รณสรพร ชินรัมย์. (2552). ความสัมพันธ์กรีนและความเป็นปกติของกึ่งกรุปการแปลงเต็มวงนัยทั่วไป. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข.*, 37(3), 348-356.
- รัตนภรณ์ ศรีภากรณ์ และรณสรพร ชินรัมย์. (2552). ควอซี-ไอดีลวงนัยทั่วไปของกึ่งกรุป. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข.*, 37(2), 213-220.
- วรเชษฐ์ สมมะณี. (2558). แรกกของผลคูณตรงของสองกรุปสมมาตร. *สัปดาห์: วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*, 2(1), 13-20.
- สุทิน ทองรักษ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). ความสวยงามวงนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของริงของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา*, 7(1), 85-90.
- Catino, F. & Migliorini, F. (1992). Magnifying elements of semigroups. *Semigroup Forum*, 44(1), 314-319.
- Changphas, T. & Sullivan, R.P. (2010). Skew idempotents in linear transformation semigroups. *Linear and Multilinear Algebra*, 58(4), 299-411.
- Chinram, R. (2009). Green's relations and regularity of generalized semigroups of linear transformations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 30(4), 253-256.

- Chopraknoi, S., Phongpatanacharoen, T. & Prakitsri, P. (2015). The natural partial order on linear transformations with nullity and co-rank bounded below. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 91(1), 104-115.
- Kemprasit, Y. (2002). Regularity and unit-regularity of generalized semigroups of linear transformations. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 25(4), 617-622.
- Kemprasit, Y. & Chinram, R. (2002). Generalized rings of linear transformations having the intersection property of quasi-ideals. *Vietnam Journal of Mathematics*, 30(2), 283-288.
- Kemprasit, Y. & Chinram, R. (2003). 0-minimal quasi-ideals of generalized linear transformation semigroups. *Communications in Algebra*, 31(10), 4765-4774.
- Ljapin, E. S. (1963). *Semigroups*, American Mathematical Society, Providence, R.I.
- Magill, Jr. K. D. (1994). Magnifying Elements of Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, 48(1), 119-126.